洞穿高考™
数学辅导丛书

高考数学专题系列

全国卷

满分秘籍

秘

主　编　张永辉
副主编　王安平　张　杰　田伟锋
　　　　张宏卫　余　臣

导数篇

全国通用

方法·技巧·方向·深度

清華大学出版社

洞穿高考™
数学辅导丛书

全国卷

满分秘籍

导数篇

主　编　张永辉
副主编　王安平　张　杰　田伟锋
张宏卫　余　臣

清華大學出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为快速提高考生解决高考数学压轴导数题的能力而编写的辅导用书，系统地介绍了导数的五大重点问题：(一)研究含参函数的单调性；(二)不等式的恒成立与存在性问题；(三)零点问题研究；(四)利用导数证明不等式；(五)高观点下的导数问题. 本书对方法(一题多解问题)、技巧(在做题效率上超越)、方向(探究未来考试的趋势)、深度(站在命题人的角度来研究问题)都进行了全方位的归纳总结.

本书面向的对象是高中数学教师和优秀高中生，特别是有志于挑战高考数学高分甚至满分的同学.

图书在版编目(CIP)数据

全国卷满分秘籍. 导数篇/张永辉主编. —北京：清华大学出版社，2017
(洞穿高考数学辅导丛书)
ISBN 978-7-302-46042-8

Ⅰ.①全…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①中学数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 005021 号

责任编辑：陈　明
封面设计：吴爱国
责任校对：赵丽敏
责任印刷：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　张**：12.75　**字　　数**：309 千字
版　　次：2017 年 1 月第 1 版　**印　　次**：2017 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：35.80 元

产品编号：070189-01

前　言

2010年组合教育正式出版《洞穿高考数学辅导丛书》.

六年来，这套丛书在几乎没有任何广告宣传的条件下，被越来越多的读者认可.如今在当当、京东、亚马逊等网站销量均名列前茅，线下也有越来越多的学校和班级集体征订这套书作为课堂教学用书.经常有读者询问最新版图书的亮点和后面图书的出版计划，帮助编写团队出谋划策，积极参与新版图书的修订工作.

这样的市场反应，也激励了编写团队不断地加大研发投入.我们坚持“专注、极致”的做书理念，始终保持对高考命题研究的新鲜感，在内容和形式上不断地创新.拒绝粗制滥造、坚持图书的思想性是组合教育做出版不变的追求.

如何帮助全国卷地区的考生顺利地拿下大家的痛点学科——数学，或更明确地说：如何让大家在考试中轻松拿下数学的最难三大部分：导数、圆锥曲线、压轴小题，是我们这套书努力的方向.

组合教育数学研发团队组织了全国近百名优秀作者，专注于全国卷的命题研究并逐点突破，研究国内重要的数学教育论文和近十年全国卷真题和模拟考试试题，从这些浩如烟海的试题中提炼出重点、难点问题，从以下四个方面来阐述和演绎其本质规律.

（一）方法，重在强调一题解万题的高度和能力.

（二）技巧，我们并不是一味的强调技巧，但是只要是我们说明的技巧，就能让同学们在考试中轻松胜出，在时间效率上超越对手.

（三）方向，我们不仅研究过去考试的方向，更是要探究未来考试的趋势，给考生最权威和准确的指导.

（四）深度，站在命题人的角度来研究问题，不是简单的堆砌内容，而是对内容的精雕细琢.

在本书编写过程中，组合教育团队采用更开放的编写理念，吸收了很多一线教师的意见，并使之尽可能体现在我们的图书作品中.用更好的内容，帮助老师提高教学水平，让学生提高数学成绩，是我们的创作初心.当然，鉴于编者能力有限，虽倾心尽力，亦不能尽善尽美.若有疏漏和不妥之处，敬请广大读者和数学同行们指正.愿本套专题书伴随莘莘学子步入理想的大学！

张永辉

2016年12月于北京

目　录

第一讲　研究含参函数的单调性

本讲综述

函数的单调性是函数的重要性质之一，对深入研究函数的图像、比较函数值大小、解不等式、求极值、最值(取值范围)、判断函数零点个数、证明不等式起着至关重要的作用，因此，函数单调性的考查是高考的重点和热点. 而导数是求解函数单调性的一把利器，利用它可以将确定原函数单调性的问题转化为判断导函数的符号问题.

知识导航

一　求函数单调性的解题步骤

第一步:确定函数的定义域;

第二步:求导函数 $f'(x)$;

第三步:以导函数的零点存在性进行分类讨论;

第四步:当导函数存在多个零点时，讨论它们的大小关系以及与区间的位置关系;

第五步:画出导函数的草图，从而判断其导函数的符号;

第六步:根据第五步的草图列出 $f'(x)$，$f(x)$随 x 变化的情况表，并写出函数的单调区间;

第七步:综上其讨论的情形，完整写出函数的单调区间.

二　“主导”函数

通常我们把决定导函数符号的函数构造为新函数，称其为“主导”函数，一般用 $h(x)$ 表示.

对于导函数判断函数单调性，经研究，“主导”函数的形式梳理如下:

(1)能判断“主导”函数的符号，得出原函数的单调性，具体分为:

$$\begin{cases}\text{“主导”函数为一次函数型}:h(x)=k\varphi(x)+b \\ \text{“主导”函数为二次函数型}:h(x)=ax^2+bx+c\end{cases}$$

(2)不能判断“主导”函数的符号，就需要二次求导或多次求导来判断“主导”函数的正负号，进而得出原函数的单调性.

典例精讲

类型一 “主导”函数为一次函数型

本类型函数通过“一次求导”就可解决原函数的单调性.

例 1.1 已知函数$f(x)=ax-(a+1)\ln(x+1)$,其中$a\geqslant-1$,求函数$f(x)$的单调区间.

分析 对于含参函数单调性的求解,难点是如何对参数进行分类讨论和利用数形结合来判断导函数的正负.

解析 由已知得函数$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,且$f'(x)=a-\dfrac{a+1}{x+1}=\dfrac{ax-1}{x+1}(a\geqslant-1)$.

设$h(x)=ax-1(a\geqslant-1)$.

①当$a=0$时,$h(x)=-1<0$,$f'(x)<0$,函数$f(x)$在区间$(-1,+\infty)$上单调递减;

②当$-1\leqslant a<0$时,$h(x)=ax-1<0$,$f'(x)<0$,函数$f(x)$在区间$(-1,+\infty)$上单调递减;

③当$a>0$时,令$h(x)=ax-1=0$,$x=\dfrac{1}{a}$.

当x变化时,$f'(x)$和$f(x)$变化的情况如下表所示.

x	$\left(-1,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$h(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

故$f(x)$的单调递减区间为$\left(-1,\dfrac{1}{a}\right)$,单调递增区间为$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

综上所述,当$-1\leqslant a\leqslant0$时,函数$f(x)$的单调递减区间为$(-1,+\infty)$,无单调递增区间;当$a>0$时,$f(x)$的单调递减区间为$\left(-1,\dfrac{1}{a}\right)$,单调递增区间为$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

评注

“主导”函数为一次函数型,对参数进行分类讨论的重点为:

(1)最高项系数是否为零及此项系数的正负;

(2)“主导”函数根的判定$\begin{cases}k\cdot\varphi(x)\text{与}b\text{同号},h(x)\text{恒正或恒负(例 1.1 解析中②)}\\k\cdot\varphi(x)\text{与}b\text{异号},h(x)=0,\text{求根(例 1.1 解析中③)}\end{cases}$;

(3)分类讨论过程中级别的先后顺序.

变式 1 已知函数$f(x)=ax-\ln x$,$g(x)=e^{ax}+3x$,其中$a\in\mathbf{R}$.

(1) 求$f(x)$的极值;

(2)若存在区间 M,使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 M 上具有相同的单调性,求 a 的取值范围.

变式 2 设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$,若对所有的 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)\geqslant ax$ 成立.求实数 a 的取值范围.

类型二 "主导"函数为二次函数型

本类函数通过"一次求导"及比较主导函数零点的大小,就可解决原函数的单调性.

例 1.2 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\ln x$,求 $f(x)$ 的单调区间.

解析 函数的定义域为 $(0,+\infty)$,由题意可知 $f'(x)=\dfrac{2x^2-2x+a}{x}$.

令 $h(x)=2x^2-2x+a$,$\Delta=4(1-2a)$,则

(1)当 $\Delta=4(1-2a)\leqslant 0$,即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$h(x)=2x^2-2x+a\geqslant 0$,$f'(x)=\dfrac{2x^2-2x+a}{x}\geqslant 0$,可知函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

(2)当 $\Delta=4(1-2a)>0$,即 $a<\dfrac{1}{2}$ 时,令 $h(x)=2x^2-2x+a=0$,解得 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$,$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$.

①当 $\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2}>0$,即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时,得 $0<x_1<x_2$.

所以可知,当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 变化的情况如下表所示.

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$,单调递减区间为 (x_1,x_2).

②当$\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\leqslant 0$,即 $a\leqslant 0$ 时,得 $x_1\leqslant 0<x_2$.

所以可知,当 $0<x<x_2$ 时,$h(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数;当 $x\geqslant x_2$ 时,$h(x)\geqslant 0$,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$为增函数.

此时,函数$f(x)$的单调递增区间为$(x_2,+\infty)$,单调递减区间为$(0,x_2)$.

综上所述,当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时,函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$;

当$0<a<\frac{1}{2}$时,函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,x_1)$,$(x_2,+\infty)$,单调递减区间为(x_1,x_2);

当 $a\leqslant 0$ 时,函数$f(x)$的单调递增区间为$(x_2,+\infty)$,单调递减区间为$(0,x_2)$.

评注

当"主导"函数为二次函数时,确定原函数单调区间的问题转化为:探究该二次函数在给定区间上根的判定问题.对于此二次函数根的判定经研究有两种情况.

①若该二次函数不能因式分解,就要通过判别式来判断根的情况,然后再划分定义域;

②若该二次函数能因式分解,令该二次函数等于零,求根并比较大小,然后再划分定义域,判定导数的符号,从而求出原函数单调性.

变式1 设函数$f(x)=ax^2+bx+k(k>0)$在 $x=0$ 处取得极值,且曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线垂直于直线 $x+2y+1=0$.

(1)求 a,b 的值;

(2)若函数 $g(x)=\frac{e^x}{f(x)}$,讨论 $g(x)$的单调性.

变式2 设函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$,讨论函数 $f(x)$极值点的个数,并说明理由.

例 1.3 求函数$f(x)=(1-a)\ln x-x+\frac{ax^2}{2}$的单调区间.

分析 含参函数求单调区间，讨论的关键在于导函数的零点与区间端点的相对大小关系.

解析 由已知得函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，求导得

$$f'(x)=\frac{1-a}{x}-1+ax=\frac{(ax+a-1)(x-1)}{x}.$$

(1)当$a=0$时，$f'(x)=-\frac{x-1}{x}$.

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$.

所以$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)当$a\neq0$时，令$f'(x)=\frac{a\left(x-\frac{1-a}{a}\right)(x-1)}{x}=0$，得$x_1=1$，$x_2=\frac{1-a}{a}$$\left(\text{讨论的核心在于判断导函数的零点}\frac{1-a}{a}\text{与}0,1\text{的相对大小关系}\right)$.

①当$\frac{1-a}{a}>1$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，$f'(x)$，$f(x)$随x变化的情况如下表所示.

x	$(0,1)$	1	$\left(1,\frac{1-a}{a}\right)$	$\frac{1-a}{a}$	$\left(\frac{1-a}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数$f(x)$在区间$(0,1)$，$\left(\frac{1-a}{a},+\infty\right)$上单调递增，在区间$\left(1,\frac{1-a}{a}\right)$上单调递减.

②当$\frac{1-a}{a}=1$，即$a=\frac{1}{2}$时，$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{x}\geqslant0$，所以函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

③当$\frac{1-a}{a}\in(0,1)$，即$\frac{1}{2}<a<1$时，$f'(x)$，$f(x)$随x变化的情况如下表所示.

x	$\left(0,\frac{1-a}{a}\right)$	$\frac{1-a}{a}$	$\left(\frac{1-a}{a},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{1-a}{a}\right)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{1-a}{a},1\right)$上单调递减.

④当$\frac{1-a}{a}\leqslant0$，即$a\geqslant1$或$a<0$时.

(ⅰ)若 $a\geqslant 1$, $f'(x)$,$f(x)$随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(ⅱ)当 $a<0$ 时, $f'(x)$,$f(x)$随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增,在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$,单调递减区间为 $(1,+\infty)$;

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$ 和 $\left(\frac{1-a}{a},+\infty\right)$,单调递减区间为 $\left(1,\frac{1-a}{a}\right)$;

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$,无单调递减区间;

当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1-a}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$,单调递减区间为 $\left(\frac{1-a}{a},1\right)$;

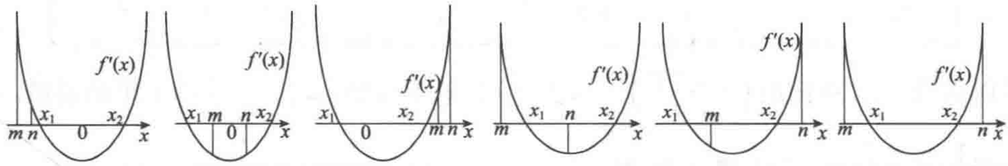
当 $a\geqslant 1$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$,单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

◆ 评注 ◆

"主导"函数为二次函数时,分类讨论总结如下:

①最高项系数 $\begin{cases} a=0 \\ a>0 \\ a<0 \end{cases}$ → $\begin{cases} \text{能因式分解:令 } f'(x)=0\Rightarrow x_1,x_2 \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1>x_2 \\ x_1<x_2 \end{cases} \\ \text{不能因式分解} \begin{cases} \Delta\leqslant 0 \\ \Delta>0,\text{令 } f'(x)=0\Rightarrow x_1,x_2 \end{cases} \end{cases}$ → 导函数的变号零点划分定义域

②定义域为$[m,n]$时,导函数的变号零点划分定义域的情况见下图:



变式 1 已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x, a\in\mathbf{R}$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

例 1.4 已知函数 $f(x)=x\cdot e^x-a\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解析 由题意得 $f'(x)=(x+1)\cdot(e^x-a)$.

(1)当 $-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，因为 $e^x-a>0$，令 $f'(x)=0$，即 $x+1=0$，得 $x=-1$，由此可得，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数.

(2)当 $-a<0$，即 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=\ln a$.

①当 $-1<\ln a$，即 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 随 x 变化的情况如表所示.

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

②当 $-1=\ln a$，即 $a=\frac{1}{e}$ 时，可得 $x\in\mathbf{R}$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

③当 $-1>\ln a$，即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(-\infty,x_2)$	x_2	(x_2,x_1)	x_1	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $x\in(-\infty,-1)$，单调递增区间为 $x\in(-1,+\infty)$；

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ln a)$，$(-1,+\infty)$，单调递减区间为 $(\ln a,-1)$；

当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\mathbf{R}$，无单调递减区间；

当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(\ln a,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,\ln a)$.

变式 1 已知函数 $f(x)=(x-a)\sin x+\cos x, x\in(0,\pi)$. 当 $a>\frac{\pi}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间.

类型三 “主导”函数需要二次求导型

前面两种类型讲解了利用“一次求导”就可解决原函数的单调性问题，当无法直接通过解不等式得到一阶导函数的符号时，可对“主导”函数再次求导，使解题思路清晰.“再构造、再求导”是破解函数综合问题的强大武器.

在此我们首先要清楚 $f''(x)$、$f'(x)$、$f(x)$ 之间的联系是如何用来判断原函数单调性的.

①二次求导目的：通过判定 $f''(x)$ 的符号，来判断 $f'(x)$ 的单调性；

②通过赋特殊值找到 $f'(x)$ 的零点，来判断 $f'(x)$ 的正负区间，进而得出 $f(x)$ 的单调性. 而 $f'(x)$ 的零点很多是可“遇”而不可“求”的，此时会出现不同的考法：

(ⅰ)利用零点存在性定理判定零点在所给区间上的位置.

一般可采取二分法，或分别比较最值、端点值、极值与零的大小估出零点的大概区间.

(ⅱ)极值点判定.

(ⅲ)双零点问题.

(ⅳ)隐零点问题.

……

下面我们结合具体例题来讲解如何利用二次求导探究函数的单调性.

例 1.5 讨论函数 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$ 的单调性.

解析 由 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$，可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

易得 $f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}-1=\ln x+\frac{1}{x}$，用 $f'(x)$ 去分析 $f(x)$ 的单调性受阻. 因此我们可以尝试再对 $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ 求导，得 $f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$.

令 $f''(x)=\frac{x-1}{x^2}=0$，得 $x=1$.

显然我们通过二次求导分析得出 $f'(x)$ 的单调性，再通过特殊值判定 $f'(x)$ 与零的大小，进而判断出原函数的单调性.

当 $0<x\leqslant1$ 时，$f''(x)\leqslant0$，即 $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上为减函数；

当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，即 $f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

因此 $f'(x)_{\min}=f'(1)=1>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

变式 1 （2016 北京理 18）设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$.

(1)求 a,b 的值；

(2)求 $f(x)$ 的单调区间.

配套训练(一)

1. 已知函数 $f(x)=a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-2\ln x(a\in\mathbf{R})$，求 $f(x)$ 的单调区间.

2. 设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{x-1}{x+1}$,其中 a 为常数,讨论 $f(x)$的单调性.

3. 已知函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-\left(\ln x+\frac{x-a}{x}\right)(a>-1)$,求 $g(x)$的单调区间.

4. 已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+bx$(其中 a,b 为常数且 $a\neq 0$)在 $x=1$ 处取得极值. 若 $f(x)$在$(0,e]$上的最大值为 1,求 a 的值.

5. 已知函数$f(x)=(ax^2-x)\ln x-\frac{1}{2}ax^2+x(a\in\mathbf{R})$，求函数$f(x)$的单调区间.

6. 设函数$g(x)=e^x-x^2+2ax-1(x>0)$，讨论$g(x)$的单调性.

第二讲 不等式的恒成立与存在性问题

本讲综述

不等式恒成立与存在性问题是历年高考的热点，特别是以导数为背景的题型更是在高考中频频出现.这类问题涉及的知识面广、综合性强、能力要求高.解决这类问题的关键是等价转化为求函数最值的问题，通过转化使恒成立与存在性问题得到简化.

第一节 单变量不等式的恒成立与存在性问题

知识导航

一 单变量型不等式的恒成立问题

1.在不等式恒成立条件下求参数范围的核心方法

在不等式恒成立条件下求参数的取值范围，一般原理是利用转化思想将其转化为函数的最值问题或值域问题加以求解.在转化途径上，可采用“分离参数法”或“不分离参数法”直接移项构造辅助函数的形式.

由函数最值的求法及极值的定义可知，函数在区间上的最大(最小)值点若不是区间端点就是极大(极小)值点.

对于是否分离自变量与参变量，取决于最值点在区间端点还是在极大(极小)值点.

(1)不分离参数法

若区间端点代入到不等式中，不等式的左右两边相等，一般不分离，即转化为直接求函数的最值(例如当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x-1-x-ax^2\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.将 $x=0$ 代入到函数$f(x)$中，得 $f(0)=0$，不等式的左右两边相等，因此不分离自变量与参变量，直接转化为$f(x)_{\min}\geqslant 0$).

(2)分离参数法

若区间端点代入到不等式中，不等式的左右两边不相等(或区间端点代入到不等式中导致函数无意义)，则需分离自变量与参变量，因此此种情形下，转化后的函数最值在极大(极小)值点处取得，而不是区间端点.分离自变量与参变量的作用在于有效避免对参数的讨论.