2018年李正元·范培华考研数学

数学

最后冲刺超越135分

数学二

主　编　北　京　大　学　李正元
北　京　大　学　尤承业

中国政法大学出版社

2017·北京

前　言

（一）

《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》是《**考研数学复习全书**》、《**考研数学历年试题解析**》及《**考研数学全真模拟经典 400 题**》的姊妹篇。已先期出版的《**考研数学复习全书**》为考生第一阶段复习用书，主要使考生全面、系统地掌握考纲所要求的基本概念、基本定理、基本公式和基本方法；《**考研数学全真模拟经典 400 题**》为考生第二阶段训练用书，主要使考生更好地提高数学水平，检查第一阶段对数学基本概念、公式、定理及运算法则的复习效果，查漏补缺，积累临场经验。而对 2018 年考研数学的命题预测、常考题型的解题思路与方法的归纳总结、网络化的知识体系的梳理，则是本书即《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》的宗旨和使命，也是本书的价值所在。

（二）

从历年考研数学试题可以看出，数学科考试注重能力的考查，试题提高了对解决问题的能力的要求，增加思考量，控制计算量，要求考生抓住问题的实质，对试题提供的信息进行分拣、组合、加工，寻找解决问题的方法。因此命题者在命制试题时，**①尽量避免刻板、繁难和偏怪的试题，避免死记硬背的内容和繁琐的计算；②设计不同解题思想层次的试题，使善于知识迁移和运用思维模块简缩思维的考生能用敏捷的思维赢得时间，体现其创造能力的水平**。这样的试题，难有现成的方法和套路可以套用，思维水平要求高，不强调解题技巧，思维容量大，运算量较小，完成这样的试题需要有能力的培养，依靠“题海”战术是难以奏效的；**③很重视知识的整体性和综合性，在知识网络的交汇点上设计试题**，目的是倡导考生对所学内容能够融会贯通，理论联系实际，防止单纯机械记忆。值得注意的是，在强调选拔、强调能力考查的同时，切忌放松基础知识的复习，要知道考查考生对基础知识的掌握程度，是数学考试的重要目标之一。

从历年阅卷情况来看，相当多的考生主要存在以下问题：**①对考试大纲中规定的基础知识、基本理论的掌握还存在某些欠缺，甚至有所偏废；②对所学知识的掌握缺乏整体性、条理性**。

编者认为，考生在冲刺复习阶段很有必要仔细阅读这本《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》。因为本书中所设计的试题和所要解决的问题是有针对性的，它或许能给考生带来意外的惊喜！

（三）

本书集中了**北京大学李正元、北京大学刘西垣、北京大学范培华、北京大学尤承业、中国人民大学袁荫棠**等老师的考研辅导体会，是集体智慧的结晶。

编写本书是一项新的尝试，需要在认真听取同行和读者意见的基础上不断加以改进和完善，欢迎广大同行和读者提出宝贵的意见。

最后预祝考生考研成功！

编者

2017 年 9 月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第一部分　高等数学

专题1　求极限及极限式中的参数

【解题思路】　(1) 计算极限一般按下面程序分析：首先看是否是未定式？(未定式共有七种："$\frac{0}{0}$"型，"$\frac{\infty}{\infty}$"型，"$0\cdot\infty$"型，"$\infty-\infty$"型，"1^{∞}"型，"0^{0}"型，"∞^{0}"型) 若非未定式，则先考虑极限四则运算法则的条件是否满足？若满足，则用极限四则运算法则算出；若不满足，则考虑有界量乘无穷小还是无穷小，或无穷小与无穷大的关系．若是未定式，优先考虑洛必达法则，其次是（特别是洛必达法则失效时）恒等变形消除未定式．变形方法通常是：

对"$\frac{0}{0}$"型，一般是消去分子与分母中的"零"因子，如分解因式，分子分母同乘共轭数，或利用已知极限等．

对"$\frac{\infty}{\infty}$"型，一般是用分子、分母中趋于无穷大最快的项同除分子与分母．

对"$0\cdot\infty$"型，一般将其中一个因子取作分子，另一个因子取倒数后作为分母，化成"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型再处理，并且一般将复杂的因子取作分子，特别地含有对数因子时，将该因子取作分子，有时也利用某些已知极限．

对"$\infty-\infty$"型，通常是通分求和（代数和），或利用共轭关系，化成"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型．有时也利用某些已知极限．

对 1^{∞}，0^{0} 或 ∞^{0} 型未定式的极限 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$ 总可转化为求 $\lim g(x)\ln f(x)$．

对"1^{∞}"型，通常利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 消除未定式．

对"0^{0}"型，若 $\lim\frac{g(x)}{f(x)}=l$，可借助基本极限 $\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{x}=1$ 消除未定式．

对"∞^{0}"型，若 $\lim f(x)g(x)=l$，可借助基本极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$ 消除未定式．

(2) 洛必达法则是求"$\frac{0}{0}$"型和"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的重要工具．但在用洛必达法则解题时，为了避免复杂的计算，提高效率，减少错误，应尽可能综合运用以下方法：

1°　函数的连续性与极限四则运算法则；

2°　适当的恒等变形（如：分子或分母的有理化，三角恒等式，等）；

3°　利用已知极限和等价无穷小因子代换；

4°　利用换元法（即复合函数求极限法则）．

(3) 考生要熟悉当 $x\to0$ 时最重要的几个等价无穷小量：$\sin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^{x}-1\sim x$ 与 $1-\cos x\sim\frac{x^{2}}{2}$．在用洛必达法则求"$\frac{0}{0}$"型未定式的极限时用它们来替换分子或分母中相应的无穷小量因子，常可简化计算过程．

【例 1.1】 求下列极限：

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}$； (Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

【解】 (Ⅰ) 本题是求“$\dfrac{0}{0}$”型未定式的极限，可先用等价无穷小因子替换：$\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2$，然后利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{-\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-x}=-\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)=-1,$$

(Ⅱ) 本题也是求“$\dfrac{0}{0}$”型未定式的极限. 从分子和分母的表达式不难发现，若直接利用洛必达法则会碰到复杂的计算. 为简化计算过程，应当在分子和分母中分别利用等价无穷小因子代换.

当 $x\to 0$ 时，有 $e^x-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)$.

又因 $e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x$， $\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}=1$，于是，分子可用 $x-\sin x$ 代换.

当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x(1-\cos x)}$ 是无穷小量，于是分母可作等价无穷小因子代换，即

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}x(1-\cos x)\sim\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{4},$$

于是 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\frac{x^3}{4}}=4\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

评注 在本题的求解中用到了等价无穷小量的传递性质：若 α,β,γ 是同一极限过程的无穷小量，且 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$. 从而当 $x\to 0$ 时

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}x(1-\cos x)\sim\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{4}.$$

【例 1.2】 求下列极限：

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{ex^{1+x}}{(1+x)^x}-x\right]$； (Ⅱ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$，其中常数 $a\neq 0$.

【解】 (Ⅰ) 所求极限是“$\infty-\infty$”型未定式，但现在无法经过通分化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式，这时可从括号内提出无穷大因子 x，先化为“$0\cdot\infty$”型的未定式，最后再通过换元 $y=\dfrac{1}{x}$ 化为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式求极限.

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{ex^x}{(1+x)^x}-1\right]=\lim_{y\to 0^+}\frac{\dfrac{e}{(1+y)^{\frac{1}{y}}}-1}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{1-\frac{\ln(1+y)}{y}}-1}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\dfrac{\ln(1+y)}{y}}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+y}}{y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1+y}=\frac{1}{2}.$$

(Ⅱ) 所求极限也是“$\infty-\infty$”型未定式，首先应通过变形化为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式后，再用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[x\left(\frac{a}{x}+1\right)\right]^{1+\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\right\}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{a}{x} + 1 \right)^{\frac{1}{x}+1} - x \cdot x^{\frac{1}{x+a}} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{a}{x} + 1 \right)^{\frac{1}{x}+1} - x^{\frac{1}{x} - \frac{a}{x(x+a)}} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \to +\infty} x \left[\left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{x}+1} - \frac{1}{x^{\frac{a}{x(x+a)}}} \right].$$

令$\frac{1}{x} = t$,由 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{t \to 0+} t^t = 1$ 以及洛必达法则可得

$$原式 = \lim_{t \to 0^+} \frac{(1+at)^{t+1} - t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left\{ (1+at)^{t+1} \left[\ln(1+at) + a \cdot \frac{t+1}{1+at} \right] - t^{\frac{at^2}{1+at}} \left[\frac{2at + a^2t^2}{(1+at)^2} \ln t + \frac{at}{1+at} \right] \right\}$$

$$= 1 \times (0 + a) - 0 = a.$$

或

$$原式 = \lim_{t \to 0^+} \frac{(1+at)^{t+1} - 1}{t} - \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\frac{at^2}{1+at}} - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln[(1+at)^{t+1} - 1 + 1]}{t} - \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(t^{\frac{at^2}{1+at}} - 1 + 1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{(t+1)\ln(1+at)}{t} - \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{at^2}{1+at} \frac{\ln t}{t} \right)$$

$$= a + 0 = a.$$

评注 在本例中分别介绍了处理"$\infty - \infty$"型未定式的两种基本方法(通分法和提取无穷大公因子法),在具体问题中应灵活运用适当的方法将"$\infty - \infty$"型未定式变形.

【例 1.3】 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{4^x - 3^x}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}} =$ ________.

【分析】 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{4^x - 3^x}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln\left(\frac{4^x - 3^x}{x}\right)}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{4^x - 3^x}{x} - 1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{4^x - 3^x - x}{x(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{4^x - 3^x - x}{x-1}}$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 1} (4^x \ln 4 - 3^x \ln 3 - 1)} = e^{4\ln 4 - 3\ln 3 - 1} = \frac{4^4}{3^3 e} = \frac{256}{27e}.$$

评注 本题极限是"1^∞"型未定式,其一般形式为 $\lim\limits_{x \to \square} f(x)^{g(x)}$,其中 $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \square} g(x) = \infty$. 为求极限,首先将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 化为指数型复合函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$,由于 $\lim\limits_{x \to \square} \ln f(x) = 0$,利用当 $y \to 0$ 时的等价无穷小关系 $\ln(1+y) \sim y$ 可得:当 $x \to \square$ 时, $\ln f(x) \sim f(x) - 1$,于是

$$\lim_{x \to \square} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to \square} g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to \square} g(x)[f(x) - 1]}.$$

从而,归结为求极限 $\lim\limits_{x \to \square} g(x)[f(x) - 1]$.

【例 1.4】 求下列极限:

(Ⅰ) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - 1 - x)^{\frac{1}{\ln x}}$; (Ⅱ) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{x^x - 1}$.

【解】 (Ⅰ)因 $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - 1 - x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(e^x - 1 - x)}{\ln x}}$,又

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^x-1-x)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{e^x-1}{e^x-1-x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(e^x-1)}{e^x-1-x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{e^x-1-x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{e^x-1}=2,$$

故 $$\lim_{x\to0^+}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2.$$

（Ⅱ）本题也是“0^0”型未定式．$y=x^{x^x-1}=e^{(x^x-1)\ln x}$，

$$\lim_{x\to0^+}(x^x-1)\ln x=\lim_{x\to0^+}x\ln^2x=0\ (x^x-1\sim\ln(1+x^x-1)=x\ln x(x\to0+))$$

其中 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^2x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^2x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-2x\ln x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$

于是所求极限为 $e^0=1$．

评注 若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}$ 是“∞^0”型或“0^0”型未定式，也可化为指数型复合函数的极限 $e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)}$ 计算，其中 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)$ 是“$0\cdot\infty$”型的未定式，又需化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式后再用洛必达法则等方法求极限．

【例 1.5】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}=$ ________．

【分析】 求数列极限不可以直接用洛必达法则．为了应用洛必达法则求本例中的极限，可引入函数极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$，而所求的数列极限是这个函数极限中变量 x 取数列 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ 的特例．

引入函数 $f(x)=\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$ 与数列 $x_n=\dfrac{1}{n^2}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}=f(x_n)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$．由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}-x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-x)-1}{x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}}=e^{-2},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to0}f(x)=e^{-2}.$$

评注 利用函数极限及洛必达法则求数列极限的理论根据是：

① 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对 $\forall x_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$．

② 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对 $\forall x_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 又存在 N，当 $n\geqslant N$ 时 $x_n\neq x_0$，必有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

在本例中应用了上述第 2 个结论．也可以考虑函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{x}\right)\right]^{x}$ 且取 $x_n=n^2$，并应用第 1 个结论求本例中的极限．

【例 1.6】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x\sqrt[3]{\cos3x}}{\ln(1+\sin^2x)}$．

【解】 利用当 $x\to 0$ 时的等价无穷小关系 $\sin x \sim x$ 与 $\ln(1+x)\sim x$ 可知当 $x\to 0$ 时 $\ln(1+\sin^2 x)\sim \sin^2 x \sim x^2$，再利用极限的四则运算法则即知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x\sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln(1+\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=1+I,$$

其中 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

用洛必达法则可得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(\sin x\sqrt[3]{\cos 3x}+\frac{3\cos x\cdot\sin 3x}{3\sqrt[3]{\cos^2 3x}}\right)=\frac{1}{2}(1+3)=2.$$

代入即知所求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x\sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln(1+\sin^2 x)}=1+2=3.$$

【例 1.7】 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+x^2)\sin\frac{1}{x}-\cos x}{x^2[\ln(1+x)-\ln x]}=$ ______.

【分析】 先用等价无穷小因子替换：

$$\ln(1+x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}\ (x\to+\infty)$$

然后用分项求极限法可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+x^2)\sin\frac{1}{x}-\cos x}{x^2[\ln(1+x)-\ln x]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin\frac{1}{x}-\cos x}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=1+0=1.$$

（后一项的分子为有界变量，分母是无穷大量，故其极限为 0.）

【例 1.8】 若 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]$ 存在，则常数 $a=$ ______.

【分析】 注意 $|x|$ 是以 $x=0$ 为分界点的分段函数，且 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，可见应分别求当 $x\to 0$ 时的左、右极限. 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

$$=a+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{3e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{2}{x}}+1}=a,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=3-\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax)}{x}=3-a,$$

所以，题中极限存在 $\Leftrightarrow\ a=3-a\ \Leftrightarrow\ a=\dfrac{3}{2}$.

评注 在本例中用到了极限存在的如下充分必要条件：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)\ 和\ \lim_{x\to x_0^-}f(x)\ 都存在且同为\ A.$$

【例 1.9】 确定常数 a 和 b 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$.

【解法一】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}+b=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}=4-b.$$

由此可得 $b=4-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}4-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-2+6x}{1-2x+3x^2}+a}{2x}$

$$=4-\lim_{x\to 0}\frac{-2+6x+a(1-2x+3x^2)}{2x(1-2x+3x^2)}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}[-2+6x+a(1-2x+3x^2)]=-2+a=0$（否则 $b=\infty$）即 $a=2$，代入得

$$b=4-\lim_{x\to 0}\frac{2x+6x^2}{2x(1-2x+3x^2)}=3.$$

【解法二】 利用带皮亚诺余项的麦克劳林公式．由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，可得

$$\ln(1-2x+3x^2)=-2x+3x^2-\frac{1}{2}(-2x+3x^2)^2+o(x^2)=-2x+x^2+o(x^2),$$

代入即得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(a-2)x+(b+1)x^2}{x^2}=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a-2=0,\\ b+1=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2,\\ b=3.\end{cases}$$

评注 【解法一】的基础是极限的四则运算法则与洛必达法则，关键在于从题设得出 a 和 b 满足的极限公式．【解法二】的基础是带有皮亚诺余项的麦克劳林公式，要求熟悉有关的展开式的求法．

【例 1.10】 已知常数 $a>0,bc\neq 0$，使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^a\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)-x\right]=c,$$

求 a,b,c.

【解】 记 $I(a,b)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^a\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[x^{a-1}\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)-1\right]$

由于 $b\neq 0$，计算可得

$$\lim_{x\to+\infty}x^{a-1}\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}bx^{a-2}=\begin{cases}\infty, & a>2\\ b, & a=2\\ 0, & 0<a<2\end{cases}$$

从而，当 $a\neq 2$ 时对任何 $b\neq 0$ 以及当 $a=2$ 且 $b\neq 1$ 时都有 $I(a,b)=\infty$.

当 $a=2$ 且 $b=1$ 时，$I(a,b)=I(2,1)$ 是"$\infty\cdot 0$"型未定式，化为$\dfrac{0}{0}$型并作变量替换 $t=\dfrac{1}{x}$，再利用洛必达法则可得

$$I(2,1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1+t} = -\frac{1}{2}\neq 0.$$

故符合题目要求的常数 a,b,c 分别是 $a=2,b=1,c=-\frac{1}{2}$.

评注 这类含有待定常数的极限问题一般可采用本例的办法:在待定常数的取值范围内用洛必达法则(或其他方法)求出相应的极限,与题目的要求对比,选出符合要求的参数的取值即可.

【例 1.11】 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}=$ ______.

【分析一】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}\xlongequal{3x=t}27\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=9\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{9}{2}.$$

【分析二】 令 $\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$,且 $f(x)=x^2g(x)-\frac{\sin 3x}{x}$.

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3+x^2g(x)-\frac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}g(x)+\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\frac{9}{2}.$$

【分析三】 不妨取满足题设条件的一个特例来计算.最简单的 $f(x)$ 是满足 $\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0$ 的函数,于是 $f(x)=-\frac{\sin 3x}{x}$.进而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\frac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\frac{9}{2}.$$

评注 【分析一】的基础是极限的四则运算法则,在找出要求的极限与题设的极限之间的关系后,就化为求不含 $f(x)$ 的某个极限了.

【分析二】的基础是极限存在的变量与无穷小量的关系:$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+g(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$,于是可得到未知函数 $f(x)$ 的一个表达式$\left(\text{在本例中是} f(x)=x^2g(x)-\frac{\sin 3x}{x}\right)$,由此即可计算包含它的极限.

【分析三】不是一种正规的方法,但可用于求解结论与 $f(x)$ 的表达式无关的选择题或填空题.这种方法的思想很简单,即选择一个满足题设全部条件的函数 $f(x)$ 作为代表来得出适合于该类函数的一般结论.

特别需要注意的是如下做法是错误的:因为当 $x\to 0$ 时 $\sin 3x\sim 3x$,所以

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}\xlongequal{\circledast}\lim_{x\to 0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2},\text{即}\quad \lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}=0.$$

错误的根源在于带 ⊛ 的等式不成立.事实上按恒等变形与极限的运算法则应有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{3x+xf(x)}{x^3},$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x}{x^3}=-\frac{9}{2}\neq 0$.

所谓“在求$\frac{0}{0}$型未定式的极限时可在分子或分母中作等价无穷小代换”，是指把分式的分子或分母作为一个整体或其中的一个因子可以作等价无穷小代换.一般而言，不能仅仅把分子或分母中加、减法中的某一部分(如本题中的$\sin 3x$)换为它的等价无穷小量.

【例 1.12】 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=$ ______.

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]}{\ln\cos x}=\ln 2$. 此时必有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{4^x-1}=0$

利用当$x\to 0$时的等价无穷小关系$\ln(1+x)\sim x$和$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，把分子换为$\frac{f(x)}{4^x-1}$，把分母换为$-\frac{x^2}{2}$，即得$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2f(x)}{(4^x-1)x^2}=\ln 2$. 又$4^x-1\sim x\ln 4$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=-\frac{\ln 2}{2}\ln 4=-(\ln 2)^2.$$

评注 如上例所说，也可取特例$f(x)=(4^x-1)(2^{\ln\cos x}-1)$直接求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$.

【例 1.13】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}+\sqrt{1-\cos\frac{4\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\cos\frac{2n\pi}{n}}\right)=$ ______.

【分析】 因为

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}+\sqrt{1-\cos\frac{4\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\cos\frac{2n\pi}{n}}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n},$$

把$\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}$看作函数$f(x)=\sqrt{1-\cos 2\pi x}$在$x=\frac{k}{n}$处的函数值，其中$\frac{k}{n}$正好是将区间$[0,1]$ n等分所得的第k个分点$(k=1,2,\cdots,n)$，这时每个小区间的长度为$\frac{1}{n}$.

于是$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n}$可看作定积分$\int_0^1 f(x)\,dx$对应的积分和$\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$，其中$\xi_k=\frac{k}{n}$，$\Delta x_k=\frac{1}{n}(k=1,2,\cdots,n)$. 又因$f(x)=\sqrt{1-\cos 2\pi x}$在$[0,1]$上连续，于是在$[0,1]$上可积，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{1-\cos 2\pi x}\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{2\sin^2\pi x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

评注 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

【例 1.14】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{1}{n^2}}\right]=$ ______.

【分析】 令 $S_n = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{1}{2^2}} + \cdots + \dfrac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{1}{n^2}}$,

$$T_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right],$$

则不难发现 $\dfrac{n}{n+1}T_n \leqslant S_n \leqslant T_n \quad (n=1,2,\cdots)$,其中 T_n 是把$[0,1]$ n 等分,且取 $\xi_k = \dfrac{k}{n}(k=1,2,\cdots,n)$ 时 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 对应的积分和,因函数 $\ln(1+x)$ 在$[0,1]$上连续,故在$[0,1]$上可积,则

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}(1+x)$$

$$= (1+x)\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1.$$

此外,还有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}T_n = \lim\limits_{n\to\infty}T_n = 2\ln 2 - 1$,从而由极限存在的夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\ln 2 - 1.$$

评注 【例 1.13】与【例 1.14】是把所求的和转化为某个定积分对应的积分和,从而通过计算定积分得出要求的极限.从而解题的关键是看出定积分中的被积函数 $f(x)$ 以及积分区间$[a,b]$分别是什么.在【例 1.14】中,S_n 不能直接看成某一定积分对应的积分和,从而还要与极限存在的夹逼准则联合起来,用积分和 T_n 及 $\dfrac{n}{n+1}T_n$ 夹逼 S_n.

专题 2　无穷小及其阶

【解题思路】 Ⅰ.当 $x\to a$ 时若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小,$g(x)$ 是 $h(x)$ 的同阶无穷小,则当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 也是 $h(x)$ 的同阶无穷小.

特别有:当 $x\to a$ 时若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小,$g(x)$ 与 $h(x)$ 是等价无穷小,则当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 与 $h(x)$ 也是等价无穷小.

Ⅱ.设 $f(x)$ 连续,且当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小,则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 当 $x\to a$ 时必为 $x-a$ 的 $n+1$ 阶无穷小.

Ⅲ.设当 $x\to a$ 时 $g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小,当 $u\to 0$ 时 $f(u)$ 是 u 的 m 阶无穷小,则 $f[g(x)]$ 当 $x\to a$ 时必为 $x-a$ 的 nm 阶无穷小.

【例 2.1】 已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$,$g(x)=\int_0^{1-\cos x}\tan t\mathrm{d}t$ 和 $h(x)=\tan x-\sin x$ 当 $x\to 0$ 时都是无穷小量,若按照它们关于 x 的阶数从低到高的顺序排列起来,则是

(A) $f(x),g(x),h(x)$.　　(B) $h(x),f(x),g(x)$.

(C) $f(x),h(x),g(x)$.　　(D) $h(x),g(x),f(x)$.

【分析】 利用当 $x\to 0$ 时的等价无穷小关系:$\tan x \sim x, 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ 和 $\ln(1+x)\sim x$,不难得出当 $x\to 0$ 时,

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \sim x^2,$$

$$g(x) = \int_0^{1-\cos x} \tan t \mathrm{d}t = -\ln(\cos t)\Big|_0^{1-\cos x} = -\ln[\cos(1-\cos x)]$$

$$= 1 - \cos(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}(1-\cos x)^2 \sim \frac{x^4}{8},$$

$$h(x) = \tan x - \sin x = (1-\cos x)\tan x \sim \frac{x^3}{2}.$$

由此可知当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是关于 x 的二阶无穷小，$g(x)$ 是关于 x 的四阶无穷小，而 $h(x)$ 是关于 x 的三阶无穷小. 故应选(C).

【例 2.2】 设 $f(x)$ 是满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = -1$ 的连续函数，且当 $x \to 0$ 时 $\int_0^{\sin^2 x} f(t)\mathrm{d}t$ 是与 Ax^n 等价无穷小，则 $A =$ ________ 与 $n =$ ________.

【分析】 首先，由题设可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

现考察极限 $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x} f(t)\mathrm{d}t}{Ax^n}$，选取 A, n 使得极限 I 为 1. 由洛必达法则可得

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{Anx^{n-1}} = \frac{2}{nA}\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{\sin^4 x}\frac{\sin^5 x}{x^{n-1}} = \begin{cases} 0 & (0 < n < 6) \\ -\dfrac{1}{6A} & (n = 6) \\ \infty & (n > 6) \end{cases}$$

这表明 $\int_0^{\sin^2 x} f(t)\mathrm{d}t$ 当 $x \to 0$ 时是与 $-\dfrac{x^6}{6}$ 等价的无穷小，即 $A = -\dfrac{1}{6}$ 与 $n = 6$.

评注 若只确定 n 使得 $\int_0^{\sin^2 x} f(t)\mathrm{d}t$ 与 x^n 为同阶无穷小，我们可用无穷小阶的运算性质来求 n. 由 $f(x)$ 与 $1-\cos x$ 当 $x \to 0$ 时是同阶无穷小，$1-\cos x$ 与 x^2 当 $x \to 0$ 时是同阶无穷小，从而当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 也是与 x^2 同阶的无穷小，即 $f(x)$ 是 x 的二阶无穷小，进而由 $f(x)$ 连续知 $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 当 $x \to 0$ 时是 x 的 3 阶无穷小；最后由于当 $x \to 0$ 时 $\sin^2 x$ 是 x 的二阶无穷小，故复合函数 $g(\sin^2 x)$ 当 $x \to 0$ 时是 x 的 $2\times 3 = 6$ 阶无穷小.

由于本题是填空题，且结论中 n 的大小与 $f(x)$ 的具体形式无关，所以可用取特例求解法. 不难发现满足题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = -1$ 的一个连续函数是 $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$，对这个函数可得

$$\int_0^{\sin^2 x} f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{\sin^2 x} t^2\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\sin^6 x,$$

显然，当 $x \to 0$ 时这是关于 x 的 6 阶无穷小，故 $n = 6$ 且 $A = -\dfrac{1}{6}$.

一般说来，如果可以断定选择题或填空题的正确结论与题目中出现的函数 $f(x)$ 的具体形式无关，则可考虑用特例法求解.

【例 2.3】 设 $f(x)$ 连续，且当 $x \to 0$ 时 $F(x) = \int_0^x (x^2 + 1 - \cos t)f(t)\mathrm{d}t$ 是与 x^3 等价的无穷小，则 $f(0) =$ ________.

【分析】 由等价无穷小的定义及洛必达法则可得

$$1 = \lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[x^2\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x (1-\cos t)f(t)\,dt\right]$$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} + \frac{\int_0^x (1-\cos t)f(t)\,dt}{x^3}\right] = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} + \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x (1-\cos t)f(t)\,dt}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0} f(x) + \frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)f(x)}{x^2} = f(0) + \frac{1}{6}\lim_{x\to0}f(x) = \frac{7}{6}f(0),$$

故 $$f(0) = \frac{6}{7}.$$

【例 2.4】 设$f(x)$具有连续导数，且$f(0)=0, f'(0)=6$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^3} f(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^3} =$ ________.

【分析】 引入$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，于是$F(0)=0, F'(0)=f(0)=0, F''(0)=f'(0)=6$，且由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}F''(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}f'(x) = \frac{1}{2}f'(0) = 3.$$

由此又可得 $$\lim_{x\to0}\frac{F(x^3)}{x^6} \xlongequal{x^3=t} \lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^2} = \frac{1}{2}f'(0) = 3.$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^3} f(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^3} = \lim_{x\to0}\frac{F(x^3)}{F^3(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{F(x^3)}{x^6}}{\left[\frac{F(x)}{x^2}\right]^3} = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}.$$

评注 尽管本例中的极限是“$\frac{0}{0}$”型未定式，但直接对它用洛必达法则却难以得出结果，原因是求导一次不能去掉分母中的变上限定积分. 因此，我们采取首先求出当$x\to0$时与变限定积分$\int_0^x f(t)\,dt$等价的无穷小量，这样就可无须用洛必达法则而求出极限，即本例的解法本质上是等价无穷小代换法.

本例也可用特例法求解，取$f(x)=6x$，于是$f(x)$满足题设的全部条件，且

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^3} f(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^3} = \lim_{x\to0}\frac{3x^6}{(3x^2)^3} = \frac{1}{9}.$$

专题 3 函数及其连续性

【解题思路】 Ⅰ. 初等函数在其定义区间上连续，从而若初等函数$f(x)$在点$x=x_0$的某邻域内有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Ⅱ. 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界，并取得其最大值与最小值以及介于其最大值与最小值之间的任何中间值. 特别当$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$时必存在$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=0$.

Ⅲ. 若函数$f(x)$在点$x=x_0$处的左、右极限$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$都存在，但二者不相等，或二

者相等,但不等于 $f(x_0)$,则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某邻域内有定义,且 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 至少有一个不存在,则称点 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

【例 3.1】 $f(x) = xe^{-x^2}(2 - \cos x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是

(A) 有界的偶函数. (B) 无界的偶函数.

(C) 有界的奇函数. (D) 无界的奇函数.

【分析】 在 $(-\infty, +\infty)$ 上,x 是奇函数,$e^{-x^2}(2 - \cos x)$ 是偶函数,于是它们的乘积 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

又因 $|2 - \cos x| \leqslant 3$,从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否有界取决于 $g(x) = xe^{-x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界.因 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,且

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0,$$

这表明 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

综合得 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上有界的奇函数,应选(C).

评注 ① 若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,即 $x \in D \Rightarrow -x \in D$,为判定 $f(x)$ 是否奇、偶函数,只需检验 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) = f(x)$ 是否 $\forall x \in D$ 成立.

② 若 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的连续函数,为判定 $f(x)$ 在 (a,b) 内是否有界,只需检验两个极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 是否都存在.

若 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数,为判定 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界,只需检验两个极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 是否都存在.

类似可判定在 $(a, +\infty)$ 或 $(-\infty, b)$ 上的连续函数是否有界.

【例 3.2】 确定常数 a 和 $b > 0$ 的值,使函数

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2 + \cos^2 x)^{x^{-2}}, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ \dfrac{b^x - 1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{在}(-\infty, +\infty)\text{上连续}.$$

【解】 当 $x < 0$ 时,$f(x)$ 等于初等函数 $(2x^2 + \cos^2 x)^{x^{-2}}$,由初等函数连续性知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 连续,且

$$f(0-0) = \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (2x^2 + \cos^2 x)^{x^{-2}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\ln(2x^2+\cos^2 x)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0^-} \frac{2x^2+\cos^2 x-1}{x^2}} = e^{2-\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}} = e.$$

当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 等于初等函数 $\dfrac{b^x - 1}{x} = \dfrac{1}{x}(e^{x\ln b} - 1)$,由初等函数的连续性知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续,且 $$f(0+0) = \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{x\ln b} - 1}{x} = \ln b.$$

从而,为使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,必须且只需 $f(x)$ 还在点 $x = 0$ 处连续,即

$$f(0-0) = a = f(0+0) \Rightarrow e = a = \ln b.$$

故当 $a = e$ 且 $b = e^e$ 时 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

评注 本例是讨论分段函数连续性的典型题,在本例中 $f(x)$ 在 $x > 0$ 或 $x < 0$ 均为初等函数,故由初等函数的连续性得出 $f(x)$ 分别在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 内连续,在分界点 $x = 0$ 处,则用连续的充分必要条件:$f(0-0) = f(0+0)$ 都存在且等于 $f(0)$ 来确定常数 a 和 b,以达到使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的目的.