

F. R. GANTMACHER

MATRIZENRECHNUNG

I



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

HOCHSCHULBÜCHER FÜR MATHEMATIK
HERAUSGEGEBEN VON H. GRELL, K. MARUHN UND W. RINOW

BAND 36

MATRIZENRECHNUNG

TEIL I

ALLGEMEINE THEORIE

VON
F. R. GANTMACHER

Mit 5 Abbildungen



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN 1958

Ф. Р. Гантмахер
Теория матриц (Часть I)
Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва 1954

Übersetzung aus dem Russischen: Klaus Stengert
Redaktion: Helmut Boseck
Verantwortlicher Verlagsredakteur: Ludwig Boll

Alle Rechte vorbehalten
Copyright 1958 by VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206.435.98/57
Satz, Druck und Einband: Leipziger Volkszeitung III 18 138

AUS DEM VORWORT ZUR ORIGINALAUSGABE

Die Matrizenrechnung besitzt heute in den verschiedensten Gebieten der Mathematik, Mechanik, theoretischen Physik, theoretischen Elektrotechnik usw. vielfältige Anwendungsmöglichkeiten. Das vorliegende Buch stellt einen Versuch dar, sowohl die Probleme der Matrizentheorie als auch ihre mannigfachen Anwendungen hinreichend umfassend darzustellen.

Dem Buch liegen Zyklen von Vorlesungen über Matrizenrechnung und ihre Anwendung zugrunde, die ich zu verschiedenen Zeiten während der letzten 17 Jahre an der Staatlichen Moskauer Lomonossow-Universität, an der Staatlichen Tbilisser Stalin-Universität und am Moskauer Physikalisch-technischen Institut gehalten habe.

Das Buch ist nicht nur für Mathematiker (Studenten, Aspiranten und Wissenschaftler) gedacht, sondern auch für Spezialisten der Nachbarggebiete (Physiker, Entwicklungsingenieure), die sich für die Mathematik und ihre Anwendungen interessieren. Aus diesem Grunde war ich bestrebt, den Stoff in möglichst verständlicher Form wiederzugeben. Vom Leser wird im allgemeinen nur die Kenntnis der Determinantenrechnung sowie einer Vorlesung über höhere Mathematik in dem an Technischen Hochschulen üblichen Umfang vorausgesetzt. Lediglich einzelne Paragraphen in den letzten Kapiteln des Buches erfordern zusätzliche mathematische Kenntnisse. Ferner habe ich mich bemüht, die einzelnen Kapitel möglichst unabhängig voneinander zu gestalten. So stützt sich beispielsweise Kapitel V „Matrizenfunktionen“ nicht auf die Untersuchungen, die in den Kapiteln II und III durchgeführt werden. An den Stellen in Kapitel V, an denen erstmalig die in Kapitel IV eingeführten grundlegenden Begriffe benutzt werden, findet man entsprechende Hinweise. So hat der Leser, der schon mit der elementaren Matrizenrechnung vertraut ist, die Möglichkeit, unmittelbar mit der Lektüre der ihn interessierenden Kapitel zu beginnen.

Das Buch besteht aus zwei Teilen, die insgesamt fünfzehn Kapitel umfassen.

In den Kapiteln I und III werden die wichtigsten Kenntnisse über Matrizen und lineare Operatoren vermittelt; ferner wird der Zusammenhang zwischen Operatoren und Matrizen hergestellt.

In Kapitel II werden die theoretischen Grundlagen der GAUSSschen Eliminationsmethode dargelegt und in Verbindung damit praktische Methoden zur effektiven Lösung von Systemen mit n linearen Gleichungen für großes n entwickelt. Auch wird der Leser mit den Rechenregeln für solche Matrizen bekannt gemacht, die in rechteckige „Kästchen“ oder „Blöcke“ aufspaltbar sind.

In Kapitel IV werden einige grundlegende Begriffe eingeführt: das „charakteristische“ und das „Minimal“-Polynom einer quadratischen Matrix, „adjungierte“ und „reduzierte adjungierte“ Matrizen.

Das Kapitel V, das den Matrizenfunktionen gewidmet ist, enthält eine allgemeine Definition und konkrete Verfahren zur Berechnung von $f(A)$, wenn $f(\lambda)$ eine Funktion des skalaren Arguments λ , aber A eine quadratische Matrix ist. Der Begriff Matrizenfunktion wird in den Paragraphen 5 und 6 dieses Kapitels benutzt, um die Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten aufzufinden und vollständig zu untersuchen. Sowohl der Begriff der Matrizenfunktion als auch die damit zusammenhängenden Untersuchungen von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten stützen sich lediglich auf den Begriff des Minimalpolynoms einer Matrix und vermeiden (im Unterschied zu der üblichen Darstellung) die Verwendung der sogenannten „Elementarteiler-Theorie“, die in den Kapiteln VI und VII dargelegt wird.

Die ersten fünf Kapitel umfassen die Grundlagen der Matrizenrechnung und ihrer Anwendungen. Tiefgehende Fragen der Matrizenrechnung sind mit der Reduktion der Matrizen auf Normalform verbunden. Diese Reduktion wird mit Hilfe der WEIERSTRASSschen Elementarteiler-Theorie durchgeführt. In Anbetracht ihrer Wichtigkeit werden im vorliegenden Buch zwei Darstellungen dieser Theorie gegeben: die analytische in Kapitel VI und die geometrische in Kapitel VII. Wir machen den Leser auf die Paragraphen 8 und 9 des Kapitels VI aufmerksam, in denen praktische Methoden zur Berechnung derjenigen Matrizen behandelt werden, die eine gegebene Matrix auf Normalform transformieren. In § 8 des Kapitels VII wird die Methode von A. N. KRYLOW zur Berechnung des charakteristischen Polynoms ausführlich behandelt.

In Kapitel VIII werden gewisse Typen von Matrixgleichungen gelöst. Dabei wird auch die Fragestellung betrachtet, alle Matrizen zu bestimmen, die mit einer gegebenen Matrix vertauschbar sind; ferner werden die mehrdeutigen Matrizenfunktionen $\sqrt[n]{A}$ und $\ln A$ im einzelnen untersucht.

Die Kapitel IX und X sind der Theorie der linearen Operatoren im unitären Raum und der Theorie der quadratischen und hermiteschen Formen gewidmet. Diese Kapitel stützen sich nicht auf die WEIERSTRASSsche Elementarteiler-Theorie und benutzen lediglich die grundlegenden Sätze über Matrizen und lineare Operatoren, die in den ersten drei Kapiteln des Buches dargestellt sind. In § 8 des Kapitels X wird die Theorie der Formen zur Untersuchung der Grundschwingungen von Systemen mit n Freiheitsgraden benutzt. In § 10 dieses Kapitels werden die subtilen Untersuchungen von FROBENIUS über die Theorie der HANKELschen Formen wiedergegeben. Diese Untersuchungen werden im weiteren (in Kapitel XV) bei der Betrachtung der Sonderfälle des ROUTH-HURWITZschen Problems verwendet.

Die folgenden fünf Kapitel bilden den zweiten Teil des Buches. In Kapitel XI werden Normalformen für komplexe, symmetrische, schief-symmetrische und orthogonale Matrizen definiert und interessante Zusammenhänge dieser Matrizen mit reellen Matrizen derselben Klassen und mit unitären Matrizen aufgezeigt.

In Kapitel XII wird die allgemeine Theorie der Matrizenbüschel der Form $A + \lambda B$ dargelegt, wobei A und B beliebige rechteckige Matrizen gleichen Typs sind. Wie die Untersuchungen der regulären Matrizenbüschel $A + \lambda B$ auf der Grundlage der WEIERSTRASSschen Elementarteiler-Theorie durchgeführt werden, stützt sich das Studium der singulären Büschel auf die KRONECKERSche Theorie der minimalen Indizes, die eine Weiterentwicklung der WEIERSTRASSschen Elementarteiler-Theorie darstellt. Mit Hilfe der KRONECKERSchen Theorie (der Verfasser hofft, daß es ihm gelungen ist, die Darstellung dieser Theorie zu vereinfachen) wird in Kapitel XII die kanonische Form eines Matrizenbüschels im allgemeinen Fall aufgestellt. Die dabei gewonnenen Ergebnisse werden auf die Untersuchung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angewandt.

In Kapitel XIII werden bemerkenswerte Spektraleigenschaften von Matrizen mit nichtnegativen Elementen bewiesen und zwei wichtige Anwendungsgebiete der Matrizen dieser Klasse betrachtet: a) die homogenen MARKOFFschen Ketten der Wahrscheinlichkeitsrechnung und b) die elastischen Schwingungen in der Mechanik und ihre Oszillationseigenschaften. Die Matrizenmethoden zur Untersuchung homogener MARKOFFscher Ketten wurden in den Arbeiten W. I. ROMANOWSKYS (siehe [25]) entwickelt und stützen sich auf die Tatsache, daß die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen MARKOFFschen Kette mit endlich vielen Zuständen eine Matrix speziellen Typs mit nichtnegativen Elementen ist (eine „stochastische Matrix“).

Die Oszillationseigenschaften elastischer Schwingungen hängen mit einer anderen wichtigen Klasse nichtnegativer Matrizen, mit den „Oszillationsmatrizen“, zusammen. Diese Matrizen und ihre Anwendungen wurden von M. G. KREIN zusammen mit dem Verfasser dieses Buches untersucht. In Kapitel XIII werden nur einige grundlegende Resultate dieses Gebietes erörtert. Eingehende Untersuchungen des gesamten Materials findet der Leser in der Monographie [7].

In Kapitel XIV sind diejenigen Anwendungen der Matrizentheorie zusammengestellt, die sich auf Systeme von Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten beziehen. Dabei nimmt die Theorie der Produktintegrale und im Zusammenhang damit des VOLTERRAschen Infinitesimalkalküls einen zentralen Platz ein (§ 5 bis 9). Diese Fragen sind in der sowjetischen mathematischen Literatur fast gar nicht behandelt worden. In den ersten Paragraphen und in § 11 werden (im LJAPUNOFFschen Sinne) reduzierbare Systeme im Zusammenhang mit der Frage der Stabilität von Bewegungen studiert und gewisse Resultate von N. P. JERUGIN angegeben. Die Paragraphen 9 bis 11 beziehen sich auf die analytische Theorie von Differentialgleichungssystemen. Hier wird die Unrichtigkeit eines Hauptsatzes von BIRKHOFF nachgewiesen (gewöhnlich benutzt man diesen Satz dazu, die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung eines singulären Punktes zu untersuchen). Ferner wird die kanonische Form der Lösung für den Fall aufgestellt, daß es sich um eine schwach singuläre Stelle handelt.

In § 12 des Kapitels XIV werden in Form einer Übersicht einige Resultate der Untersuchungen J. A. LAPPO-DANILEWSKIS angegeben, die analytische

Funktionen mehrerer Matrizen und deren Anwendungen auf Differentialgleichungssysteme betreffen.

Das letzte Kapitel (XV) ist der Anwendung der Theorie der quadratischen Formen (und insbesondere der HANKELSchen Formen) auf das ROUTH-HURWITZsche Problem, d. h. der Bestimmung der Anzahl der Wurzeln eines Polynoms, die in der rechten Halbebene der komplexen Zahlenebene liegen ($\operatorname{Re}(z) > 0$), gewidmet. In den ersten Paragraphen dieses Kapitels wird die klassische Behandlung des Problems erörtert. Im Paragraphen 5 wird ein Satz von A. M. LJAPUNOFF bewiesen, der ein dem ROUTH-HURWITZschen Kriterium äquivalentes Stabilitätskriterium darstellt. Neben dem ROUTH-HURWITZschen Stabilitätskriterium wird im Paragraph 13 dieses Kapitels das relativ wenig bekannte Kriterium von LIÉNARD und CHIPART erschlossen, in welchem die Anzahl der Determinantenungleichungen etwa halb so groß ist wie in dem ROUTH-HURWITZschen Kriterium.

Am Ende des XV. Kapitels wird der enge Zusammenhang zweier bemerkenswerter Sätze von A. A. MARKOFF und P. L. TSCHEBYSCHEFF mit dem Stabilitätsproblem gezeigt; diese Sätze wurden von den berühmten Autoren auf der Grundlage der Theorie der Reihenentwicklung gewisser Kettenbrüche speziellen Typs nach abnehmenden Potenzen des Arguments gewonnen. Hier werden diese Sätze mit Hilfe der Matrizenrechnung bewiesen.

F. R. Gantmacher

BEMERKUNGEN ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Um dem interessierten Leserkreis wenigstens den theoretischen Teil schneller zugänglich zu machen, erscheinen in der deutschen Ausgabe die beiden Teile des Buches als einzelne Bände.

Gegenüber dem Original ergaben sich Änderungen in § 5 von Kapitel IX auf Grund einer im Jahre 1954 erschienenen Arbeit des Verfassers; ferner in § 6 von Kapitel XII und in § 5 von Kapitel XIV auf Grund von Mitteilungen des Verfassers während der Vorbereitung der deutschen Ausgabe.

Das Literaturverzeichnis im ersten Band enthält diejenigen Bücher und Arbeiten, auf die im Text des ersten Bandes verwiesen wird. Der zweite Band wird ein ausführliches Literaturverzeichnis über das gesamte Stoffgebiet enthalten.

Im Sachverzeichnis des zweiten Bandes wird auch das Sachverzeichnis dieses ersten Bandes enthalten sein.

Einige Anmerkungen der Redaktion der deutschen Ausgabe sind als solche gekennzeichnet.

Schließlich möchten die Herausgeber und der Verlag Herrn Prof. Dr. F. R. GANTMACHER für seine bereitwillige Mitarbeit an der deutschen Ausgabe und die Durchsicht einer Korrektur sowie Herrn Dr. R. ZURMÜHL für einige Bemerkungen und Hinweise ihren Dank aussprechen.

INHALTSVERZEICHNIS

Erster Teil: Allgemeine Theorie

I. Matrizen und Matrizenoperationen

§ 1. Definition der Matrix. Bezeichnungen	1
§ 2. Addition und Multiplikation von Matrizen	3
§ 3. Quadratische Matrizen	11
§ 4. Assoziierte Matrizen. Minoren inverser Matrizen	18

II. Der GAUSSsche Algorithmus

§ 1. Die GAUSSsche Eliminationsmethode	22
§ 2. Eine mechanische Interpretation des GAUSSschen Algorithmus	27
§ 3. Der SYLVESTERsche Determinantensatz	29
§ 4. Zerlegung quadratischer Matrizen in Produkte von Dreiecksmatrizen	31
§ 5. Übermatrizen. Das Rechnen mit Übermatrizen. Der verallgemeinerte GAUSSsche Algorithmus	38

III. Lineare Operatoren im n -dimensionalen Vektorraum

§ 1. Vektorräume	47
§ 2. Lineare Operatoren, die einen n -dimensionalen Vektorraum in einen m -dimensionalen Vektorraum abbilden	52
§ 3. Addition und Multiplikation linearer Operatoren	54
§ 4. Koordinatentransformationen	55
§ 5. Äquivalente Matrizen. Der Rang eines Operators. Die SYLVESTERsche Un- gleichung	57
§ 6. Lineare Operatoren, die einen n -dimensionalen Vektorraum in sich abbilden	62
§ 7. Charakteristische Wurzeln und Eigenvektoren linearer Operatoren	65
§ 8. Lineare Operatoren einfacher Struktur	68

IV. Charakteristisches Polynom und Minimalpolynom einer Matrix

§ 1. Addition und Multiplikation von Matrizenpolynomen	71
§ 2. Rechte und linke Division von Matrizenpolynomen	72
§ 3. Der verallgemeinerte BÉZOUTsche Satz	75
§ 4. Das charakteristische Polynom einer Matrix. Adjungierte Matrizen	76
§ 5. Die Methode von D. K. FADDEJEW zur gleichzeitigen Berechnung des charakteristischen Polynoms und der adjungierten Matrix	81
§ 6. Das Minimalpolynom einer Matrix	83

V. Matrizenfunktionen

§ 1. Definition der Matrizenfunktion	88
§ 2. Das LAGRANGE-SYLVESTERsche Interpolationspolynom	93
§ 3. Andere Wege zur Bestimmung von $f(A)$. Die Komponenten der Matrix A	96
§ 4. Darstellung von Funktionen durch Matrizenreihen	101
§ 5. Die Anwendung der Matrizenfunktionen zur Integration linearer Diffe- rentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	107
§ 6. Stabilität im Fall linearer Systeme	115

VI. Äquivalente Transformationen von Polynommatrizen. Analytische Elementarteilertheorie

§ 1. Elementare Transformationen von Polynommatrizen	120
§ 2. Die kanonische Form einer λ -Matrix	124
§ 3. Invariantenteiler und Elementarteiler von Polynommatrizen	128
§ 4. Äquivalenz linearer Binome	134
§ 5. Kriterien für die Ähnlichkeit von Matrizen	136
§ 6. Normalformen von Matrizen	138
§ 7. Die Elementarteiler der Matrix $f(A)$	142
§ 8. Eine Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix	147
§ 9. Eine weitere Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix	152

VII. Die Struktur linearer Operatoren im n -dimensionalen Vektorraum. Geometrische Elementarteilertheorie

§ 1. Das Minimalpolynom eines Vektors bzw. eines Vektorraums (bezüglich eines gegebenen linearen Operators)	162
§ 2. Die Zerlegung eines Vektorraums in invariante Unterräume mit teilerfremden Minimalpolynomen	164
§ 3. Kongruenzen. Quotientenräume	167
§ 4. Die Zerlegung eines Vektorraums in zyklische invariante Unterräume ...	170
§ 5. Normalformen einer Matrix	175
§ 6. Invariantenteiler, Elementarteiler	177
§ 7. Die JORDANSche Normalform einer Matrix	184
§ 8. Die Methode von A.N. KRYLOW zur Transformation der Säkulargleichung	186

VIII. Matrizengleichungen

§ 1. Die Gleichung $AX = XB$	199
§ 2. Der Spezialfall $A = B$. Vertauschbare Matrizen	204
§ 3. Die Gleichung $AX - XB = C$	208
§ 4. Die Gleichung $f(X) = 0$	209
§ 5. Gleichungen von Matrizenpolynomen	210
§ 6. Die m -ten Wurzeln regulärer Matrizen	214
§ 7. Die m -ten Wurzeln singulärer Matrizen	217
§ 8. Der Logarithmus einer Matrix	222

IX. Lineare Operatoren im unitären Raum

§ 1. Vorbemerkungen	224
§ 2. Metrische Räume	225
§ 3. Die GRAMSche Determinante	228
§ 4. Orthogonalprojektionen	229
§ 5. Die geometrische Bedeutung der GRAMSchen Determinante	232
§ 6. Orthogonalisierung	237
§ 7. Orthonormalbasen	242
§ 8. Adjungierte Operatoren	245
§ 9. Normale Operatoren im unitären Raum	247
§ 10. Spektren normaler, hermitescher und unitärer Operatoren	249
§ 11. Positiv semidefinite und positiv definite hermitesche Operatoren	253
§ 12. Polare Zerlegung linearer Operatoren im unitären Raum. CAYLEYSche Formeln	254
§ 13. Lineare Operatoren im euklidischen Raum	258

§ 14. Die polare Zerlegung linearer Operatoren und die CAYLEYSchen Formeln im euklidischen Raum	263
§ 15. Vertauschbare normale Operatoren	267
X. Quadratische und hermitesche Formen	
§ 1. Lineare Transformationen quadratischer Formen	270
§ 2. Die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Qua- draten. Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen	272
§ 3. Die Methoden von LAGRANGE und JACOBI zur Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten	274
§ 4. Semidefinite und definite quadratische Formen	279
§ 5. Die Hauptachsentransformation quadratischer Formen	283
§ 6. Formenbüschel	284
§ 7. Extremaleigenschaften der charakteristischen Wurzeln regulärer Formen- büschel	291
§ 8. Kleine Schwingungen von Systemen mit n Freiheitsgraden	299
§ 9. Hermitesche Formen	304
§ 10. HANKELSche Formen	310
Literaturverzeichnis	320
Sachregister	322

I. MATRIZEN UND MATRIZENOPERATIONEN

§ 1. Definition der Matrix. Bezeichnungen

Gegeben sei ein Zahlkörper¹⁾ K .

Definition 1. Ein rechteckiges Schema von Zahlen aus K ,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

nennen wir eine *Matrix*. Ist $m = n$, so heißt diese Matrix *quadratisch* und die Zahl m bzw. n ihre *Ordnung*²⁾. Im allgemeinen Fall ist die Matrix *rechteckig*²⁾ [vom *Typ* (m, n)]. Die Zahlen, aus denen sich die Matrix zusammensetzt, werden ihre *Elemente* genannt.

Bezeichnungen. Die Elemente sind häufig mit zwei Indizes versehen, deren erster die Zeile (Zeilenindex) und deren zweiter die Spalte (Spaltenindex) bezeichnet, in der das entsprechende Element steht.

Neben der Schreibweise (1) wird für Matrizen auch folgende kürzere Bezeichnung verwendet:

$$\|a_{ik}\| \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Häufig werden wir die Matrix (1) auch durch einen Buchstaben bezeichnen und z. B. von der Matrix A sprechen. Ist A eine quadratische Matrix n -ter Ordnung, so schreiben wir $A = \|a_{ik}\|_1^n$. Die Determinante von $A = \|a_{ik}\|_1^n$ bezeichnen wir mit $|a_{ik}|_1^n$ oder mit $|A|$.

¹⁾ Unter einem *Zahlkörper* verstehen wir eine Menge von Zahlen, in der die folgenden vier Operationen stets eindeutig ausführbar sind: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, ausgenommen die Division durch Null.

Als Beispiele für Zahlkörper führen wir an: die Menge aller rationalen Zahlen, die Menge aller reellen Zahlen und die Menge aller komplexen Zahlen.

Wir setzen voraus, daß alle im folgenden vorkommenden Zahlen stets dem vorgegebenen Zahlkörper angehören.

²⁾ Für *Ordnung* ist in der Literatur auch die Bezeichnung *Grad* üblich. Sie wird in diesem Buch nicht benutzt, da sich sonst bei der Betrachtung von Matrizenpolynomen (die ja als Polynome ebenfalls einen Grad besitzen) Bezeichnungsschwierigkeiten ergeben würden (*Anm. d. Red.*).

³⁾ Wenn im folgenden einfach von einer „Matrix“ gesprochen wird, so ist diese nicht notwendig als quadratisch vorauszusetzen; in dem speziellen Fall quadratischer Matrizen wird stets besonders darauf hingewiesen (*Anm. d. Red.*).

Für die aus gewissen Elementen einer gegebenen Matrix gebildeten Determinanten führen wir folgende abkürzende Bezeichnung ein:

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Ist $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$ und $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$, so nennen wir die Determinante (3) einen *Minor* (oder eine *Unterdeterminante*) p -ter Ordnung der Matrix A .

Die Matrix $A = \|a_{ik}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$) besitzt $\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{p}$ Minoren p -ter Ordnung der Form

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m \\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n \end{array} ; p \leq m, n \right). \quad (3')$$

Die Minoren (3'), für die $i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_p = k_p$ ist, heißen *Hauptminoren*.

Nach (3) können wir die Determinante der quadratischen Matrix $A = \|a_{ik}\|_1^n$ auch folgendermaßen schreiben:

$$|A| = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Die größte unter den Ordnungen der von Null verschiedenen Minoren einer Matrix heißt ihr *Rang*¹⁾. Ist r der Rang einer rechteckigen Matrix vom Typ (m, n) , so ist offenbar $r \leq m$ und $r \leq n$.

Eine Matrix

$$\left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\|,$$

die nur aus einer Spalte besteht, nennen wir *Spaltenmatrix* oder *Spalte* und bezeichnen sie mit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Eine Matrix

$$\|z_1, z_2, \dots, z_n\|,$$

die nur aus einer Zeile besteht²⁾, nennen wir *Zeilenmatrix* oder *Zeile* und bezeichnen sie mit $[z_1, z_2, \dots, z_n]$.

¹⁾ Verschwinden auch alle Minoren erster Ordnung, d. h. sind alle Elemente der Matrix gleich Null (*Nullmatrix*), so schreiben wir ihr den Rang Null zu (*Anm. d. Red.*).

²⁾ Für die beiden angeführten Spezialfälle von Matrizen wird auch der Begriff *einreihige Matrix* verwendet. Derartige Matrizen werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet (*Anm. d. Red.*).

Eine quadratische Matrix

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix},$$

bei der alle Elemente, die außerhalb der Hauptdiagonalen stehen, gleich Null sind, heißt *Diagonalmatrix* und wird folgendermaßen bezeichnet¹⁾: $\|d_i d_{ik}\|_1^n$

oder

$$\{d_1, d_2, \dots, d_n\}.$$

Werden m Größen $y_1, y_2, \dots, y_m$ linear und homogen durch n andere Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ausgedrückt,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

oder kürzer

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (4')$$

so sprechen wir von einer *linearen Transformation* (oder einer *linearen Substitution* der y_i durch die x_k). Die Koeffizienten dieser Transformation bilden eine Matrix der Form (1) [vom Typ (m, n)]. Die lineare Transformation (4) definiert eindeutig eine Matrix der Form (1) und umgekehrt.²⁾

Von den Eigenschaften der linearen Transformation (4) ausgehend, definieren wir im folgenden Paragraphen die wichtigsten Matrizenoperationen.

§ 2. Addition und Multiplikation von Matrizen

Wir definieren folgende Matrizenoperationen: die Addition von Matrizen, die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl und die Multiplikation von Matrizen.

¹⁾ δ_{ik} ist das **KRONECKERSymbol**: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$

²⁾ Zwei Matrizen sind also genau dann gleich, wenn sie elementweise übereinstimmen; dabei ist vorausgesetzt, daß sie von gleichem Typ sind (*Anm. d. Red.*).

1. Betrachtet man die linearen Transformationen

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

und

$$z_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6)$$

wobei die x_i in beiden Fällen dieselben sind, so gilt

$$y_i + z_i = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{ik}) x_k \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

In Übereinstimmung damit erhalten wir

Definition 2 (Matrizenaddition). Es seien zwei Matrizen gleichen Typs $A = \|a_{ik}\|$ und $B = \|b_{ik}\|$ gegeben. Die Matrix $C = \|c_{ik}\|$ vom gleichen Typ heißt die *Summe der Matrizen A und B*, wenn ihre Elemente die Summen der entsprechenden Elemente der gegebenen Matrizen sind:

$$C = A + B,$$

wenn

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n).$$

Beispiel.

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 & b_3 + d_3 \end{array} \right\|.$$

Nach Definition 2 kann man nur Matrizen gleichen Typs addieren. Ebenso ergibt sich, daß die Koeffizientenmatrix der Transformation (7) die Summe der Koeffizientenmatrizen (5) und (6) ist.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß die Matrizenaddition kommutativ und assoziativ ist:

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Dabei sind A , B und C beliebige Matrizen gleichen Typs.

Die Matrizenaddition läßt sich für eine beliebige (endliche) Anzahl von Summanden entsprechend verallgemeinern.

2. Wir multiplizieren in der Transformation (5) $y_1, y_2, \dots, y_m$ mit einer Zahl α aus K . Dann gilt

$$\alpha y_i = \sum_{k=1}^n (\alpha a_{ik}) x_k \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

In Übereinstimmung damit erhalten wir

Definition 3 (Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl). Die Matrix C wird das *Produkt der Matrix A mit der Zahl α* genannt [A vom Typ (m, n) , α aus K],

wenn ihre Elemente die Produkte der entsprechenden Elemente von A mit der Zahl α sind und sie den gleichen Typ besitzt:

$$C = \alpha A,$$

wenn

$$c_{ik} = \alpha a_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n).$$

Beispiel.

$$\alpha \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{vmatrix}.$$

Es gilt¹⁾:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Dabei sind A und B beliebige Matrizen gleichen Typs, α und β Zahlen aus $\mathbb{K}$.

Die Differenz $A - B$ zweier Matrizen gleichen Typs wird folgendermaßen definiert:

$$A - B = A + (-1)B.$$

Ist A eine quadratische Matrix n -ter Ordnung und α eine Zahl aus $\mathbb{K}$, so gilt²⁾

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|.$$

3. Wir betrachten die lineare Transformation

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

und drücken $y_1, y_2, \dots, y_n$ durch $x_1, x_2, \dots, x_n$ mittels der linearen Transformation

$$y_k = \sum_{j=1}^q b_{kj} x_j \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

aus; setzen wir nun in (8) die aus (9) gewonnenen Ausdrücke für $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein, so erhalten wir

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^q b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^q \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (10)$$

(10) ist die „zusammengesetzte“ Transformation, bei der die z_i direkt durch die x_j ausgedrückt werden. In Übereinstimmung damit erhalten wir

¹⁾ In entsprechender Weise definiert man die Matrix $A\alpha$. Es ist $\alpha A = A\alpha$ (*Anm. d. Red.*).

²⁾ Dabei sind $|A|$ und $|\alpha A|$ die Determinanten der Matrizen A und αA (siehe Seite 1).

Definition 4 (*Matrizenmultiplikation*). Die Matrix

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{vmatrix}$$

ist das Produkt der beiden Matrizen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{vmatrix},$$

wenn das Element c_{ik} , das in der i -ten Zeile und der k -ten Spalte der Produktmatrix steht, gleich dem (inneren) „Produkt“ der i -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B ist ¹⁾:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q). \quad (11)$$

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 & a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 & a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 & b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 & b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 \end{vmatrix}.$$

Nach Definition 4 ist die Koeffizientenmatrix der Transformation (10) das Produkt der Koeffizientenmatrizen (8) und (9).

Die Multiplikation zweier Matrizen ist nur dann ausführbar, wenn die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten ist.²⁾ Die Multiplikation ist insbesondere immer dann ausführbar, wenn beide Faktoren quadratische Matrizen gleicher Ordnung sind. Wir machen den Leser darauf aufmerksam, daß selbst in diesem Spezialfall die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{vmatrix}, \quad \text{aber} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ist $AB = BA$, so sagt man, die Matrizen A und B seien vertauschbar.

¹⁾ Unter dem (inneren) Produkt zweier Zahlenreihen $a_1, a_2, \dots, a_n$ und $b_1, b_2, \dots, b_n$ verstehen wir die Summe der Produkte der entsprechenden Glieder dieser Reihen: $\sum_{i=1}^n a_i b_i$.

²⁾ Nach I. SCHUR bezeichnet man mitunter die erste Matrix als mit der zweiten verkettet (*Anm. d. Red.*).

