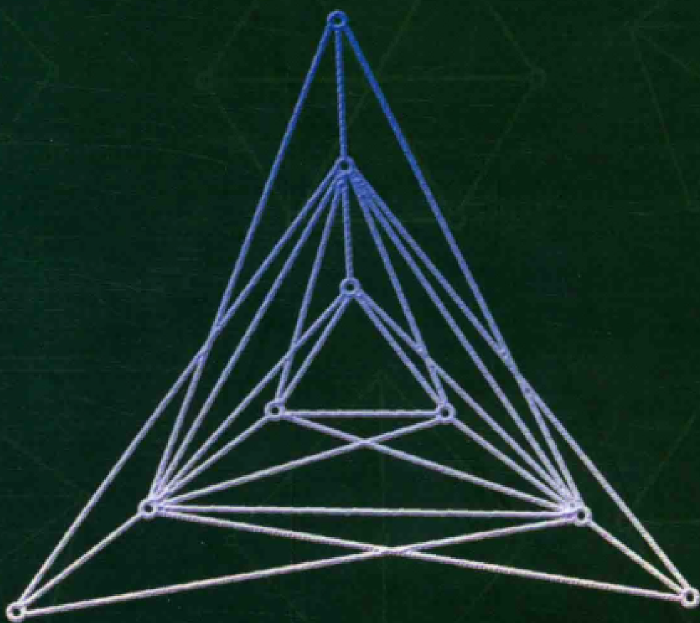
高等教育系列教材(公共课与文化基础课类)

离散数学

李少斌 编著



南海出版公司

高等教育系列教材(公共课与文化基础课类)

离散数学

李少斌　编著

南海出版公司

2002·海口

图书在版编目(CIP)数据
离散数学/李少斌编著．一海口：南海出版公司，
2002.8
高等教育系列教材(公共课与文化基础课类)
ISBN 7-5442-2269-1
Ⅰ.离… Ⅱ.李… Ⅲ.离散数学 Ⅳ.0158
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 063146 号

LISANSHUXUE
离散数学

编　　著　李少斌
责任编辑　张　辉
装帧设计　时　代
出版发行　南海出版公司　电话 (0898)65350227
社　　址　海口市蓝天路友利园大厦 B 座 3 楼　邮编　570203
经　　销　新华书店
印　　刷　北京昌平前进印刷厂
开　　本　787×960　1/16
印　　张　20
字　　数　380 千
版　　次　2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数　1—5000 册
书　　号　ISBN 7-5442-2269-1/O·4
定　　价　23.50 元

前言

作为一门数学综合学科，离散数学汇集了有关数学分支的许多知识。理解和掌握这些知识，对数学专业的学生及与数学相近专业的学生无疑是十分必要的。它不仅对培育自己的数学功底有益，而且能使学生站在一个较高的层面上，更加深刻地理解初等数学乃至高等数学，从而在数学王国内获得更多的自由。同时随着计算机科学的发展，重点研究有限系统的离散数学已经愈加显现其重要性。因为数字计算机本质上是一个有限结构，它的许多性质都可以在有限数学系统的框架下得到解决。因此对于计算机专业的学生，离散数学这门课程也是很重要的。

本书前3章讨论了集合、关系和函数，介绍了一些典型关系和特殊函数。第4、5、6章在引入抽象代数系统及其一般性质的基础上，着重介绍了群、环、域及格与布尔代数等几种重要的代数系统。第7、8章是数理逻辑的内容，包括命题逻辑和谓词逻辑。第9章引入了图论的基本概念，展开了几种典型图的讨论，介绍了树及其应用。当然从“离散”的词义上来理解，离散数学还远远不止上述内容，例如作为离散随机变量的概率论、线性代数中的矩阵论等，都可以作为离散数学。然而作为目前大家普遍认可的离散数学，本书已经容纳了离散数学的基本内容。

关于数学，德国著名数学家希尔伯特(Hilbert)曾经有过经典的论述，他认为，“对数学理论所坚持的清晰性和易懂性，应作为对一个堪称完美的数学问题的要求，因为清楚的易于理解的问题吸引着人们的兴趣，而复杂的问题使人望而却步”。他并且引用一位法国数学家的话说：“要使一种数学理论变得这样清晰，以致使你能向在大街上遇到的每一个人解释它。在此之前，这一数学理论不能认为是完善的。”(《数学史译文集》，上海：上海科技出版社，第60页)这正是数学作为一种文化所要体现的基本精神。本书在编写中力求体现这种精神，在保持

必要的系统完整和理论严谨性的同时，力求叙述深入浅出；对数学定义的引入尽可能简单明了，有关定理的证明尽可能清晰而便于理解，配套实例的作用全部在于加深对理论的理解与对实际应用的掌握。目前我国教学理论中倡导的变教为导，变以教师为中心为以学生为中心，其实质是提高学生的自学能力。本书所有习题在书末都提供了标准答案或参考解答，目的就是为了便于自学。

当然，上述努力可能不尽人意，限于编者水平，书中缺点与错误之处在所难免，敬请广大读者和有关专家不吝批评指正，以便不断修订完善。

最后需要说明的是，任何个人的努力都离不开其他同志的帮助和支持，在此我要对所有提供这种帮助和支持的有关同志致以诚挚的感谢！

李少斌

2002年8月

目录

第1章 集 合 …… (1)
§1.1 集合的概念 …… (1)
§1.2 集合的运算 …… (6)
§1.3 集合运算的性质 …… (12)
第2章 关 系 …… (17)
§2.1 笛卡尔积 …… (17)
§2.2 关 系 …… (20)
§2.3 逆关系与复合关系 …… (25)
§2.4 典型关系 …… (31)
§2.5 关系的闭包 …… (37)
§2.6 等价关系 …… (42)
§2.7 偏序关系 …… (48)
第3章 函 数 …… (56)
§3.1 函数的概念与性质 …… (56)
§3.2 几种典型函数 …… (62)
§3.3 反函数 …… (67)
§3.4 置 换 …… (72)
第4章 代数系统 …… (80)
§4.1 运 算 …… (80)
§4.2 代数结构 …… (86)
§4.3 同态与同构 …… (90)
§4.4 商代数与积代数 …… (96)
第5章 群与环 …… (101)
§5.1 群的概念与性质 …… (101)
§5.2 子群及其陪集 …… (107)
§5.3 拉格朗日定理 …… (113)

§5.4 商群 同态定理 …………………………………………………… (115)
§5.5 环与域 …………………………………………………………………… (121)
第6章 格与布尔代数…………………………………………………………… (127)
§6.1 格 ………………………………………………………………………… (127)
§6.2 有余格与分配格 ………………………………………………………… (134)
§6.3 布尔代数 ………………………………………………………………… (140)
§6.4 有限布尔代数的同构 …………………………………………………… (146)
第7章 命题逻辑……………………………………………………………… (151)
§7.1 命题与联结词 …………………………………………………………… (151)
§7.2 命题公式 ………………………………………………………………… (159)
§7.3 命题演算 ………………………………………………………………… (162)
§7.4 命题公式的范式与判定 ………………………………………………… (174)
§7.5 命题演算的推理理论与方法 …………………………………………… (185)
第8章 谓词逻辑……………………………………………………………… (194)
§8.1 谓词演算 ………………………………………………………………… (195)
§8.2 谓词演算的永真公式 …………………………………………………… (203)
§8.3 谓词演算的推理 ………………………………………………………… (212)
第9章 图 论……………………………………………………………… (218)
§9.1 图的基本概念 …………………………………………………………… (218)
§9.2 图的矩阵表示 …………………………………………………………… (227)
§9.3 欧拉图与哈密顿图 ……………………………………………………… (233)
§9.4 平面图与2分图 ………………………………………………………… (243)
§9.5 最短路径与关键路径问题 ……………………………………………… (253)
§9.6 无向树与生成树 ………………………………………………………… (263)
§9.7 根 树 ………………………………………………………………… (269)
附录 习题参考答案或提示…………………………………………………… (277)
主要参考文献…………………………………………………………………… (313)

第1章 集 合

集合的概念是数学中最基本的概念之一，是近、现代数学惟一的重要基础，而且已经深入到各种科学技术领域，例如在程序设计语言、数据结构、开关理论、有限状态机，都卓有成效地利用了集合论.

集合论的创始人是德国数学家康托(*Cantor*).

本章主要介绍集合论的基本概念和结论，即介绍集合及其表示方法，集合的各种运算及其性质等内容.

§1.1 集合的概念

集合是数学中一个最基本的概念，虽然是很难精确定义的，但也不难理解和掌握.

一般来说，把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来研究时，这个整体便称为一个**集合**. 而组成这个集合的个别事物，称为集合的**元素**.

例如，一个班级里的全体学生可以组成一个集合；全部拉丁字母可以组成一个集合；全体实数组成实数集合；平面上所有的点可以组成一个点的集合等. 而上述集合中的元素分别为班级里的每一位学生、每一个拉丁字母、任一实数、平面上任意一点等.

通常用大写英文字母 A、B、C 等表示集合的名称，用小写英文字母 a,b,c 等表示集合的元素.

若元素 a 属于集合 A，记作 $a \in A$，若元素 a 不属于集合 A，则记作 $a \notin A$.

一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称为**有限集**，否则称为**无限集**. 有限集合 A 中所含元素的数目称为集合 A 的**元数**或**基数**，记作 $|A|$.

集合的表示方法有列举法和描述法.

列举法是列出集合的所有元素，并用花括号括起来. 例如

$$A = \{a,b,c,d\}$$

$$N = \{0,1,2,3,\cdots\}$$

表示集合 A 有 4 个元素 a,b,c,d；集合 N 的元素是 $0,1,2,3,\cdots$. 在集合 N 表示式中使用了省略符号，表示 N 中有无限多个元素. 有限集合中也可以使用省略号. 例如

$$\{a,b,c,\cdots,z\}$$

表示由 26 个英文字母组成的集合.

描述法是将集合中元素的共同属性描述出来.例如

$$B=\{x \mid x^2-1=0, x\text{是实数}\}$$

表示由方程 $x^2-1=0$ 的实数解组成的集合.

$$\mathbf{N}_+=\{x \mid x\text{是正整数}\}$$

表示由正整数 1,2,3… 组成的集合.

许多集合可以用两种方法来表示,例如上述的集合 B 和 N_+ 可以分别写作 $B=\{-1,1\}$ 和 $N_+=\{1,2,3\cdots\}$,但是有些集合就只能用一种方法表示,例如实数集合 R 就不能用列举法表示,因为实数是不胜枚举的.

常见的几个集合用特定的符号表示为:

自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,\}$;

整数集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

有理数集合 $\mathbf{Q}=\{x \mid x\text{是有理数}\}$

实数集合 $\mathbf{R}=\{x \mid x\text{是实数}\}$

复数集合 $\mathbf{C}=\{x \mid x=a+bi, a,b\in\mathbf{R}, i=\sqrt{-1}\}$.

集合中的元素是可以相互区分开的,即在一个集合中不能重复出现相同的元素.例如 $\{a,b,b,c,d,d,d,d\}$ 应记作 $\{a,b,c,d\}$.

集合中的各个元素在该集合中是无序的,可以任意列出.例如

$$\{1,2,3\} \quad \{2,3,1\} \quad \{3,1,2\}$$

是同一集合的 3 种列举法.习惯上,顺序表示为 $\{1,2,3\}$.

集合的元素可以是任何事物,也可以是另外的集合.例如

$$T=\{6,\{7\},\{8,\{9\}\}\}$$

其中,$6\in T$,$\{7\}\in T$,$\{8,\{9\}\}\in T$,但是 $8\notin T$,$\{9\}\notin T$,只有 $8\in\{8,\{9\}\}$,$\{9\}\in\{8,\{9\}\}$,或 $9\in\{9\}$,对于以集合为元素的集合,应注意集合的层次.

除了上述 2 种表示集合的方法外,还可以用一种称之为**文氏**(*Vtnn*)图的方法来直观地表示集合.**文氏图**是一张表示集合的图形,在其中集合被表示为平面上的闭区域,闭区域内的点表示集合的元素,如图 1－1 所示.

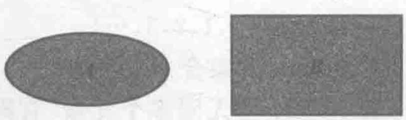


图 1－1 集合 A、B

实数之间有 $=$、$\leqslant$、$<$、$\geqslant$、$>$ 等关系，类似地，可以定义集合之间的关系 $=$、$\subseteq$、$\subset$、$\supseteq$、$\supset$.

定义1　设有集合 A 和 B，如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素（即若 $a \in A$，必有 $a \in B$），则称 A 是 B 的**子集**，或者说 A 包含于 B（或称 B 包含 A），两个集合的这种关系称为**包含关系**，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 反之，若 A 不是 B 的子集，则记作 $A \nsubseteq B$ 或 $B \nsupseteq A$.

例1　设 $A = \{1,2,3,4,5\}$，　$B = \{2,3\}$，　$C = \{1,2,3,-4\}$，则 $B \subseteq A$，但 $C \nsubseteq A$

显然自然数集合 $\mathbf{N}$，有理数集合 $\mathbf{Q}$ 和实数集合 $\mathbf{R}$ 之间有关系 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$，但 $\mathbf{R} \nsubseteq \mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{N}$

定义2　设 A 和 B 是两个集合，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与 B **相等**，记作 $A = B$.

集合 A 与 B 相等，即意味着 A 与 B 具有完全相同的元素. 若 A 与 B 不相等，记作 $A \neq B$.

显然，两个集合相等的充分必要条件是它们互为子集，即

$$A = B \text{ 当且仅当 } A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A$$

定义3　对任意两个集合 A 和 B，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如图 1－2 所示.

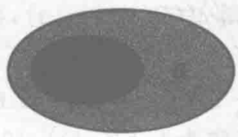


图 1－2　真子集

定义 3 也可以写成

$$A \subset B \text{ 当且仅当 } A \subseteq B \text{ 且 } A \neq B.$$

例 1 中的集合 B 是 A 的真子集，即 $B \subset A$. 自然数集合 $\mathbf{N}$ 是有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的真子集，有理数集合 $\mathbf{Q}$ 是实数集合 $\mathbf{R}$ 的真子集，它们之间有关系 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

注意从属关系与包含关系的区别. 从属关系“$\in$”或“$\notin$”是指集合中的元素与集合的关系，而包含关系“$\subseteq$”或“$\nsubseteq$”是指集合与集合之间的关系. 例如集合 $A = \{1,2,3\}$，则有 $3 \in A$，而 $\{3\} \subseteq A$.

例2　设 $A = \{a,b,c,d\}$，$B = \{a,b,x,y\}$，$C = \{a,c\}$，则有 $C \subseteq A$，但是 $C \nsubseteq B$.

例3　设 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{1,2\}$，$C = \{1,3\}$，$D = \{2\}$，则有 $B \subseteq A$，$C \subseteq A$，$D \subseteq A$，$D \subseteq B$.

根据子集的定义,包含关系具有如下一些重要性质:

(1) **自反性**:对于任意集合 A,有 $A \subseteq A$;

(2) **反对称性**:对于任意的集合 A 与 B,若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则 $A = B$;

(3) **传递性**:对于任意集合 A、B、C,若 $A \subseteq B$,$B \subseteq C$,则有 $A \subseteq C$.

定义 4 不含有任何元素的集合称为**空集**,记作 ϕ. 例如,$\{x \mid x^2 + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 是空集. 但是要注意,$\phi \neq \{\phi\}$,而是 $\phi \in \{\phi\}$,因为 $\{\phi\}$ 不是空集,表示集合中有惟一元素 ϕ.

容易证明,空集是任一集合的子集,而且空集是惟一的.

定义 5 在一个具体问题中,如果所涉及的集合都是某个集合的子集,则称这个集合为**全集**,记作 E.

全集是一个相对性概念. 由于研究的问题不同,所取的全集也不同,而且并非是惟一的,一般总是取一个比较方便的集合作为全集. 例如,我们在整数范围内研究问题时,既可以取整数集 $\mathbf{Z}$ 作为全集 E,也可以取有理数集 $\mathbf{Q}$ 或实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集,然而取 $\mathbf{Z}$ 为全集要比 $\mathbf{Q}$ 或 $\mathbf{R}$ 为全集更方便一些.

以后在讨论中所涉及的每个集合都可以看作是全集 E 的子集.

定义 6 设 A 是一个集合,由 A 的所有子集组成的集合,称为集合 A 的**幂集**,记作 $\rho(A)$ 或 2^A.

例 4 设 $A = \{a\}$,则 $\rho(A) = \{\phi, \{a\}\}$;设 $B = \{a, b\}$,则 $\rho(B) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;设 $C = \{a, b, c\}$,则 $\rho(C) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$,而 $\rho(\phi) = \{\phi\}$.

例 5 设 $A = \{x \mid x(x-1)(x-2) = 0, x \in \mathbf{R}\}$,求 A 的幂集.

解 $A = \{0, 1, 2\}$,A 的子集为 ϕ,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0, 1\}$,$\{0, 2\}$,$\{1, 2\}$,$\{0, 1, 2\}$;故

$$\rho(A) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

定理 1 如果有限集合 A 的元数为 n,即 $|A| = n$,则其幂集 $\rho(A)$ 的元数为 2^n,即 $|\rho(A)| = 2^n$.

证明 A 的所有由 m 个元素组成的子集的个数为从 n 个元素中取 m 个元素的组合数 C_n^m,$(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$.

另外,因为 $\phi \subseteq A$,所以 $\rho(A)$ 的元数 N 可以表示为

$$N = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^m \cdots + C_n^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$$

由 2 项式定理可知:

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^n y^n.$$

令 $x = y = 1$,便有

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$$

故　$\rho(A)$ 的元数是 2^n.

对任意集合 A,有 $\phi \subseteq A$ 和 $A \subseteq A$,因此有 $\phi \in \rho(A)$ 和 $A \in \rho(A)$.

例 6　设 A 和 B 是两个集合,试证明 $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$.

证明　**必要性:**设 $A \subseteq B$,任取 $x \in \rho(A)$,则 x 是 A 的子集,所以 $x \subseteq A$,因为 $A \subseteq B$,有 $x \subseteq B$,即 x 是 B 的子集,从而 $x \in \rho(B)$,因此,$\rho(A) \subseteq \rho(B)$.

充分性:设 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$,任取 $x \in A$,则$\{x\} \in \rho(A)$,由 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$ 可得 $\{x\} \in \rho(B)$,因为 $x \in B$ 当且仅当$\{x\} \in \rho(B)$,从而 $x \in B$,因此,$A \subseteq B$.

习题 1.1

1. 用列举法表示下列集合:

(1) 小于 20 的正偶数集合;

(2) $\{x \mid x$ 是正整数,$x^2 < 50\}$;

(3) $\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$;

(4) 满足 $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$,且 $x, y \in \mathbf{Z}$ 的点 (x,y) 的集合.

2. 用描述法表示下列集合:

(1) $\{1,3,5,7,\cdots,99\}$;

(2) $\{5,10,15,\cdots,100\}$;

(3) $\{1,4,9,16,25\}$;

(4) 直角坐标系中单位圆内部的点集.

3. 判定下列各题的正误:

(1) $\phi \subseteq \phi$;

(2) $\phi \subset \phi$;

(3) $\phi \subseteq \{\phi\}$;

(4) $\phi \in \{\phi\}$;

(5) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$;

(6) $\{a,b\} \in \{c,b,\{\{a,b,\}\}\}$.

4. 设 A,B,C 是集合,确定下列命题是否正确,并说明理由:

(1) 若 $A \in B$ 及 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;

(2) 若 $A \in B$ 及 $B \subseteq C$,则 $A \in C$;

(3) 若 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$,则 $A \in C$;

(4) 若 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$,则 $A\subseteq C$.

5. 求下列集合的幂集：

(1) $\{a,b,c,d\}$；

(2) $\{a,b,\{a,b\}\}$；

(3) $\{\phi,a,\{a\}\}$；

(4) $\{\phi,\{\phi\}\}$.

§1.2 集合的运算

两个实数进行加、减、乘、除运算可以得到一个新的实数.类似的,两个集合 A 和 B 之间可以进行并、交、差、补运算,通过这些运算得到新的集合.因此集合的运算是由已知集合构造新集合的一种方法.

定义 1 设 A 和 B 是两个任意集合,所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

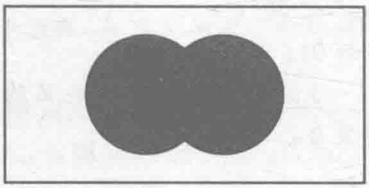


图 1－3 阴影为 $A\cup B$

例 1 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,c,d,e\}$,则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$.

例 2 设 $A=\{x\mid -2<x<3,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$.

例 3 设 $A\subseteq B$,$C\subseteq D$,试证明 $A\cup C\subseteq B\cup D$.

证明 对于任意 $x\in A\cup C$,则有 $x\in A$ 或 $x\in C$.若 $x\in A$,由 $A\subseteq B$,则 $x\in B$;若 $x\in C$,由 $C\subseteq D$,则 $x\in D$,故 $x\in B\cup D$,因此,$A\cup C\subseteq B\cup D$.

例 4 对于任意集合 A,B,试证明

$$\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$$

证明 任取 $x\in\rho(A)\cup\rho(B)$,于是 $x\in\rho(A)$ 或者 $x\in\rho(B)$.若 $x\in\rho(A)$,则 x 是 A 的子集,于是 x 是 $A\cup B$ 的子集,所以 $x\in\rho(A\cup B)$.若 $x\in\rho(B)$,同理可证 $x\in\rho(A\cup B)$,故 $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$.

定义 2 设 A 和 B 是两个任意集合,属于 A 同时又属于 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$. 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

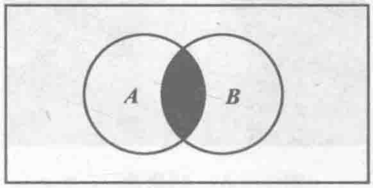


图 1－4　阴影为 $A \cap B$

例 5　设全集 $E = \mathbf{N}$，A 为素数集，B 为 $\mathbf{N}$ 中所有奇数组成的集合，则

$A \cup B$ 由所有正奇数和 2 组成；

$A \cap B$ 由除 2 以外的所有素数组成.

如果集合 A 与 B 没有公共元素，即 $A \cap B = \phi$，则称 A 与 B 是**不相交的**.

例 6　设 $A_1 = \{\{1,2\},\{3\}\}$，$A_2 = \{\{1\},\{2,3\}\}$，$A_3 = \{\{1,2,3\}\}$，则 $A_1 \cap A_2 = \phi$，$A_1 \cap A_3 = \phi$，$A_2 \cap A_3 = \phi$，所以集合 A_1，A_2 和 A_3 是两两互不相交的.

由上述定义，显然可以得到以下关系式：

$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

如果 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B$，$A \cap B = A$

定义 3　设 A 和 B 是两个任意集合，属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A - B$. 即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

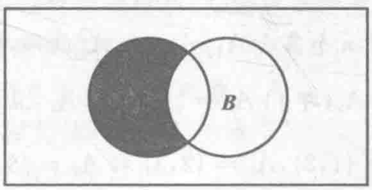


图 1－5　阴影为 $A - B$

例 7　设 $A = \{x \mid -1 \leqslant x < 2, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid 0 < x \leqslant 3, x \in \mathbf{R}\}$

则　$A - B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 0, x \in \mathbf{R}\}$

$B - A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbf{R}\}$

定义 4　设有全集 E，集合 $A \subseteq E$，由 E 中所有不属于 A 的元素组成的集合称为 A 的**补集**，记作 $\sim A$. 即

$$\sim A = \{x \mid x \in E \text{ 且 } x \notin A\}$$

由定义 3、定义 4 可以得到差集的一个重要等式：$A - B = A \cap \sim B$

证明　对于任意的 x，若 $x \in A - B$，即 $x \in A$ 且 $x \notin B$，从而 $x \in A$ 且 $x \in \sim B$，有 $x \in A \cap \sim B$，故 $A - B \subseteq A \cap \sim B$.

反之，若 $x \in A \cap \sim B$，即 $x \in A$ 且 $x \in \sim B$，从而 $x \in A$ 且 $x \notin B$，有 $x \in$

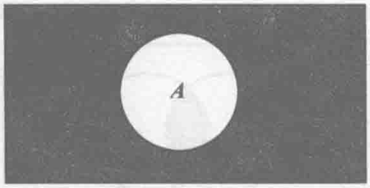


图 1－6 阴影为 $\sim A$

$A-B$,故 $A\cap\sim B\subseteq A-B$,因此,$A-B=A\cap\sim B$.

在以后关于集合恒等式的证明中要经常用到这个结果,常常是用 $A\cap\sim B$ 代换 $A-B$ 进行应用.

例 8 设 $A=\{2,5,6\}$,$B=\{3,4,2\}$,则 $B-A=\{3,4\}$,$A-B=\{5,6\}$.

例 9 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid 0<x<3,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A-B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$,$B-A=\{x\mid 1<x<3,x\in\mathbf{R}\}$.

例 10 设 $A=\{a,b,c\}$,$E=\{a,b,c,d,e,f\}$,则 $\sim A=\{d,e,f\}$,

例 11 设 $A=\{x\mid x\geqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$,$\mathrm{E}=\mathbf{R}$,则 $\sim A=\{x\mid x<5,x\in\mathbf{R}\}$.

集合的并集与交集的运算可以推广到任意多个集合的情形.

定义 5 由 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 所有元素组成的集合,称为这 n 个集合的**并集**,记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_1\text{ 或 }x\in A_2,\cdots,\text{或 }x\in A_n\}.$$

定义 6 由同时属于 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的所有元素组成的集合称为这 n 个集合的**交集**,记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_1,\text{且 }x\in A_2,\cdots,\text{且 }x\in A_n\}$.

例 12 设集合 $A_1=\{1,2\}$,$A_2=\{2,3\}$ 和 $A_3=\{1,2,3,6\}$,试求 $\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i$ 和 $\bigcap\limits_{i=1}^{3}A_i$.

解 应有 $\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i=\{1,2,3,6\}$,$\bigcap\limits_{i=1}^{3}A_i=\{2\}$.

定义 7 设 A 和 B 是任意两个集合,集合 $(A-B)\cup(B-A)$ 称为集合 A 和 B 的**对称差**,记作 $A\oplus B$,即

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

对称差 $A\oplus B$ 的文氏图表示如图 1－7 所示.

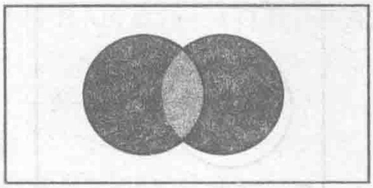


图 1－7 阴影为 $A\oplus B$

例 13 设 $A=\{x\mid x<-2,x\in\mathbf{R}\},E=\{x\mid x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，求 $\sim A, A\oplus A$.

解 $\sim A=E-A=\{x\mid x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}-\{x\mid x<-2,x\in\mathbf{R}\}$

$=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$

$\because A-A=\{x\mid x<-2,x\in\mathbf{R}\}-\{x\mid x<-2,x\in\mathbf{R}\}=\phi$

$\therefore A\oplus A=(A-A)\cup(A-A)=\phi$

上述5种运算中，并集 $A\cup B$ 中的元素是 A 和 B 中所有的元素，公共元素只能出现一次. 交集 $A\cap B$ 中的元素是 A 和 B 中所有的公共元素. 差集 $A-B$ 中的元素是在 A 中但不在 B 中的那些元素. 补集 $\sim A$ 中的元素是在全集中但不在 A 中的那些元素. 对称集 $A\oplus B$ 中的元素是由 $A-B$ 的元素和 $B-A$ 的元素组成的.

集合的运算和文氏图，还可以应用到有限集合的计数问题上，文氏图既可以验证公式计算的结果，也可以直接得出结论. 为此先给出以下定理.

定理 1 设 A 与 B 是两个有限集合，则 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ 其中 $|A|$、$|B|$ 分别表示 A、B 的元数.

证明 当 A 与 B 不相交，即 $A\cap B=\phi$，

则 $|A\cup B|=|A|+|B|$

若 $A\cap B\neq\phi$，公共元素个数是 $|A\cap B|$，计算 $|A\cup B|$ 时，每个元素只计算一次，而计算 $|A|+|B|$ 时，公共元素计算了两次，因此有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

此定理被称作**包含排斥定理**.

例 14 求从 1 到 300 的整数中能被 5 或 7 整除的数的个数.

解 设 P 表示从 1 到 300 的整数中能被 5 整除的数的集合.
S 表示从 1 到 300 的整数中能被 7 整除的数的集合.

$$|P|=60,\ |S|=42,\ |P\cap S|=8$$

$$|P\cup S|=|P|+|S|-|P\cap S|$$
$$=60+42-8=94$$

用文氏图表示，如图 1－8 所示.

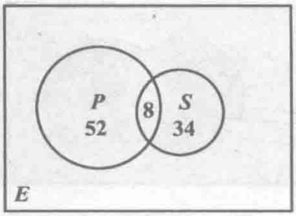


图 1－8

对于任意 3 个集合 A,B,C,推广定理 1 的结果为:

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

证明从略,可以通过图 1－9 得到验证.

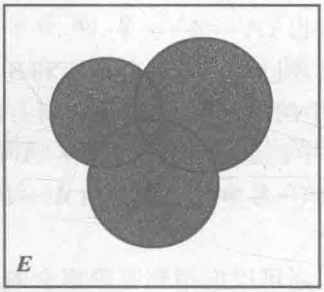


图 1－9

例 15　在对 60 个人进行的一项调查中,得到下列结果:

25 人阅读《读者》杂志

26 人阅读《半月谈》杂志

26 人阅读《知音》杂志

9 人阅读《读者》和《知音》两种杂志

11 人阅读《读者》和《半月谈》两种杂志

8 人阅读《半月谈》和《知音》两种杂志

3 人阅读上述 3 种所有的杂志

求:(1) 至少阅读一种杂志的人数;

(2) 只阅读一种杂志的人数.

解　(1) 设 A,B,C 分别表示阅读《读者》、《半月谈》和《知音》杂志的人的集合,则

$|A|=25,\ |B|=26,\ |C|=26$

$|A\cap C|=9,\ |A\cap B|=26$

$|B\cap C|=8,\ |A\cap B\cap C|=3$