27

产业组织评论

Industrial Organization Review

第10卷 第3辑 （总第27辑） 2016年9月
Vol. 10 No. 3 (Gen. 27) Sep. 2016

于 左 主编

中国社会科学出版社

产业组织与企业组织研究中心
（教育部人文社会科学重点研究基地）
中国工业经济学会

产业组织评论

Industrial Organization Review

第10卷 第3辑 （总第27辑） 2016年9月
Vol. 10 No. 3 (Gen. 27) Sep. 2016

于 左 主编

中国社会科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

《产业组织评论》. 2016 年. 第 3 辑：总第 27 辑/于左主编. —北京：中国社会科学出版社，2017. 1

ISBN 978 - 7 - 5203 - 1824 - 2

Ⅰ. ①产… Ⅱ. ①于… Ⅲ. ①产业组织—研究 Ⅳ. ①F260

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 323682 号

出 版 人	赵剑英
责任编辑	卢小生
责任校对	周晓东
责任印制	王　超
出　　版	中国社会科学出版社
社　　址	北京鼓楼西大街甲 158 号
邮　　编	100720
网　　址	http：//www. csspw. cn
发 行 部	010 - 84083685
门 市 部	010 - 84029450
经　　销	新华书店及其他书店
印　　刷	北京明恒达印务有限公司
装　　订	廊坊市广阳区广增装订厂
版　　次	2017 年 1 月第 1 版
印　　次	2017 年 1 月第 1 次印刷
开　　本	787 × 1092　1/16
印　　张	6
插　　页	2
字　　数	124 千字
定　　价	36. 00 元

凡购买中国社会科学出版社图书，如有质量问题请与本社营销中心联系调换
电话：010 - 84083683

目　　录

CONTENTS

［论 文］

大销量竞争下产品质量与安全的双寡头微分博弈模型

孙召金 吴绪亮

摘 要 本文构造一个连续时间双寡头微分博弈模型，考察了在纵向差异化产品市场上博弈的均衡结果及大销量竞争对生产企业的产品安全和质量水平、消费者剩余和社会福利的影响。研究发现，在微分博弈模型中，大销量竞争可以提高高质量企业的产品安全和质量；所有质量水平企业均有动机采取大销量竞争提高产品安全和质量；大销量竞争幅度越大，企业产品安全和质量就会越高，价格也会越高，企业利润会越大，消费者剩余和社会总福利随之增加，并且企业成本差距程度始终与企业的产品安全和质量水平不相关。

关键词 大销量竞争；产品质量与安全；微分博弈；纵向差异

一 引言

产品质量和安全问题一直是经济学研究的一个经典问题。从理论建模的角度来看，产品质量和产品安全的经济学属性并无本质区别。已有文献强调了质量与信息的作用，却忽略了企业内部激励问题，特别是企业目标函数对产品质量水平和安全的影响。吴绪亮和孙召金（2016）首次将企业内部激励问题和产品质量与安全问题联系起来，将大销量竞争引入企业目标函数中，通过构造一个两阶段博弈模型和质量参差指标，分析了企业热衷于大销量竞争而非仅仅利润水平的情形下，差异化产品市场上生产企业的安全和质量努力及市场中产品安全和质量水平的差距分布。研究发现，大销量竞争确实可以提高企业的产品安全和质量水平，非对称性大销量竞争会扩大企业间的安全和质量水平差距，企业成本差距程度始终与企业的产品安全和质量水平负

［作者简介］孙召金，东北财经大学产业组织与企业组织研究中心硕士研究生，研究方向为产业组织理论；吴绪亮，安徽六安人，经济学博士，法学博士后，东北财经大学产业组织与企业组织研究中心副主任、副研究员，研究方向为产业组织理论与反垄断经济学。

相关。

然而，这一静态模型存在诸多不足，首先，静态模型考察的是一个两阶段博弈模型，对于博弈时点的要求较高，随着时间的不断变化，这种博弈结果是否会有新的变化不得而知，现实中企业的博弈往往都是动态博弈，通过观察竞争对手的策略而不断调整自己的策略。其次，静态模型考察企业热衷于大销量竞争而非仅仅利润水平的情形，实际上，企业是否采取大销量竞争主要是看它是否有利可图，也就是要分析大销量竞争是否对其利润产生影响，才能判断企业是否有动机采取大销量竞争。

关于产品质量与安全动态博弈问题的相关研究，比思等（Beath et al.，1987）、杜塔等（Dutta et al.，1995）最早认为产品质量的提升是不确定的创新路径的结果，Kotowitz 和 Mathewson（1979）、康拉德（Conrad，1985）和林贝壳（Ringbeck，1985）则从企业为了增加商誉而采用广告策略或者是为了提高市场份额而竞争的角度，研究了最优控制模型和微分博弈模型中的产品纵向质量差异问题。塞西（Sethi，1997）、乔根森（Jorgensen，1982）、费奇廷格和乔根森（Feichtinger and Jorgensen，1983）、埃里克森（Erickson，1991）和费奇廷格等（1994）从动态广告策略方面，莱特曼和施米腾多夫（Leitmann and Schmitendorf，1978）、费奇廷格（1983）、捷利尼和兰伯蒂尼（Cellini and Lambertini，2003b）则是同时考虑了动态广告策略和价格策略来讨论双寡头垄断模型中的质量差异化情形。寡头微分博弈中比较经典的文献主要有捷利尼和兰伯蒂尼（Cellini and Lambertini，1998）在动态资本积累下的古诺模型和伯川德模型，Fudenberg 和 Tirole（1983）、Fershtman 和 Muller（1984）、Reynolds（1987，1991）、Cellini 和 Lambertini（2001）的索洛资本积累模型，Singh 和 Vives（1984）的拉姆齐资本积累模型，以及 Clemhout 和 Wan（1994）、多克等（Docker et al.，2000）、捷利尼和兰伯蒂尼（Cellini 和 Lambertini，2003a）的寡头垄断理论。Colombo 和 Lambertini（2003）考察了在生产活动的广告和研发投入，分析发现，如果低质量企业比高质量企业更加有效率，那么生产高质量产品的企业不一定比生产低质量产品的企业获得更多的收益。卢卡·兰伯蒂尼（Luca Lambertini，2006）研究了纵向差异化产品市场上双寡头微分博弈模型。研究发现，双寡头形式的存在性依赖于企业的非负利润条件，这也反过来取决于企业为提高质量而投入的研发规模；高、低质量企业的利润大小取决于时间维度，在一定条件下，低质量企业会获得高于高质量企业的利润，并且，高质量企业的研发投入高于低质量企业的研发投入。

本文基于对这些问题的考虑，将大销量竞争引入微分博弈中，构造了一个在连续时间 $t \in [0, \infty)$ 上的双寡头微分博弈模型，在纵向差异化产品市场上，通过比较分析企业的利润函数，讨论博弈的均衡结果及大销量竞争对生产企业的产品安全和质量水平、消费者剩余和社会福利的影响。

二　模型假定

本文考虑企业策略性目标函数（特别是大销量竞争）对产品质量与安全的影响，采用经典的豪泰林纵向差异模型来研究双寡头企业在连续时间 $t \in [0, \infty)$ 上的微分博弈，为了更好地比较大销量竞争对质量和安全的影响，我们分别考虑了无大销量竞争、非对称性大销量竞争和对称性大销量竞争三种情形。

假设市场上有两家生产单一产品 $q_i(t)$ 的企业，其价格分别为 $p_i(t)$，其中，$i = H, L$，生产高质量产品 $q_H(t)$ 的企业记为 H，生产低质量产品 $q_L(t)$ 的企业记为 L，且 $0 \leqslant q_L(t) \leqslant q_H(t) < \infty$。从理论建模角度来看，产品质量和产品安全的经济学属性并无本质区别。每个消费者对于质量的偏好为 θ，服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。标准化消费者密度为 1，即 $f(\theta) = 1$，且转换成本为 0，则类型为 θ 的消费者从产品 $q_i(t)$ 获得的净剩余为：

$$U_\theta(t) = \begin{cases} \theta q_i(t) - p_i(t) \geqslant 0 \\ 0 \end{cases} \qquad i = H, L$$

若购买高质量产品和低质量产品之间无差异，则有 $U_H(t) = U_L(t)$，由此可得：$\overline{\theta(t)} = \dfrac{p_H(t) - p_L(t)}{q_H(t) - q_L(t)}$；购买低质量产品和不购买之间无差异可得：$\underline{\theta(t)} = \dfrac{p_L(t)}{q_L(t)}$，因此，高、低质量产品的需求函数分别为 $x_H(t) = 1 - \overline{\theta(t)}$ 和 $x_L(t) = \overline{\theta(t)} - \underline{\theta(t)}$；对于所有 $\underline{\theta(t)} > 0$，则：

$$p_H(t) = q_H(t)[1 - x_H(t)] - q_L(t)x_L(t)$$

$$p_L(t) = q_L(t)[1 - x_H(t) - x_L(t)]$$

定义动态方程：$\dfrac{dq_H(t)}{dt} = \beta_H k_H(t) - \delta q_H(t)$，$\dfrac{dq_L(t)}{dt} = \beta_L k_L(t)$，其中，$k_i$ 表示企业 i 的研发投入，β_i 表示企业 i 的研发投入效率系数，δ 表示随着时间变化质量的衰减率。企业 i 的初始条件为 $q_i(0) = q_{i0} \geqslant 0$，企业 H 研发成本 $c_H(t) = [k_H(t)]^2$，企业 L 研发成本 $c_L(t) = b[k_L(t)]^2 (0 < b < 1)$，其他成本忽略不计，则企业的利润函数为：

$$\pi_H(t) = p_H(t)\left[1 - \frac{p_H(t) - p_L(t)}{q_H(t) - q_L(t)}\right] - [k_H(t)]^2$$

$$\pi_L(t) = p_L(t)\left[\frac{p_H(t) - p_L(t)}{q_H(t) - q_L(t)} - \frac{p_L(t)}{q_L(t)}\right] - b[k_L(t)]^2$$

并且 $x_H(t) + x_L(t) \leqslant 1$，$p_i(t)$ 和 $k_i(t)$ 是控制变量，$q_i(t)$ 是状态变量。因此，问题可归结为：

$$\max_{k_i(t), p_i(t)} \prod_i(t) = \int_0^\infty \pi_i(t) e^{-\rho t} dt$$

s. t. $\frac{dq_H(t)}{dt}=\beta_H k_H(t)-\delta q_H(t)$, $\frac{dq_L(t)}{dt}=\beta_L k_L(t)$

$q_i(0)=q_{i0}\geqslant 0$

如果企业不采用大销量竞争，则该企业的目标函数为：

$\pi_i(t)=p_i(t)x_i(t)-c_i(t)$

如果企业采用大销量竞争，则该企业的目标函数为：

$$\begin{aligned}\pi_i(t)&=\eta[p_i(t)x_i(t)-c_i(t)]+(1-\eta)[p_i(t)x_i(t)]\\&=p_i(t)x_i(t)-\eta c_i(t)\end{aligned}$$

$\eta\in(0,1]$ 度量了企业对销量的重视程度，$1-\eta$ 则度量了大销量竞争的幅度。

考虑到计算的可行性，这里假定企业只进行有利于提高产品质量的事先固定投资，即事前研发的投入成本，也即总成本，此时企业 H 和企业 L 的总成本函数分别为：

$c_H(t)=[k_H(t)]^2$

$c_L(t)=b[k_L(t)]^2(0<b<1)$

三　无大销量竞争情形

下面考虑两家企业均不采用大销量竞争的情形。

企业 i 的现值汉密尔顿函数为：

$H_i(t)=e^{-\rho t}\left\{\pi_i(t)+\lambda_{ii}(t)\frac{dq_i(t)}{dt}+\lambda_{ij}(t)\frac{dq_j(t)}{dt}\right\}$，i，j = H，L，i≠j，$\lambda_{ij}(t)=\mu_{ij}(t)e^{\rho t}$，$\mu_{ij}(t)$ 是关于 $q_j(t)$ 的协状态变量。

则企业 H 的现值汉密尔顿函数为：

$$\begin{aligned}H_H(t)&=e^{-\rho t}\left\{\pi_H(t)+\lambda_{HH}(t)\frac{dq_H(t)}{dt}+\lambda_{HL}(t)\frac{dq_L(t)}{dt}\right\}\\&=e^{-\rho t}\left\{\begin{aligned}&p_H(t)\left[1-\frac{p_H(t)-p_L(t)}{q_H(t)-q_L(t)}\right]-[k_H(t)]^2+\lambda_{HH}(t)\\&[\beta_H k_H(t)-\delta q_H(t)]+\lambda_{HL}(t)\beta_L k_L(t)\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

企业 L 的现值汉密尔顿函数为：

$$\begin{aligned}H_L(t)&=e^{-\rho t}\left\{\pi_L(t)+\lambda_{LL}(t)\frac{dq_L(t)}{dt}+\lambda_{LH}(t)\frac{dq_H(t)}{dt}\right\}\\&=e^{-\rho t}\left\{\begin{aligned}&p_L(t)\left[\frac{p_H(t)-p_L(t)}{q_H(t)-q_L(t)}-\frac{p_L(t)}{q_L(t)}\right]-b[k_L(t)]^2+\\&\lambda_{LL}(t)\beta_L k_L(t)+\lambda_{LH}(t)[\beta_H k_H(t)-\delta q_H(t)]\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

企业 i 的汉密尔顿函数对价格 $p_i(t)$ 求一阶导可得均衡价格 p_H^* 和 p_L^*：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_H}{\partial p_H}=0\\ \dfrac{\partial H_L}{\partial p_L}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{-\rho t}\left(1-\dfrac{2p_H-p_L}{q_H-q_L}\right)=0\\ e^{-\rho t}\left(\dfrac{p_H-2p_L}{q_H-q_L}-\dfrac{2p_L}{q_L}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_H^*=\dfrac{2q_H(q_H-q_L)}{4q_H-q_L}\\ p_L^*=\dfrac{q_L(q_H-q_L)}{4q_H-q_L}\end{cases}$$

企业 i 的汉密尔顿函数对研发投入 $k_i(t)$ 求一阶导可得均衡研发投入 k_H^* 和 k_L^*：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_H}{\partial k_H}=0\\ \dfrac{\partial H_L}{\partial k_L}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{-\rho t}(-2k_H+\lambda_{HH}\beta_H)=0\\ e^{-\rho t}(-2bk_L+\lambda_{LL}\beta_L)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_H^*=\dfrac{\lambda_{HH}\beta_H}{2} & (1)\\ k_L^*=\dfrac{\lambda_{LL}\beta_L}{2b} & (2)\end{cases}$$

企业 H 的协状态方程为：

$$\frac{\partial\mu_{HH}}{\partial t}=-\frac{\partial H_H}{\partial q_H}-\frac{\partial H_H}{\partial p_L}\frac{\partial p_L^*}{\partial q_H}-\frac{\partial H_H}{\partial k_L}\frac{\partial k_L^*}{\partial q_H}$$

显然$\dfrac{\partial k_L^*}{\partial q_H}=0$，则有：

$$\frac{\partial\lambda_{HH}}{\partial t}e^{-\rho t}-\rho\lambda_{HH}e^{-\rho t}=\left\{\begin{aligned}&-\left[\frac{p_H(p_H-p_L)}{(q_H-q_L)^2}-\lambda_{HH}\delta\right]-\\&\left(\frac{p_H}{q_H-q_L}\right)\frac{3q_L^2}{(4q_H-q_L)^2}-0\end{aligned}\right\}e^{-\rho t}$$

即：

$$\frac{\partial\lambda_{HH}}{\partial t}=(\rho+\delta)\lambda_{HH}-\frac{p_H(p_H-p_L)}{(q_H-q_L)^2}-\frac{3p_Hq_L^2}{(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2}\tag{3}$$

以及

$$\frac{\partial\mu_{HL}}{\partial t}=-\frac{\partial H_H}{\partial q_L}-\frac{\partial H_H}{\partial p_L}\frac{\partial p_L^*}{\partial q_L}-\frac{\partial H_H}{\partial k_L}\frac{\partial k_L^*}{\partial q_L}\tag{4}$$

企业 L 的协状态方程为：

$$\frac{\partial\mu_{LL}}{\partial t}=-\frac{\partial H_L}{\partial q_L}-\frac{\partial H_L}{\partial p_H}\frac{\partial p_H^*}{\partial q_L}-\frac{\partial H_L}{\partial k_H}\frac{\partial k_H^*}{\partial q_L}$$

同样，$\dfrac{\partial k_H^*}{\partial q_H}=0$，则有：

$$\frac{\partial\lambda_{LL}}{\partial t}e^{-\rho t}-\rho\lambda_{LL}e^{-\rho t}=\left\{-\left[\frac{p_L(p_H-p_L)}{(q_H-q_L)^2}+\frac{p_L^2}{q_L^2}\right]+\frac{6p_Lq_H^2}{(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2}-0\right\}$$

即：

$$\frac{\partial\lambda_{LL}}{\partial t}=\rho\lambda_{LL}-\frac{p_L(p_Hq_L^2-2p_Lq_Hq_L+p_Lq_H^2)}{q_L^2(q_H-q_L)^2}+\frac{6p_Lq_H^2}{(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2}\tag{5}$$

以及

$$\frac{\partial\mu_{LH}}{\partial t}=-\frac{\partial H_L}{\partial q_H}-\frac{\partial H_L}{\partial p_H}\frac{\partial p_H^*}{\partial q_H}-\frac{\partial H_L}{\partial k_H}\frac{\partial k_H^*}{\partial q_H}\tag{6}$$

由于是线性博弈，则式（4）和式（6）是多余的，故有 $\lambda_{LH}=\lambda_{HL}=0$。

将式（1）两边分别对 t 求导变形可得：

$$\frac{\partial\lambda_{HH}}{\partial t}=\frac{2}{\beta_2}\frac{\partial k_H}{\partial t} \tag{7}$$

同理，可得：

$$\frac{\partial\lambda_{LL}}{\partial t}=\frac{2b}{\beta_1}\frac{\partial k_L}{\partial t} \tag{8}$$

且 $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_i(t)q_i(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\lambda_i e^{-\rho t}q_i(t)=0$。

由式（1）、式（3）、式（7）可得：

$$\frac{dk_H}{dt}=(\rho+\delta)k_H-\frac{\beta_H p_H(p_H-p_L)}{2(q_H-q_L)^2}-\frac{3\beta_H p_H q_L^2}{2(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2}$$

即：

$$\frac{dk_H}{dt}=(\rho+\delta)k_H+\frac{4q_H\beta_H}{q_L-4q_H}+\frac{26q_H^2\beta_H}{(q_L-4q_H)^2}+\frac{48q_H^3\beta_H}{(q_L-4q_H)^3};$$

即：

$$\frac{dk_H}{dt}=(\rho+\delta)k_H-\frac{2q_H\beta_H(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{(4q_H-q_L)^3}。$$

由式（2）、式（5）、式（8）可得：

$$\frac{dk_L}{dt}=\rho k_L-\frac{\beta_L p_L}{2b}\frac{(p_H q_L^2-2p_L q_H q_L+p_L q_H^2)}{q_L^2(q_H-q_L)^2}+\frac{3\beta_L p_L q_H^2}{b(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2}$$

即 $\frac{dk_L}{dt}=\rho k_L-\frac{q_H^2\beta_L(4q_H-7q_L)}{2b(4q_H-q_L)^3}$，令 $\frac{dk_i}{dt}=0$，可得有关质量水平的最优研发投入的闭环解 k_H^{CL} 和 k_L^{CL}：

$$\begin{cases}\dfrac{dk_H}{dt}=0\\[2ex]\dfrac{dk_L}{dt}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_H^{CL}=\dfrac{2q_H\beta_H(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{(\rho+\delta)(4q_H-q_L)^3}\\[2ex]k_L^{CL}=\dfrac{\beta_L q_H^2(4q_H-7q_L)}{2b\rho(4q_H-q_L)^3}\end{cases}$$

将 k_H^{CL} 和 k_L^{CL} 代入动态方程可得：

$$\begin{cases}\dfrac{dq_H(t)}{dt}=\dfrac{2q_H\beta_H^2(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{(\rho+\delta)(4q_H-q_L)^3}-\delta q_H\\[2ex]\dfrac{dq_L(t)}{dt}=\dfrac{\beta_L^2q_H^2(4q_H-7q_L)}{2b\rho(4q_H-q_L)^3}\end{cases}$$

由 $\frac{dq_i(t)}{dt}=0$ 得到均衡状态下的最优质量水平的闭环解 q_H^{CL} 和 q_L^{CL}：

$$\begin{cases} q_H^{CL} = \dfrac{7\beta_H^2}{48\delta(\rho+\delta)} \\ q_L^{CL} = \dfrac{\beta_H^2}{12\delta(\rho+\delta)} \end{cases}，并且有\ q_L^{CL} = \frac{4}{7}q_H^{CL}；$$

进而也可求得均衡价格 p_H^{CL} 和 p_L^{CL}：

$$\begin{cases} p_H^{CL} = \dfrac{7\beta_H^2}{192\delta(\rho+\delta)} \\ p_L^{CL} = \dfrac{\beta_H^2}{96\delta(\rho+\delta)} \end{cases}，且有\ p_L^{CL} = \frac{2}{7}p_H^{CL}。$$

因此，可得企业 H 的市场需求为 $x_H^{CL} = \frac{7}{12}$，企业 L 的市场需求为 $x_L^{CL} = \frac{7}{24}$，故有利润为：

$$\begin{cases} \pi_H^{CL}(t) = p_H^{CL}(t)x_H^{CL}(t) - c_H(t) = \dfrac{49\rho\beta_H^2}{2304\delta(\rho+\delta)^2} \\ \pi_L^{CL}(t) = p_L^{CL}(t)x_L^{CL}(t) - c_L(t) = \dfrac{7\beta_H^2}{2304\delta(\rho+\delta)} \end{cases}$$

消费者剩余为：

$$CS^{CL} = \int_{\bar{\theta}}^{1}[\theta q_H^{CL} - p_H^{CL}]d\theta + \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}[\theta q_L^{CL} - p_L^{CL}]d\theta = \frac{49\beta_H^2}{1152\delta(\rho+\delta)}$$

故双寡头竞争均衡状态下的社会福利为：

$$SW^{CL} = \pi_H^{CL} + \pi_L^{CL} + CS^{CL} = \frac{7\beta_H^2(22\rho+15\delta)}{2304\delta(\rho+\delta)^2}。$$

命题 1：在纵向差异化产品的双寡头微分博弈市场中，如果企业不采取大销量竞争，则均衡状态下低质量企业研发投入为 0，生产的低质量产品质量水平还取决于高质量企业的研发投入效率系数。高质量企业研发投入效率系数越大，生产的产品质量就会越高，低质量企业生产的产品质量同样也会提高，两家企业利润均会增加，社会福利也会增加。并且，低质量企业和高质量企业产品质量的比率是恒定的常数 4/7，这和 Choi 和 Shin（1992）提出的 4/7 原则是一致的。

四　非对称性大销量竞争情形

考虑两家企业非对称性地采用大销量竞争的情形，此时又分两种情况：低质量企业采取大销量竞争策略和高质量企业采取大销量竞争策略。

（一）低质量企业采取大销量竞争

企业的目标函数为：

$$\pi_L(t)=\eta[p_L(t)x_L(t)-c_L(t)]+(1-\eta)[p_L(t)x_L(t)]$$
$$=p_L(t)x_L(t)-\eta c_L(t)$$
$$\pi_H(t)=p_H(t)x_H(t)-c_H(t)$$

则企业 L 的现值汉密尔顿函数为：

$$H_L(t)=e^{-\rho t}\left\{\pi_L(t)+\lambda_{LL}(t)\frac{dq_L(t)}{dt}+\lambda_{LH}(t)\frac{dq_H(t)}{dt}\right\}$$
$$=e^{-\rho t}\left\{\begin{array}{l}p_L(t)\left[\frac{p_H(t)-p_L(t)}{q_H(t)-q_L(t)}-\frac{p_L(t)}{q_L(t)}\right]-b[k_L(t)]^2+\lambda_{LL}(t)\beta_L k_L(t)\\+\lambda_{LH}(t)[\beta_H k_H(t)-\delta q_H(t)]\end{array}\right\}$$

企业 H 的现值汉密尔顿函数为：

$$H_H(t)=e^{-\rho t}\left\{\pi_H(t)+\lambda_{HH}(t)\frac{dq_H(t)}{dt}+\lambda_{HL}(t)\frac{dq_L(t)}{dt}\right\}$$
$$=e^{-\rho t}\left\{\begin{array}{l}p_H(t)\left[1-\frac{p_H(t)-p_L(t)}{q_H(t)-q_L(t)}\right]-[k_H(t)]^2+\lambda_{HH}(t)[\beta_H k_H(t)-\\\delta q_H(t)]+\lambda_{HL}(t)\beta_L k_L(t)\end{array}\right\}$$

企业 i 的汉密尔顿函数对价格 $p_i(t)$ 求一阶导可得均衡价格 p_H^* 和 p_L^*：

$$\begin{cases}\frac{\partial H_H}{\partial p_H}=0\\\frac{\partial H_L}{\partial p_L}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{-\rho t}\left(1-\frac{2p_H-p_L}{q_H-q_L}\right)=0\\e^{-\rho t}\left(\frac{p_H-2p_L}{q_H-q_L}-\frac{2p_L}{q_L}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_H^*=\frac{2q_H(q_H-q_L)}{4q_H-q_L}\\p_L^*=\frac{q_L(q_H-q_L)}{4q_H-q_L}\end{cases}$$

企业 i 的汉密尔顿函数对研发投入 k_i（t）求一阶导可得均衡研发投入 k_H^* 和 k_L^*：

$$\begin{cases}\frac{\partial H_H}{\partial k_H}=0\\\frac{\partial H_L}{\partial k_L}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{-\rho t}(-2k_H+\lambda_{HH}\beta_H)=0\\e^{-\rho t}(-2b\eta k_L+\lambda_{LL}\beta_L)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_H^*=\frac{\lambda_{HH}\beta_H}{2}\\k_L^*=\frac{\lambda_{LL}\beta_L}{2\eta b}\end{cases}$$

企业 H 的协状态方程为：

$\frac{\partial\mu_{HH}}{\partial t}=-\frac{\partial H_H}{\partial q_H}-\frac{\partial H_H}{\partial p_L}\frac{\partial p_L^*}{\partial q_H}-\frac{\partial H_H}{\partial k_L}\frac{\partial k_L^*}{\partial q_H}$，显然，$\frac{\partial k_L^*}{\partial q_H}=0$，则有：

$$\frac{\partial\lambda_{HH}}{\partial t}=(\rho+\delta)\lambda_{HH}-\frac{p_H(p_H-p_L)}{(q_H-q_L)^2}-\frac{3p_Hq_L^2}{(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2},$$

企业 L 的协状态方程为：

$$\frac{\partial\mu_{LL}}{\partial t}=-\frac{\partial H_L}{\partial q_L}-\frac{\partial H_L}{\partial p_H}\frac{\partial p_H^*}{\partial q_L}-\frac{\partial H_L}{\partial k_H}\frac{\partial k_H^*}{\partial q_L}$$

同样，$\frac{\partial k_H^*}{\partial q_H}=0$，则有：

$$\frac{\partial\lambda_{LL}}{\partial t}=\rho\lambda_{LL}-\frac{p_L(p_Hq_L^2-2p_Lq_Hq_L+p_Lq_H^2)}{q_L^2(q_H-q_L)^2}+\frac{6p_Lq_H^2}{(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2},$$

并且可得：

$$\frac{\partial\lambda_{HH}}{\partial t}=\frac{2}{\beta_2}\frac{\partial k_H}{\partial t},\quad \frac{\partial\lambda_{LL}}{\partial t}=\frac{2b\eta}{\beta_1}\frac{\partial k_L}{\partial t}$$

进而可得：

$$\frac{dk_H}{dt}=(\rho+\delta)k_H-\frac{2q_H\beta_H(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{(4q_H-q_L)^3},\quad \frac{dk_L}{dt}=\rho k_L-\frac{q_H^2\beta_L(4q_H-7q_L)}{2b\eta(4q_H-q_L)^3};$$

令$\frac{dk_i}{dt}=0$，可得有关质量水平的最优研发投入的闭环解 k_H^{CL} 和 k_L^{CL}：

$$\begin{cases}\dfrac{dk_H}{dt}=0\\[2ex] \dfrac{dk_L}{dt}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_H^{CL}=\dfrac{2q_H\beta_H(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{(\rho+\delta)(4q_H-q_L)^3}\\[2ex] k_L^{CL}=\dfrac{\beta_Lq_H^2(4q_H-7q_L)}{2b\eta\rho(4q_H-q_L)^3}\end{cases}$$

将 k_H^{CL} 和 k_L^{CL} 代入动态方程可得：

$$\begin{cases}\dfrac{dq_H(t)}{dt}=\dfrac{2q_H\beta_H^2(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{(\rho+\delta)(4q_H-q_L)^3}-\delta q_H\\[2ex] \dfrac{dq_L(t)}{dt}=\dfrac{\beta_L^2q_H^2(4q_H-7q_L)}{2b\eta\rho(4q_H-q_L)^3}\end{cases}$$

由$\frac{dq_i(t)}{dt}=0$得到均衡状态下的最优质量水平的闭环解 q_H^{CL} 和 q_L^{CL}：

$$\begin{cases}q_H^{CL}=\dfrac{7\beta_H^2}{48\delta(\rho+\delta)}\\[2ex] q_L^{CL}=\dfrac{\beta_H^2}{12\delta(\rho+\delta)}\end{cases}，并且有\ q_L^{CL}=\frac{4}{7}q_H^{CL};$$

进而也可求得均衡价格 p_H^{CL} 和 p_L^{CL}：

$$\begin{cases}p_H^{CL}=\dfrac{7\beta_H^2}{192\delta(\rho+\delta)}\\[2ex] p_L^{CL}=\dfrac{\beta_H^2}{96\delta(\rho+\delta)}\end{cases}，且有\ p_L^{CL}=\frac{2}{7}p_H^{CL};$$

因此，企业 H 的市场需求为 $x_H^{CL}=7/12$，企业 L 的市场需求为 $x_L^{CL}=7/24$，均衡利润为：

$$\begin{cases}\pi_H^{CL}(t)=p_H^{CL}(t)x_H^{CL}(t)-c_H(t)=\dfrac{49\rho\beta_H^2}{2304\delta(\rho+\delta)^2}\\[2ex] \pi_L^{CL}(t)=p_L^{CL}(t)x_L^{CL}(t)-c_L(t)=\dfrac{7\beta_H^2}{2304\delta(\rho+\delta)}\end{cases}$$

消费者剩余为：

$$CS^{CL}=\int_{\bar{\theta}}^{1}[\theta q_H^{CL}-p_H^{CL}]d\theta+\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}[\theta q_L^{CL}-p_L^{CL}]d\theta=\frac{49\beta_H^2}{1152\delta(\rho+\delta)}$$

故双寡头竞争均衡状态下的社会福利为：

$$SW^{CL}=\pi_H^{CL}+\pi_L^{CL}+CS^{CL}=\frac{7\beta_H^2(22\rho+15\delta)}{2304\delta(\rho+\delta)^2}$$。

可以发现，该种情况和无大销量竞争情形完全一样，原因为均衡状态下低质量企业的研发投入始终为0，故大销量竞争参数 η 不起作用，即低质量企业是否采取大销量策略对均衡结果没有影响。

（二）高质量企业采取大销量竞争

企业的目标函数为：

$$\pi_L(t)=p_L(t)x_L(t)-c_L(t)$$

$$\begin{aligned}\pi_H(t)&=\eta[p_H(t)x_H(t)-c_H(t)]+(1-\eta)[p_H(t)x_H(t)]\\&=p_H(t)x_H(t)-\eta c_H(t)\end{aligned}$$

则企业 L 的现值汉密尔顿函数为：

$$\begin{aligned}H_L(t)&=e^{-\rho t}\left\{\pi_L(t)+\lambda_{LL}(t)\frac{dq_L(t)}{dt}+\lambda_{LH}(t)\frac{dq_H(t)}{dt}\right\}\\&=e^{-\rho t}\left\{\begin{aligned}&p_L(t)\left[\frac{p_H(t)-p_L(t)}{q_H(t)-q_L(t)}-\frac{p_L(t)}{q_L(t)}\right]-b[k_L(t)]^2+\lambda_{LL}(t)\beta_Lk_L(t)\\&+\lambda_{LH}(t)[\beta_Hk_H(t)-\delta q_H(t)]\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

企业 H 的现值汉密尔顿函数为：

$$\begin{aligned}H_H(t)&=e^{-\rho t}\left\{\pi_H(t)+\lambda_{HH}(t)\frac{dq_H(t)}{dt}+\lambda_{HL}(t)\frac{dq_L(t)}{dt}\right\}\\&=e^{-\rho t}\left\{\begin{aligned}&p_H(t)\left[1-\frac{p_H(t)-p_L(t)}{q_H(t)-q_L(t)}\right]-\eta[k_H(t)]^2+\lambda_{HH}(t)[\beta_Hk_H(t)\\&-\delta q_H(t)]+\lambda_{HL}(t)\beta_Lk_L(t)\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

企业 i 的汉密尔顿函数对价格 $p_i(t)$ 求一阶导可得均衡价格 p_H^* 和 p_L^*：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_H}{\partial p_H}=0\\[2ex]\dfrac{\partial H_L}{\partial p_L}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{-\rho t}\left(1-\dfrac{2p_H-p_L}{q_H-q_L}\right)=0\\[2ex]e^{-\rho t}\left(\dfrac{p_H-2p_L}{q_H-q_L}-\dfrac{2p_L}{q_L}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_H^*=\dfrac{2q_H(q_H-q_L)}{4q_H-q_L}\\[2ex]p_L^*=\dfrac{q_L(q_H-q_L)}{4q_H-q_L}\end{cases}$$

企业 i 的汉密尔顿函数对研发投入 $k_i(t)$ 求一阶导可得均衡研发投入 k_H^* 和 k_L^*：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_H}{\partial k_H}=0\\[2ex]\dfrac{\partial H_L}{\partial k_L}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{-\rho t}(-2\eta k_H+\lambda_{HH}\beta_H)=0\\e^{-\rho t}(-2bk_L+\lambda_{LL}\beta_L)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_H^*=\dfrac{\lambda_{HH}\beta_H}{2\eta}\\[2ex]k_L^*=\dfrac{\lambda_{LL}\beta_L}{2b}\end{cases}$$

企业 H 的协状态方程为：

$$\frac{\partial\mu_{HH}}{\partial t}=-\frac{\partial H_H}{\partial q_H}-\frac{\partial H_H}{\partial p_L}\frac{\partial p_L^*}{\partial q_H}-\frac{\partial H_H}{\partial k_L}\frac{\partial k_L^*}{\partial q_H}$$

显然，$\frac{\partial k_L^*}{\partial q_H}=0$，则有：

$$\frac{\partial\lambda_{HH}}{\partial t}=(\rho+\delta)\lambda_{HH}-\frac{p_H(p_H-p_L)}{(q_H-q_L)^2}-\frac{3p_Hq_L^2}{(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2},$$

企业 L 的协状态方程为：

$$\frac{\partial\mu_{LL}}{\partial t}=-\frac{\partial H_L}{\partial q_L}-\frac{\partial H_L}{\partial p_H}\frac{\partial p_H^*}{\partial q_L}-\frac{\partial H_L}{\partial k_H}\frac{\partial k_H^*}{\partial q_L}$$

同样，$\frac{\partial k_H^*}{\partial q_H}=0$，则有：

$$\frac{\partial\lambda_{LL}}{\partial t}=\rho\lambda_{LL}-\frac{p_L(p_Hq_L^2-2p_Lq_Hq_L+p_Lq_H^2)}{q_L^2(q_H-q_L)^2}+\frac{6p_Lq_H^2}{(q_H-q_L)(4q_H-q_L)^2},$$

并且可得：

$$\frac{\partial\lambda_{HH}}{\partial t}=\frac{2\eta}{\beta_2}\frac{\partial k_H}{\partial t},\quad \frac{\partial\lambda_{LL}}{\partial t}=\frac{2b}{\beta_1}\frac{\partial k_L}{\partial t}$$

进而可得：

$$\frac{dk_H}{dt}=(\rho+\delta)k_H-\frac{2q_H\beta_H(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{\eta(4q_H-q_L)^3},\quad \frac{dk_L}{dt}=\rho k_L-\frac{q_H^2\beta_L(4q_H-7q_L)}{2b(4q_H-q_L)^3};$$

令$\frac{dk_i}{dt}=0$，可得有关质量水平的最优研发投入的闭环解 k_H^{CL} 和 k_L^{CL}：

$$\begin{cases}\dfrac{dk_H}{dt}=0\\[2ex]\dfrac{dk_L}{dt}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_H^{CL}=\dfrac{2q_H\beta_H(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{\eta(\rho+\delta)(4q_H-q_L)^3}\\[2ex]k_L^{CL}=\dfrac{\beta_Lq_H^2(4q_H-7q_L)}{2b\rho(4q_H-q_L)^3}\end{cases}$$

将 k_H^{CL} 和 k_L^{CL} 代入动态方程可得：

$$\begin{cases}\dfrac{dq_H(t)}{dt}=\dfrac{2q_H\beta_H^2(2q_L^2-3q_Lq_H+4q_H^2)}{\eta(\rho+\delta)(4q_H-q_L)^3}-\delta q_H\\[2ex]\dfrac{dq_L(t)}{dt}=\dfrac{\beta_L^2q_H^2(4q_H-7q_L)}{2b\rho(4q_H-q_L)^3}\end{cases}$$

由$\frac{dq_i(t)}{dt}=0$，得到均衡状态下的最优质量水平的闭环解 q_H^{CL} 和 q_L^{CL}：

$$\begin{cases}q_H^{CL}=\dfrac{7\beta_H^2}{48\eta\delta(\rho+\delta)}\\[2ex]q_L^{CL}=\dfrac{\beta_H^2}{12\delta(\rho+\delta)}\end{cases}$$

均衡价格：