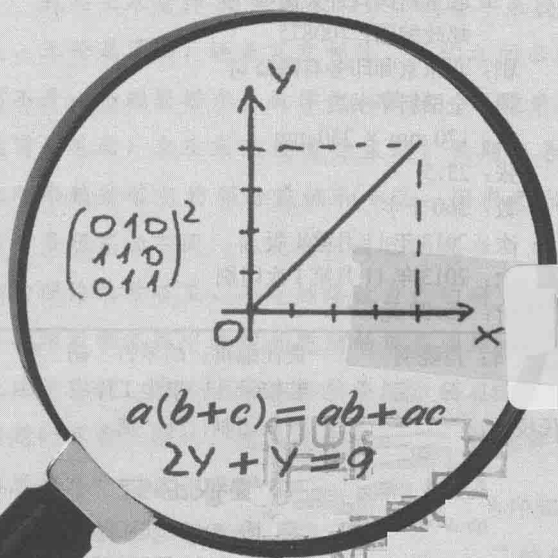


教育部“十一五”重大招标课题“义务教育数学课程教材整体设计研究”阶段性成果

数学化的 视界

——小学“数与代数”的教与学

王永◎著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



作者简介

王永，福州人，1943年8月出生。

1964年从福建师范学院数学系毕业后，回母校福州第一中学任教；1984年调任福建省普通教育教研室中学数学教研员。曾任福建省教育学会数学教学研究会第二届、第三届秘书长，第四届、第五届副理事长兼秘书长。曾获福建省优秀教研员、苏步青数学教育奖（个人奖）一等奖、福建省特级教师等荣誉。

出版《高中数学选择题的解题策略》等著作；在《中国教育学刊》《人民教育》等杂志发表论文120多篇；与余文森教授合作开展了“目标—掌握”“指导—自主学习”等课题研究。

目前为教育部福建师范大学基础教育课程研究中心研究员，北师大版小学数学教材编写组核心成员。

序 | 以数学化为目标

本书是一本以数学化为目标的教学参考书，也是十年数学课程改革的一份重要收获。

本书的作者王永老师，20世纪90年代中期以高中数学特级教师之身，转身小学数学教学研究领域，如今在这一领域已是闻名全国。

我与王永老师20世纪末相识，这些年来我印象最深的是，无论是见面，还是互发邮件，我们之间必聊的话题都离不开：弗赖登塔尔、数学化、情境、问题串等词。常常是甫一见面，未及寒暄就直奔主题，长期以来一直如此。他对弗赖登塔尔的那份虔诚和专注，国内无人能出其右。与许多研究者不同，他没有把自己拘泥在由名词和术语堆砌的理论象牙塔里，而是始终让自己的研究围绕一些在具体数学教学实践中遇到或想到的现实问题进行。他早就敏锐地觉察到，有可能通过弗赖登塔尔的思想找到解决这些问题的答案，因此，数十年来一直不懈寻找弗赖登塔尔及其思想与中国数学课程改革之间的契合点。他的不断追问和不倦尝试正在逐步转化为推进新一轮数学课程改革的正能量，摆在我们面前的这本《数学化的视界》即为印证。

弗赖登塔尔是当代最有名的数学教育家。他的现实数学教育思想不仅风靡世界，对我国正在进行的新一轮数学课程改革也颇具影响。数学化是弗赖登塔尔现实数学教育

思想的基石。数学化一词本身由来已久，专指运用数学思想、方法和技巧解决问题、发现创新的一般性策略。但在很长时间里，数学化只供少数数学专业人士长袖善舞，普通人来不了，更与小孩子无涉。弗赖登塔尔的伟大之处在于，他认为“数学化应当是数学教育的目标”，如果数学学习从现实情境问题出发，经过一连串提出问题和解决问题的过程，儿童也可以实现“数学化”，循着前人的足迹实现数学的“再发现”和“再创造”。他的这一想法，从根本上改变了长期以来数学给人留下的冰冷、抽象、枯燥、难学、乏味的面貌，把高高在上的数学化拉进了孩子们的世界，使他们有可能由此走上由喜欢、好奇和有用相伴的数学学习之旅，兴致盎然地进入抽象的数学世界。弗赖登塔尔不仅提出了“数学化”的理念，而且同他的学术伙伴一起，以数学化为核心，构建了系统的现实数学教育理论，编写了多套由这一理论支撑、以数学化为主题的中小学数学教材。经过几十年的理论探究与实践积累，以数学化为核心的现实数学教育思想已经长成一株枝繁叶茂的大树，发展成具有世界意义的数学教育理论与实践体系。

我国新一轮课程改革的核心目标是培养学生的创新意识和实践能力，可以说，弗赖登塔尔的数学化与中国数学新课程的理念不谋而合。但是，弗赖登塔尔的“洋理念”是否能适应中国数学教育这一方水土？数学化是否能适合中国学生的肠胃？这些问题是我们在借鉴外国先进经验时，常常会遭遇的门槛。王永老师多年来围绕这些问题悉心探究，并结合新课程实验教材的编写与使用，终于通过这本书给出了属于他的答案：我们需要数学化的视界，我们也能把握数学化的视界。

由于已先睹为快，根据我粗浅的理解，这本书中，以新课程意义下数与代数题材为对象的教学新“视界”是从以下几个方面得以拓展的。

其一，本书依托教材中的“数与代数”领域，以数学化的功能及其实现为目标，从理解教材的角度，通过不同数学题材的教学处理，比较系统地分析了什么是“数学化”，探讨了“数学化”在教学过程中的设计和运用，分析了“数学化”在提升教学质量方面的影响与效果。

其二，本书抓住每一个机会努力阐释这样一个道理：伴随着好奇与探索的数学学习才是有质量的，能激起热情、引发兴趣的数学学习才是有活

力的，能从学生熟悉的世界出发，一步步引导他们走近抽象数学门口的数学学习才是符合国家教育宗旨的，而这一切好像都离不开“数学化”。所以，小学阶段的数与代数，不仅是学生理解和掌握计算的基本题材，更是为学生探索与发现而准备的一块沃土。数与代数的所有素材都可以处理成学生通过自己的眼和手去认识世界的机会。这样，那些伴随着一连串“为什么”而发现的方法、规律和道理，才有可能长久驻留，成为伴随学生一生的本领。

其三，本书不断渗透这样的主张：教师对教材内容的理解要有足够的视野，对教学的实施要做到心中有数。要有能力分清在教学中哪些是要改的，哪些是要留的，哪些是该适可而止的，哪些是该着力推进的。而这里的“视野”和“数”，不仅要靠教师的数学功底，更离不开教师的使命感、责任心和职业意识。数学教学离不开数学，但作为教育内容的数学更应从社会的角度考量，更应关注数学的社会责任。而这些，正是弗赖登塔尔倡导的数学化的真谛。认识不到这些，我们数学课程改革的前进步伐可能会显得犹犹豫豫，数学教学的质量可能也多少要打些折扣吧。

上述概括仅属读后的一孔之见，未必与该书的核心与真谛完全吻合，但至少可以从一个侧面说明，本书的现实意义和实用价值值得充分肯定，王永老师的眼光、见识与学术功底令人赞赏。

该书不仅是王永老师长期结合我国小学数学教学改革实践、钻研弗赖登塔尔数学教育思想的理论总结，同时，其中融入了他多年参与小学课程标准实验教材编写与推广所积累的丰富经验，也充满着他近十年来始终站在数学课程改革前沿积淀下的深刻体会。通观全书，无论是层次结构，还是遣词造句，都做到了科学严谨与生动易读并重，应当说这是一本值得广大教师品味、研读的好书。

本书是一次由“视界”入手、与弗赖登塔尔的数学化相关联的、关于小学数与代数教学问题研究的有益尝试，是教学参考书领域的一个新品种。正因如此，其学术支撑部分和教学实践部分都有需要进一步丰富完善的空间，都留有很大值得深入研究、积极实验的余地。王永老师虽已到了应该颐养天年的年龄，我还是希望他能沿着这条路再走远一点。以我日前见到

他时那精神矍铄、活力四射的状态，我想这个愿望应当不是奢望，我们有理由期待。

孙晓天

2012年9月于中央民族大学

前言

20世纪80年代，“学科教学知识”的概念由美国哈佛大学著名学者舒尔曼确立起来。它是教师的“学科知识”与其“教育学知识”的融合。分解开来看，它是教师关于儿童的知识、教师对教育的理解、教师个人生活经验与实践智慧、教师的学科知识等诸要素的整合。这是教师的独特领域，它标志着：教师不是学科专家的依附者，而是拥有独立人格和专业自主权的存在。“教师的专业成长”指的就是教师的“学科教学知识”的不断发展。

教育部基础教育课程教材发展中心主任助理、新世纪（北师大版）小学数学教材主编刘坚教授倡导“读懂教材、读懂学生、读懂课堂”，是教师专业发展的必由之路，也是教师必须练就的基本功。如果说读懂教材应该先于课堂教学，那么读懂学生与读懂课堂则应该基于课堂倾听和观察，以及课后的反思。这是属于教师的独特的教学研究，其特征是把教学与研究变成一件事情，在教学中研究，在研究中教学。

笔者的教育生涯，1984年是一次从中学数学教师到省数学教研员的转身；1997年由于“指导—自主学习”数学课堂教学实验研究向小学延伸，便与小学数学教育结下了不解之缘，2002年又是一次从教材使用者到教材编写者的转身，加入了新世纪小学数学教材的编写团队。近十年来，

笔者在小学数学“学科教学知识”这一领域，真没想到还有所发现，有所创造，有所积累，本书就是这十年收获的果实之一。

本书分两部分。第一部分用较多的篇幅对小学“数与代数”的内容、方法和意义进行梳理，以北师大版小学数学教材为本，勾画出小学“数与代数”的整体结构。这里说的整体结构不是一副僵硬的骨架，不是将数学作为一个事先建造好的演绎体系，它是存在于现实之中，是随着学习过程中数学的发展而发展的。我们应该教给学生一个充满联系的数学；只有密切联系现实教的数学才能充满着各种联系，学生才能将所学的数学与现实结合，并且能够应用。

在这一部分，笔者着力探寻数学的本原性问题或核心概念。美国课程专家埃里克森认为，核心概念是指居于学科中心，具有超越课堂之外的持久价值和迁移价值的关键性概念、原理或方法。

有一次，从珠海市的教育博客中，笔者读到一位老师的懊恼和无奈。学生问他：“既然两个数相除又叫这两个数的比，为什么还要学比呢？”他没能说服自己的学生。其实，学生追问的是比的缘起和本原。世间万物不仅有可度量的属性，如时间、长度、质量、体积等，还有不可度量的属性，如形状、速度、质地、浓度等。这些不可度量的属性，它们是怎么进行比较的呢？这导致数学的发明创造：可以找到两个相关的、可度量的量来刻画事物的不可度量的属性；这样的两个量的对等关系就构成一个“比”。“比”源于度量，“比”也概括了度量。在古希腊传说中，阿基米德就是通过度量皇冠的质量与体积，得到这两个量的比，最终才解决了这顶皇冠是否被工匠掺入银子的难题。

帮助小学教师们理解新世纪小学数学“数与代数”的深刻内涵，把握该领域的数学的整体结构、基本思路和本质，从而提高数学教学的有效性，是笔者撰写这本书的初衷。

本书的第二部分，是探讨北师大版小学数学教材编写的特色——作为活动的数学，并探讨活动数学的教学原理与模式。

享誉世界的数学家、数学教育家弗赖登塔尔指出：有两种不同的数学——现成的数学和活动的数学。《作为教育任务的数学》与《数学教育再探——在中国的讲学》都是弗赖登塔尔的传世之作，这两部经典著作深刻

地影响了、甚至改变了笔者的数学观和数学教育观。为此,笔者愿意与年轻的同行们分享与活动数学有关的探索和思考,但愿能起到抛砖引玉的作用。

更寄望于年轻的朋友们把活动数学的探索与思考继续进行下去。

王 永

2012年9月于福州

目 录

第一章	数的意义/1
第一节	10以内数的认识/3
第二节	20以内数的认识/12
第三节	100以内数的认识/14
第四节	万以内数的认识/19
第二章	加减法的意义与运算/24
第一节	加减法的意义/24
第二节	减法意义的再认识/27
第三节	加减法的互算/30
第四节	加减法的口算/38
第五节	加减法的笔式/40
第三章	乘除法的意义与运算/45
第一节	乘法意义/45
第二节	乘法的运算规律/50
第三节	乘法的口算——以100以内一位数乘两位数为例/54
第四节	除法意义/57
第五节	除法的计算策略/61

目录

第一部分 小学“数与代数”的内容、方法和意义/1

第一章 数的意义/3

第一节 10 以内数的认识/3

第二节 20 以内数的认识/12

第三节 100 以内数的认识/14

第四节 万以内数的认识/19

第二章 加减法的意义与运算/24

第一节 加减法的意义/24

第二节 减法意义的再认识/27

第三节 加减法的运算规律/30

第四节 加减法的口算/35

第五节 加减法的竖式笔算/40

第三章 乘除法的意义与运算/45

第一节 乘法的意义/45

第二节 乘法的运算规律/50

第三节 乘法的口算——以 100 以内一位数乘两位数
为例/54

第四节 除法的意义/57

第五节 除法的计数策略/61

第六节 除法的运算规律 /64

第七节 除法的再认识/67

第八节 除法的口算——以一位数除两位数为例/70

第九节 乘法的再认识/73

第十节 乘法的笔算/76

第十一节 除法的笔算/82

第四章 运算顺序与运算律/87

第一节 加减的混合运算/87

第二节 加(减)与乘(除)的混合运算/91

第三节 乘除的混合运算/95

第四节 和与差的变化规律/97

第五节 积与商的变化规律/100

第六节 算法与算理/103

第五章 整数的认识/107

第一节 万计、亿计大数的认识/107

第二节 负数的初步认识/111

第三节 正整数的再认识/118

第六章 小数的意义与运算/126

第一节 小数的意义/126

第二节 小数的加减法/131

第三节 小数乘法/134

第四节 小数除法/139

第五节 循环小数/144

第六节 小数的混合运算/147

第七章 方程/150

第一节 字母表示数量关系/150

第二节 探索数量关系/153

第三节 怎样列方程/158

- 第四节 简单方程的解法/161
- 第五节 方程的应用/164
- 第八章 分数的意义与运算/168**
- 第一节 分数的意义/168
- 第二节 分数墙/174
- 第三节 分数的基本性质/178
- 第四节 分数与除法/181
- 第五节 分数的加减法/185
- 第六节 分数的乘法/189
- 第七节 分数的除法/193
- 第八节 分数与比/196
- 第九节 分数乘除法的应用/202
- 第十节 分数的代数运算/206
- 第九章 正比例与反比例/208**
- 第一节 变化的量/208
- 第二节 正比例/212
- 第三节 反比例/218
- 第四节 正、反比例的应用/222
- 第十章 探索规律/225**
- 第一节 模式、关系和函数/225
- 第二节 用符号表示规律/228
- 第三节 什么是代数的基础/236

第二部分 活动数学课堂教学的原理与模式/241

第一章 活动数学课程教学的探索

——论北师大版小学数学教材活动数学的特色/243

第一节 本套教材(第3版)特色与优势的确认/243

第二节 从对本套教材的一些非议反观教材的特色/246

第三节 第4版教材更加突出本套教材的特色和风格/249

第二章 读懂教材是创造性使用教材的基础

——以解读北师大版教材(第4版)一年级上册2个单元为例/251

第一节 第2单元——比较/251

第二节 第7单元——加与减(二)/260

第三章 问题情境与问题教学

——探讨“鸡兔同笼”问题教学的两种教学设计/271

第一节 问题情境及其主要成分/271

第二节 “鸡兔同笼”算术解法的问题情境/274

第三节 “鸡兔同笼”代数解法的问题情境/276

第四节 问题情境与数学活动的教学/279

第四章 活动数学的课堂教学设计/281

第一节 第3版教材数学活动的教学设计举例/283

第二节 第4版教材数学活动的教学设计举例/291

第三节 课题引入与课堂小结的教学设计/295

第四节 活动数学课堂教学设计的模板/298

第五章 活动数学的课堂教学模式

——从福建省大田县实验小学数学课堂教学改革说起/304

第一节 总体印象/304

第二节 刮目相看/305

第三节 建立常规/308

第四节 模式再探/310

第六章 “有指导的再创造”的一个生动案例

——一次难忘的“空瓶换饮料”的意外生成/313

第七章 对“先学后教”的理性认识与实践反思

——必须把开发学生学习潜能的教学常规建立起来/323

第一节 教学过程与学生学习能力发展的阶段论/323

第二节 教学过程不同的发展阶段应该采取的教学方式/326

第三节 “指导—自主学习”教改实验的前期探索/329

第四节 “指导—自主学习”教改实验的深化研究/333

第八章 数学教育智慧的源泉

——读懂弗赖登塔尔/339

第一节 数学化/339

第二节 有指导的再创造/346

第三节 学习过程中的水平/352

主要参考文献/358

第一部分 小学“数与代数”
的内容、方法和意义

第一章 数的意义



第一节 10 以内数的认识

第一部分 小学“数与代数” 的内容、方法和意义

认识数，包括认识数数、数的表示、数的运算、数的应用等。数数是对数的一般认识，是认识数的基础。

小满才一岁，会数到五个、十个、二十个。过年的时候，他数到四十了，又过段时间，会数到六十、七十、八十了，他爸爸问他：“你从一数一直数地增前，真是飞跃前进，到了某一个时候，你就停了，爸爸说：‘说什么数都会停了。’这一飞跃，真没有感觉到无穷！就前经过了这十飞跃，才真正能说是认识了数。”

数数，其实就是以数词序列为工具，建立数与所数事物之间的一一对应关系，数到最后一个事物被数到是那个数，就表示所数事物有多少。数

儿童大约 2~4 岁的时候，就开始跟父母学习唱数、数数。一般从数 1 开始，熟悉数词序列的读音和写号，直到能够熟练地唱出 10 以内的数词序列，才开始学习数数，学会数数，才知道数词的具体意义和内容。

数数，其实就是以数词序列为工具，建立数与所数事物之间的一一对应关系，数到最后一个事物被数到是那个数，就表示所数事物有多少。数

第一章 数的意义

第一节 10 以内数的认识

“数，源于数(shǔ)数。”自然数就是在数(shǔ)数中自然形成的。

识数，包括认识数字、数数和简单算术，不是一件容易的事；识数的过程一般需要七八年，至少也要五六年。华罗庚先生曾经这样生动地描述识数的过程(华罗庚著，《数学归纳法》，北京：科学出版社，2002年)：

小孩子识数，先学会数1个、2个、3个；过些时候，能够数到10了；又过些时候，会数到20，21，…，100了；但后来，却不是这样一段一段地增长，而是飞跃前进。到了某一个时候，他领悟了，他会说：“我什么数都会数了。”这一飞跃，竟从有限跃到了无穷！只有经过了这一个飞跃，才真正能说是识数了。

一、学前儿童识数的经验

儿童大约2~4岁的时候，就开始跟父母学习唱数、数数。一般先学唱数，熟悉数词序列的语音符号，直到能够熟练唱出10以内的数词序列，才开始学习数数；学会数数，才知道数词的具体意义和内容。

数数，其实就是以数词序列为工具，建立数与所数事物之间的一一对应关系；数到最后一个事物被数到的那个数，就表示所数事物有多少。数