HAIDIANMINGTI

北京市海淀区重点中学特级教师 编写

全新编写
QuanXin BianXie

海淀名题

全析全解

按新考纲新教材
新课标编写

新的教学理念
强调能力立意
详尽的解析法

高中数学

中国少年儿童出版社

北京市海淀区重点中学特级教师 编写

全新编写

HAIDIANMINGTI

海淀名题

全析全解

quanxiquanjie

- 新的教学理念
- 强调能力立意
- 详尽的解析法

高中数学

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

海淀名题全析全解：高中数学（最新版） /《海淀名题全析全解》编写组编.- 北京：中国少年儿童出版社，1999.6
ISBN 7-5007-4884-1

Ⅰ.海… Ⅱ.海… Ⅲ.数学课 - 高中 - 解题 Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 27398 号

Haidian mingti quanxi quanjie

出版发行：中国少年儿童出版社
出 版 人：

责任编辑：尚万春
装帧设计：缪 惟
责任印务：郎 建

社址：北京东四十二条 21 号　**邮政编码**：100708
电话：086-010-64032266　**传　真**：086-010-64012262

印刷：福州华彩印务有限公司　**经销**：新华书店

开本：787 × 1092　1/16　**印张**：30.25
2003 年 11 月北京第 2 版　2004 年 3 月福州第 7 次印刷
字数：1077 千字　**印数**：7800 册

ISBN 7-5007-4884-1/G · 3676　定价：32.00 元

前　言

一书在手，应考自如

多年来，中学广大师生都渴望有一套万能式的教辅材料，都希望“一书在手，应考自如”，**《海淀名题全析全解》**系列丛书就应运而生了。这套丛书一版再版，得到了中学广大师生的认可和赞誉，被广大师生称为教辅图书中的一颗璀璨明珠。

本丛书以现行人教社最新版教材为依据，紧紧围绕最新的高（中）考**《考试说明》**和**《考试纲要》**的知识点展开，符合国家最新教学大纲的要求。

♣**该丛书具有如下特点：**

体例新

本丛书不仅对学生中共性的亟待解决的问题予以整理、归纳、提炼，而且对部分习题的解题思路作适度、合理的延伸，以全析全解的体例，从基础题到拓展题，由易而难，生动活泼，启发思维，引人入胜。全析的绝不是解题步骤，而是解题的思维过程。而高（中）考的考试知识点又无一遗漏地分布在试题之中。这种对题目进行全面分析、全面解答，用试题来带考点的形式，是目前教辅图书中独一无二的，这种体例，经过实践验证，效果也是良好的。

题型新

本丛书的题型全是高（中）考的最新题型，强调能力立意，主要以应用型和能力型题型为主，突出理解、论证、实验能力的考查，对学生存有疑惑的问题给予科学、详尽的纠错解析，为学生开辟了广阔的思维空间。丛书汇编了2003年部分地区的高（中）考试题，让学生在求知的同时，有一个对高（中）考、对自己的全面的认识。

含量高

本丛书充分展现了高（中）考名题风采，体现高（中）考优秀的命题成果，是教师多年教学经验的总结和教学体会的结晶。既体现知识技巧，又锻炼素质能力。设计的问题都是教学过程中学生遇到的共性问题及容易混淆的问题，倾注了中学一线特、高级教师大量的心血，体现了新世纪教育的精华。

适用性强

本丛书与现行人教社教材同步，同时兼容其他教材，这是一大优点。不管教材如何变化，知识点、重点、难点、考点不会变。一书在手，如同得到一把打开知识宝库的金钥匙。

编写阵容强大

参加本丛书编写的都是多年工作在教学一线的经验丰富的中学特、高级教师，并聘请了部分教育专家、知名学者作为本丛书编写的顾问。

我们以“创名牌、出精品”为宗旨，以不断推陈出新为目标，以不断努力、真诚服务为己任，为中学广大师生献上一份丰厚的礼物。新**《海淀名题》**会以更高的含量，更深的内涵，更丰富的信息，在竞争中永立不败之地。我们热切地希望广大师生朋友，为我们提供真诚的反馈意见，使**《海淀名题》**从成熟走向辉煌。

愿此丛书助天下学子跨知识海洋，攀科学高峰！

海淀名题全析全解

目 录

MU LU

必修

第一章 集合与简易逻辑

第二章 函 数

第三章 数 列

第四章 三角函数

第五章 平面向量

第六章 不等式

第七章 直线和圆的方程

第八章　圆锥曲线方程

第九章　直线、平面、简单几何体

第十章　排列、组合和概率

选修

第一章　概率与统计

第二章　极　限

第三章　导数与微分

第四章　积　分

第五章　复　数

必修

海淀名题全析全解 第一章 集合与简易逻辑

一 集 合

I．基础题

一、选择题

1. 集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集个数为（　　）．

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

答：A.

解：用直接法：M 的子集分别有：

含有 1 个元素的子集有 5 个；

含有 2 个元素的子集有 10 个；

含有 3 个元素的子集有 10 个；

含有 4 个元素的子集有 5 个；

含有 5 个元素的子集有 1 个；

含有空集子集 1 个，故 M 中共含有子集 32 个．或者直接计算 $2^5=32$，故本题应选 A.

2. 设集合 $A=\{x \mid x\in \mathbf{Z}, 且 -10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x \mid x\in \mathbf{Z} 且 |x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是（　　）．

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

答：C.

解析：本题依据并集的概念解题，可用直接法，也可用数形结合法，利用数轴求解．

解：由题设知，$-10\leqslant x\leqslant -1$，$|x|\leqslant 5$，

$\therefore -5\leqslant x\leqslant 5$

$\therefore A\cup B=\{x \mid x\in \mathbf{Z}, 且 -10\leqslant x\leqslant 5\}$

card $(A\cup B)=16$（即 $A\cup B$ 中的元素个数是 16）．

故本题应选 C.

3. 方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解集是（　　）．

A. $\{x=0, y=1\}$　　B. $\{0, 1\}$

C. $\{(0, 1)\}$　　D. $\{(x, y) \mid x=0 或 y=1\}$

答：C.

解：这是二元一次方程组的解集的化简问题，需加强对集合概念的理解．

由$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=1\end{cases}$

所以方程组的解集为

$\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\right\}=\{(0,\ 1)\}$，故本题应选 C.

4. 已知集合 $M=\{(x,\ y)\ |\ x+y=2\}$，$N=\{(x,\ y)\ |\ x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为（　　）．

A. $x=3$，$y=-1$　　　　B. $(3,\ -1)$

C. $\{3,\ -1\}$　　　　D. $\{(3,\ -1)\}$

答：D.

解：$M\cap N=\{(x,\ y)\ |\ x+y=2\}\cap\{(x,\ y)\ |\ x-y=4\}$

$=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}\right\}$

$=\{(3,\ -1)\}$．

5. 设 $A=\{x\in\mathbf{Z}\ |\ x^2-px+15=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\ |\ x^2-5x+q=0\}$，若 $A\cup B=\{2,\ 3,\ 5\}$，则 A，B 分别为（　　）．

A. $\{3,\ 5\}$，$\{2,\ 3\}$　　　　B. $\{2,\ 3\}$，$\{3,\ 5\}$

C. $\{2,\ 5\}$，$\{3,\ 5\}$　　　　D. $\{3,\ 5\}$，$\{2,\ 5\}$

答：A.

解：因为 $A\cup B=\{2,\ 3,\ 5\}$，故 $x^2-px+15=0$ 可分解为 $(x-3)\cdot(x-5)=0$. 所以 $A=\{3,\ 5\}$；$x^2-5x+q=0$ 可分解为 $(x-2)\cdot(x-3)=0$，所以 $B=\{2,\ 3\}$．故选 A.

6. 已知全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\ |\ f(x)=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\ |\ g(x)=0\}$，则不等式 $f(x)\cdot g(x)\neq0$ 的解集为（　　）．

A. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$　　　　B. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$

C. $(B\cap\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(A\cap\complement_{\mathbf{R}}B)$　　　　D. $(B\cup\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(A\cap\complement_{\mathbf{R}}B)$

答：A.

解：因为 $f(x)\cdot g(x)\neq0$，所以 $f(x)\neq0$ 且 $g(x)\neq0$，故选 A.

7. 设实数集 $\mathbf{R}$ 为全集，集合 $P=\{x\ |\ f(x)=0\}$，$Q=\{x\ |\ g(x)=0\}$，$H=\{x\ |\ h(x)=0\}$，则方程 $\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{h(x)}=0$ 的解集是（　　）．

A. $P\cap Q\cap(\complement_{\mathbf{R}}H)$　　　　B. $P\cap Q$

C. $P\cap Q\cap H$　　　　D. $P\cap Q\cup H$

答：A.

解：由 $f^2(x)+g^2(x)=0$ 知，$f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 同时成立，且 $h(x)\neq0$，故选 A.

8. 已知集合 $M=\left\{a\in\mathbf{Z}\ \middle|\ \dfrac{6}{5-a}\in\mathbf{N}^*\right\}$，则 M 是（　　）．

A. $\{-1,\ 2,\ 3,\ 4\}$　　　　B. $\{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$

C. $\{2,\ 3\}$　　　　D. $\{-1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 11\}$

答：A.

解：因为 $a\in\mathbf{Z}$ 且 $\dfrac{6}{5-a}\in\mathbf{N}^*$，所以 a 可以取 -1，此时 $\dfrac{6}{5-a}=1\in\mathbf{N}^*$；$a$ 取 2，此时 $\dfrac{6}{5-a}=2\in\mathbf{N}^*$；$a$ 取 3，此时 $\dfrac{6}{5-a}=3\in\mathbf{N}^*$；$a$ 取 4，此时 $\dfrac{6}{5-a}=6\in\mathbf{N}^*$．所以 $a=-1$，2，3，4.

二、填空题

9. 大于 3 且不大于 12 的偶数集合是________.

答：{4，6，8，10，12}

解：用列举法表示该偶数的集合是 {4，6，8，10，12}.

10. 从自然数 1～20 这 20 个数中，任取 2 个数相加，得到的和作为集合 M 的元素，则 M 的非空真子集共有________个.

答：$2^{37}-2$.

解：因为 1～20 中任取 2 个数相加得到的和中，最小的是 $1+2=3$，最大的是 $19+20=39$，共计 37 个数，即 M 中 37 个元素中所有非空真子集的个数是 $2^{37}-2$.

11. 集合 $\{x \mid x\in \mathbf{N},\ x<7\}$ 含元素 1，但不含元素 5 的真子集的个数为________.

答：16.

解：集合 $\{x \mid x\in \mathbf{N},\ x<7\}=\{1,2,3,4,5,6\}$. 满足题意的真子集个数与 {2，3，4，6} 的子集个数相同，即 $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=2^4=16$ 个.

12. 设 m，n 为自然数，$m>n$，集合 $A=\{1,2,3,\cdots,m\}$，集合 $B=\{1,2,3,\cdots,n\}$，满足 $B\cap C\neq\varnothing$ 的 A 的子集 C 共有________个.

答：2^m-2^{m-n}.

解：由 A 的子集为 2^m 个，由 $\{n+1,n+2,\cdots,m\}$，这 $m-n$ 个元素构成的是 2^{m-n} 个子集，因为 $B\cap C\neq\varnothing$，则 C 共有 2^m-2^{m-n} 个.

13. 已知集合 $A=\{a \mid a=5x+3,\ x\in \mathbf{N}\}$，$B=\{b \mid b=7y+2,\ y\in \mathbf{N}\}$，则 $A\cap B$ 中最小的元素是________.

答：23.

解：由 $A=\{8,13,18,23,28,33,\cdots\}$，$B=\{9,16,23,30\cdots\}$，不难看出，$A\cap B$ 中最小的元素是 23.

14. 已知集合 $A=$ {菱形}，$B=$ {正方形}，$C=$ {平行四边形}，那么 A、B、C 之间的关系是________.

答：$B\subsetneqq A\subsetneqq C$

解：由于正方形是特殊的菱形，菱形又是特殊的平行四边形，故 $B\subsetneqq A\subsetneqq C$.

15. 已知全集 $I=\mathbf{N}^*$，集合 $A=\{x \mid x<5$ 且 $x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x \mid x<9$ 且 x 为正偶数$\}$，则 $\complement_I A\cap B=$________.

答：{6，8}.

解：由题意知 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 $\complement_I A\cap B$ 为 B 中大于或等于 5 的元素组成的集合，即 $\complement_I A\cap B=\{6,8\}$.

16. 设 $A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$ 的子集$\}$，$N=\{B$ 的子集$\}$，则 $M\cap N=$________.

答：$\{\varnothing\}$.

解：因为 $A\cap B=\varnothing$，则 M，N 除空集以外不会有公共元素.

17. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$M=\{2,3,4,5\}$，$N=\{1,3,6\}$，则 $[\complement_U(M\cup N)]\cap(M\cap N)=$________.

答：$\varnothing$.

解：因为 $M\cup N=\{1,2,3,4,5,6\}=U$，所以 $[\complement_U(M\cup N)]=\varnothing$，故 $[\complement_U(M\cup N)]\cap(M\cap N)=\varnothing$.

18. 若 $B=\{x\in\mathbf{R} \mid x=a\sqrt{2}+b,\ a\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{Z}\}$，则 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$________B.

答：$\in$.

解：因为 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$，故是 B 中的元素.

三、解答题

19. 试表示 $\{(x,y)\mid y=|x|\}$ 和 $\{(x,y)\mid y>0,x\in\mathbf{R}\}$ 之间的关系．

解析： 本题考查基础知识与基本运算，通过寻觅特殊值进行验证来考查两个集合之间的关系．

解： ∵ $(0,0)\in\{(x,y)\mid y=|x|\}$，但

$(0,0)\notin\{(x,y)\mid y>0,x\in\mathbf{R}\}$

又∵ $(0,1)\in\{(x,y)\mid y>0,x\in\mathbf{R}\}$，但

$(0,1)\notin\{(x,y)\mid y=|x|\}$

∴ $\{(x,y)\mid y=|x|\}\subsetneqq\{(x,y)\mid y>0,x\in\mathbf{R}\}$

且 $\{(x,y)\mid y>0,x\in\mathbf{R}\}\subsetneqq\{(x,y)\mid y=|x|\}$

20. 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^3-x^2+ax+b=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap B=A$，求 a、b 的值．

解析： 由 $A\cap B=A$，得 $A\subseteq B$，由此可知 A 的元素都是 B 的元素．解得 a、b.

解： 由 A 得 $A=\{1,2\}$，∵ $A\cap B=A$，∴ $A\subseteq B$，∴ $1,2\in B$.

∴ $\begin{cases}1-1+a+b=0,\\8-4+2a+b=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+b=0\\2a+b=-4\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-4,\\b=4.\end{cases}$

21. 下列各表示中，正确表示集合的是哪些？

① $\{1,2,\sqrt{3},\sqrt{2},\cdots\cdots\}$；

② $\{1,2,3,2,1\}$；

③ {我们班高个子的同学}；

④ {平方等于负数的实数}；

⑤ $\{x\mid x^2+1>0\}$．

解： ①中元素用省略号表示无规律，其他元素是什么不知道，所以不正确；

②中元素 1，2 出现两次与互异性矛盾；

③中元素不确定，所以不正确；

④，⑤正确，因为研究对象“特征”明确．

22. 说明集合 $A=\{x\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$C=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 的区别．

解： 集合中元素都满足等式 $y=x^2+1$，这是共性，即我们研究对象的“公共特征”，但是 A 中元素是自变量 x 具有的“特征”，所以 $A=\mathbf{R}$；而 B 中是因变量 y 具有的“特征”，所以 $B=\{y\mid y\geqslant 1\}$；C 中则是二次函数图象（抛物线）上点的坐标具有的“特征”，所以 C 是抛物线上点构成的集合；即 A、B 为数集，C 为点集．

23. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$ 只有一个元素，求 a 的值，并求出这个元素．

解析： A 只有一个元素意味着 $ax^2+2x+1=0$ 只有一个根或有两个重根.

解： 当 $a=0$ 时，$ax^2+2x+1=0$ 是一元一次方程，它只有一个根 $x=-\dfrac{1}{2}$，

当 $a\neq 0$ 时，由 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，$ax^2+2x+1=0$ 有两个重根 $x=-1$. 因此 $a=0$ 或 $a=1$ 时，A 中只有一个元素，分别为 $-\dfrac{1}{2}$ 或 -1.

24. 若 $S=$ {小于 10 的正整数}，A，B 均为 S 的子集，且 $\complement_S A\cap B=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_S A\cap\complement_S B=\{4,6,8\}$，求 A 及 B.

解析： 关于集合的交、并、补问题，通常可以由分析法找出集合中一定有或一定没有的元素，然后讨论余下的元素，对它们逐一加以检验．

解： 由 $\complement_S A\cap B=\{1,9\}$，可知 $1\in\complement_S A$，

$\therefore 1\notin A$，$\therefore 9\in \complement_S A$，$9\notin A$，$1\in B$，$9\in B$. 又由于 $A\cap B=\{2\}$，

$\therefore 2\in A$，$2\in B$；

$\because \complement_S A\cap \complement_S B=\{4, 6, 8\}$，

$\therefore 4$，6，8 均不属于 A，B.

再检验剩下的元素 3，5，7：

若 $3\in B$，$\because 3\notin A\cap B$，$\therefore 3\notin A$，

从而 $3\in \complement_S A$，故有 $3\in \complement_S A\cap B$，这与题设矛盾！$\therefore 3\notin B$，故 $3\in \complement_S B$.

$\because 3\notin \complement_S A\cap \complement_S B$，

$\therefore 3\notin \complement_S A$，故 $3\in A$.

同理可得：$5\in A$，$7\in A$，$5\notin B$，$7\notin B$，

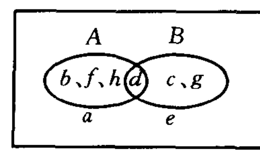
故 $A=\{2, 3, 5, 7\}$，$B=\{1, 2, 9\}$.

25. 设全集 $I=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$，已知 $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\{a, b, c, e, f, g, h\}$，$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\{a, e\}$，$(\complement_I A)\cap B=\{c, g\}$，$(\complement_I B)\cap A=\{b, f, h\}$，求集合 A 和集合 B.

解法一： 可由性质将 $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$ 化为 $\complement_I(A\cap B)=\{a, b, c, e, f, g, h\}$ 从而得：$\complement_I[\complement_I(A\cap B)]=A\cap B=\{d\}$ 将 $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$ 化为 $\complement_I(A\cup B)=\{a, e\}$ $\therefore A\cup B=\{b, c, d, f, g, h\}$. 故知 b，d，f，$h\in A$. c，d，$g\in B$.

$\therefore A=\{b, d, f, h\}$　$B=\{c, d, g\}$

解法二： 让我们试试韦恩图（如图所示），只需要依据条件填空，注意一般从小范围填起，这样很快可得到 $A=\{b, f, h, d\}$，$B=\{d, c, g\}$



Ⅱ. 拓展题

一、选择题

1. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的子集总共有（　　）.

A. 7 个　　B. 8 个

C. 6 个　　D. 5 个

答： B.

2. 设全集 $U=\{(x, y)\mid x, y\in \mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x, y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x, y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $\complement_U(M\cup N)$ 等于（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\{(2, 3)\}$

C. $(2, 3)$　　D. $\{(x, y)\mid y=x+1\}$

答： B.

解： 全集 U 是坐标平面，集合 M 表示直线 $y=x+1$ 上除去点 $(2, 3)$ 的所有点的集合，集合 $\complement_U N$ 表示直线 $y=x+1$ 上所有点的集合，所以 $(\complement_U N)\cap(\complement_U N)=\{(2, 3)\}$，因此选 B.

3. 设集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\mid -10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in \mathbf{Z}\mid x\mid \leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是（　　）.

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

答： C.

4. 已知 U 为全集，集合 M，$N\subsetneqq U$，若 $M\cap N=N$，则（　　）.

A. $\complement_U M\supseteq \complement_U N$　　B. $M\subseteq \complement_U N$

C. $\complement_U M\subseteq \complement_U N$　　D. $M\supseteq \complement_U N$

答： C.

解： 由已知可知：$M\supsetneqq N$ 或 $M=N$，对于这两种情况都有 $\complement_U M\subseteq \complement_U N$（这可借助于文恩图得到）故应选 C.

5. 设 U 是全集，集合 P，Q 满足 $P\subsetneqq Q$，则下面的结论中错误的是（　　）.

A. $P\cup Q=Q$　　B. $(\complement_U P)\cup Q=U$

C. $P\cap(\complement_U Q)=\varnothing$　　D. $(\complement_U P)\cap(\complement_U Q)=\complement_U P$

答：D.

二、填空题

6. 已知集合 $A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，集合 $B=\{0, |x|, y\}$，且 $A=B$，则 $x=$________，$y=$________.

答：-1，-1.

解：$\because x\neq 0$，$y\neq 0$　$\therefore \lg(xy)=0$，$xy=1$，若 $xy=y$，则有 $y=1$，$x=1$，A 中有相同元素 $x=xy=1$，不符合要求，因此 $xy=|x|$，即 $|x|=1$，$x=-1$，$y=-1$.

7. 已知集合 $A=\{x\mid 1<ax<2\}$，集合 $B=\{x\mid |x|<1\}$，当 $A\subseteq B$ 时，则 a 的取值范围为________.

答：$\{a\mid a=0$ 或 $|a|\geqslant 2\}$.

解：当 $a=0$ 时 $A=\varnothing$，显然 $A\subseteq B$，$B=\{x\mid -1<x<1\}$，当 $a>0$ 时，$A=\{x\mid \frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}\}$，要使 $A\subseteq B$，必须 $\frac{2}{a}\leqslant 1$ 且 $\frac{1}{a}\geqslant -1$　$\therefore a\geqslant 2$. 当 $a<0$ 时，$A=\{x\mid \frac{2}{a}<x<\frac{1}{a}\}$，要使 $A\subseteq B$，必须 $\frac{1}{a}\leqslant 1$，且 $\frac{2}{a}\geqslant -1$，即 $a\leqslant -2$，综上 $|a|\geqslant 2$，或 $a=0$.

8. 已知集合 $M=\{y\mid y=x^2-4x+3, x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y\mid y=-x^2+2x+8, x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$________.

答：$\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 9\}$.

解：$y=x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1$，$\therefore y\geqslant -1$，$\therefore M=\{y\mid y\geqslant -1\}$，$y=-x^2+2x+8=-(x^2-2x+1)+9=-(x-1)^2+9\leqslant 9$，$\therefore y\leqslant 9$，$N=\{y\mid y\leqslant 9\}$　$\therefore M\cap N=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 9\}$.

9. 已知 A、B、M、N 为非空集合，$A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$ 的真子集$\}$，$N=\{B$ 的真子集$\}$，则 $M\cap N=$________.

答：$\{\varnothing\}$.

解：$M=\{A$ 的真子集$\}=\{\varnothing\}\cup\{A$ 的非空真子集$\}$，$N=\{B$ 的真子集$\}=\{\varnothing\}\cup\{B$ 的非空真子集$\}$　$\because A\cap B=\varnothing$，$A$ 的非真空子集与 B 的非空真子集没有相等的.

$\therefore M\cap N=\{\varnothing\}$.

10. 已知集合 $M=\{(x, y)\mid x^2+y^2=9\}$，$N=\{(x, y)\mid y=x+b\}$，$M\cap N=\varnothing$，则 b 的取值范围是________.

答：$(-\infty, -3\sqrt{2})\cup(3\sqrt{2}, +\infty)$.

解：$\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=x+b\end{cases}$　$\because M\cap N=\varnothing$　$\therefore$ 方程组无解，即 $2x^2+2bx+b^2-9=0$　无实根　$\Delta<0$　即 $4b^2-8(b^2-9)<0$，$b^2>18$，$\therefore b>3\sqrt{2}$ 或 $b<-3\sqrt{2}$.

11. 设 $M\cap N=\varnothing$ 且 $M=\{(x, y)\mid \frac{y-3}{x-2}=a+1\}$，$N=\{(x, y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$ 则 a 的值为________.

答：1，-1，$\frac{5}{2}$，-4.

解：当 $a=1$ 时，$N=\{(x, y)\mid 0x+0y=15\}=\varnothing$，$M\cap N=\varnothing$，当 $a=-1$ 时，$M=\{(x, y)\mid \frac{y-3}{x-2}=0\}=\{(x, y)\mid y=3$，且 $x\neq 2\}$，$M=\{(x, y)\mid -2y=15\}=\{(x, y)\mid y=-\frac{15}{2}\}$　$\therefore M\cap N=\varnothing$，$M=\{(x, y)\mid y=(a+1)x-2a+1, x\neq 2\}$　当 $x=2$，$y=3$ 时，$(2, 3)\notin M$，将 $x=2$，$y=3$ 代入 $(a^2-1)x+(a-1)y=15$，得 $2(a^2-1)+3(a-1)=15$，$2a^2-3a-20=0$，

$(2a-5)(a+4)=0$，$a=\frac{5}{2}$或$a=-4$，即说明当$a=\frac{5}{2}$或$a=-4$，$(2,3)\notin M$，$(2,3)\in N$，$\therefore M\cap N=\varnothing$，$a$的值为$1$，$-1$，$\frac{5}{2}$，$-4$.

三、解答题

12. 已知集合$A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+4x+p<0\}$，若$B\subseteq A$，求实数p的所有元素的集合.

解：$A=\{x\mid x>2$ 或 $x<-1\}$.

(1) 当$B=\varnothing$时，即 $16-4p\leqslant 0$，$p\geqslant 4$时，$B\subseteq A$.

(2) 当$B\neq\varnothing$时，即 $16-4p>0$ $\therefore p<4$时，$B=\{x\mid -2-\sqrt{4-p}<x<-2+\sqrt{4-p}\}$，要使$B\subseteq A$，必须$-2-\sqrt{4-p}\geqslant 2$或$-2+\sqrt{4-p}\leqslant -1$，解得$3\leqslant p<4$，综上使$B\supseteq A$，$p=\{p\mid p\geqslant 3\}$.

13. 已知集合$A=\{x\mid 10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，当$A\cap B=\varnothing$，求实数$m$的范围.

解：$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(1) 当$B=\varnothing$时，即$2m-1<m+1$，$\therefore m<2$，$A\cap B=\varnothing$.

(2) 当$B\neq\varnothing$时 $\begin{cases}2m-1\geqslant m+1\\ m+1>5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2m-1\geqslant m+1\\ 2m-1<-2\end{cases}$ 解得：$m>4$，这时$A\cap B=\varnothing$

故$m\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$.

14. 设$A=\{x\mid x^2-2x-8<0\}$ $B=\{x\mid x^2+2x-3>0\}$ $C=\{x\mid x^2-3ax+2a^2<0\}$，求实数$a$的取值范围，使

(1) $C\subseteq A\cap B$；　　(2) $C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

解：$A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{x\mid x<-3$ 或 $x>1\}$，$x^2-3ax+2a^2<0$，$(x-a)(x-2a)<0$

(1) $A\cap B=\{x\mid 1<x<4\}$，当$a>0$时，$C=\{x\mid a<x<2a\}$，$C\subseteq A\cap B$，由此得$\begin{cases}a\geqslant 1\\ 2a\leqslant 4\end{cases}$ $\therefore 1\leqslant a\leqslant 2$.

当$a<0$时，$C=\{x\mid 2a<x<a\}$，$C\subseteq A\cap B$ $\begin{cases}a\leqslant 4\\ 2a\geqslant 1\end{cases}$ $\therefore\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 4$ （舍去）.

当$a=0$时，$C=\{x\mid x^2<0\}=\varnothing$ $\therefore C\subseteq A\cap B$ $\therefore a$ $\{a\mid a=0$ 或 $1\leqslant a\leqslant 2\}$.

(2) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2\}$，当$a<0$时，$C=\{x\mid 2a<x<a\}$ 使$C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$，$\begin{cases}2a<-3\\ a>-2\end{cases}$ 解得$-2<a<-\frac{3}{2}$，当$a>0$时，$C=\{x\mid a<x<2a\}$，使$C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$ $\begin{cases}a<-3\\ 2a>-2\end{cases}$ a的值不存在，$\therefore a\in(-2,-\frac{3}{2})$.

15. 设方程$x^2-ax+b=0$的两根为α、β，方程$x^2-bx+c=0$的两根为υ、δ，又α、β、υ、δ互不相等，设$M=\{\alpha、\beta、\upsilon、\delta\}$.$S=\{x\mid x=u+v,u\in M,v\in M$且$u\neq v\}$，$P=\{x\mid x=uv,u\in M,v\in M$且$u\neq v\}$，又$S=\{5,7,8,9,10,12\}$，$P=\{6,10,14,15,21,35\}$，求$a$、$b$、$c$的值.

解：$S=\{\alpha+\beta,\alpha+\upsilon,\alpha+\delta,\beta+\upsilon,\beta+\delta,\upsilon+\delta\}$，$P=\{\alpha\beta,\alpha\upsilon,\alpha\delta,\beta\upsilon,\beta\delta,\upsilon\delta\}$，$\alpha+\beta=a$，$\alpha$，$\beta=b$，$\upsilon+\delta=b$，$\upsilon\delta=c$.

$\therefore 3(\alpha+\beta+\delta+\upsilon)=3(a+b)=5+7+8+9+10+12=51$ $\therefore a+b=17$，又$\because(\alpha\beta\upsilon\delta)^3=(bc)^3=6\times 10\times 14\times 15\times 21\times 35=210^3$，$bc=210$，$S\cap P=\{10\}$，又$\because b$是$S$、$P$的公共元素，$\therefore b=10$，$a=7$，$c=21$.

16. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b$，$(a,b\in\mathbf{R})$，且集合$A=\{x\mid x=f(x)\}$，$B=\{x\mid x=f[f(x)]\}$.(1) 求证：$A\subseteq B$；(2) 当$A=\{-1,3\}$时，用列举法表示B.

解：(1) 任取$x\in A$，则$x=f(x)$，从而$x=f[f(x)]$，$\therefore x\in B$，$A\subseteq B$.

(2) $\because A=\{-1,3\}$，$\therefore -1=f(-1)$，$3=f(3)$，即$-1=1-a+b$，$3=9+3a+b$，解得$a=-1$，$b=-3$，$\therefore f(x)=x^2-x-3$.

$\therefore f[f(x)] = (x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$,

$\therefore x=f[f(x)]$ 可化简为 $(x^2-x-3)^2=x^2$，$\therefore x^2-x-3=\pm x$,

$\therefore x^2-2x-3=0$ 或 $x^2=3$，解得：$x_1=3$，$x_2=-1$，$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=-\sqrt{3}$,

$\therefore B=\{3, -1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

17. 已知 $M=\{a, a+d, a+2d\}$，$N=\{a, aq, aq^2\}$，$a\neq0$，且 $M=N$，求 q 的值.

解： $\because M=N$，$\therefore$ 它们的元素可能有 2 种对应相等关系

即 $\begin{cases}a+d=aq\\ a+2d=aq^2\end{cases}$ ① 或 $\begin{cases}a+d=aq^2\\ a+2d=aq\end{cases}$ ②

由①得 $q^2-2q+1=0$ 得 $q=1$ 与 N 中 $a\neq aq\neq aq^2$ 矛盾舍去；

由②得 $2q^2-q-1=0$ 得 $q=-\frac{1}{2}$ ($q=1$ 舍去).

$\therefore q=-\frac{1}{2}$.

点评： 尽管①求得的 q 值不符题意舍去，但得出①并解之求 q 的过程是不可缺少的，要检验是否与已知矛盾.

二 一元二次不等式

I. 基础题

一、选择题

1. 不等式 $|x-2|>1$ 的解集为（ ）.

A. $\{x \mid x>3$ 或 $x<-3\}$　　B. $\{x \mid -3<x<3\}$

C. $\{x \mid x>3$ 或 $x<1\}$　　D. $\{x \mid 1<x<3\}$

答： C.

解： $\because |x-2|>1$. $\therefore x-2>1$ 或 $x-2<-1$,

即 $x>3$ 或 $x<1$. 故本题应选 C.

2. 若 $|3x-1|<2$，化简 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{9x^2+6x+1}$ 的结果是（ ）.

A. $-2x-2$　　B. $-4x$　　C. $2x+2$　　D. $4x$

答： C.

解： $\because |3x-1|<2$，$\therefore -\frac{1}{3}<x<1$，$\therefore x-1<0$，$3x+1>0$,

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3x+1)^2}=|x-1|+|3x+1|$

$=-(x-1)+3x+1=2x+2$.

故本题应选 C.

3. 不等式 $|x+2|>\frac{3x+14}{5}$ 的解是（ ）.

A. $x<-3$ 或 $x>2$　　B. $-3<x<2$

C. $-2<x<0$　　D. $0<x<2$

答： A.

解： 原不等式同解于 $x+2<-\frac{3x+14}{5}$ 或 $x+2>\frac{3x+14}{5} \Leftrightarrow x<-3$ 或 $x>2$.

4. 不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的解集是（ ）.

A. $\{x \mid -3<x<2\}$　　B. $\{x \mid -1<x<2\}$

C. $\{x \mid -2<x<1\}$　　D. $\{x \mid -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\}$

答：A.

解析：分区间讨论，然后进行综合．

解：当 $x<-2$ 时，原不等式化为

$-(x-1)-(x+2)<5$，

即 $x>-3$，

此时原不等式的解为 $-3<x<-2$；

当 $-2\leqslant x<1$ 时，原不等式化为 $-(x-1)+(x+2)<5$，

当 $x\in\mathbf{R}$，此时原不等式的解为 $-2\leqslant x<1$，

当 $x\geqslant1$ 时，原不等式化为 $(x-1)+(x+2)<5$，

即 $x<2$，此时原不等式的解为 $1\leqslant x<2$.

综上可知，原不等式的解集为 $\{x \mid -3<x<2\}$．

5. 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $(1-|x|)(1+x)>0$ 的充要条件是（　　）．

A. $|x|<1$　　B. $x<-1$

C. $|x|>1$　　D. $x<-1$ 或 $-1<x<1$

答：D.

解：∵若 $(1-|x|)(1+x)>0$，则有：$\begin{cases}1-|x|>0\\1+x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-|x|<0\\1+x<0\end{cases}$

∴ $-1<x<-1$ 或 $x<-1$.

反之若 $x<-1$ 则 $1-|x|<0$，$1-x<0$，∴ $(1-|x|)(1+x)>0$.

若 $-1<x<1$，则 $1-|x|>0$，$1+x>0$，则 $(1-|x|)(1+x)>0$，故选 D.

6. 若关于 x 的不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集为 $\varnothing$，则 a 的取值范围为（　　）．

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,3)$

答：C.

解：在数轴上考查或利用绝对值不等式的性质得 $|x+2|+|x-1|\geqslant|(x+2)-(x-1)|=3$，因此当 $a\leqslant3$ 时无解．选 C.

7. 不等式 $|2x-\log_2 x|<2x+|\log_2 x|$ 成立，则（　　）．

A. $1<x<2$　　B. $0<x<1$　　C. $x>1$　　D. $x>2$

答：C.

解：首先有 $x>0$，且 $\log_2 x>0$，∴ $x>1$，选 C.

8. 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，则 $a+b$ 的值为（　　）．

A. 10　　B. -10　　C. 14　　D. -14

答：D.

解：由已知得：$a<0$ 且 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 是 $ax^2+bx+2=0$ 的 2 个根．由韦达定理得 $\begin{cases}-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\\frac{2}{a}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=-12\\b=-2\end{cases}$，$a+b=-12-2=-14$，选 D.

9. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x \mid \alpha<x<\beta\}$，其中 $\beta>\alpha>0$，则不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集是（　　）．

A. $\{x \mid \frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}\}$　　B. $\{x \mid -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\}$