运　筹　学

——规划论、存贮论及网络

路正南　张怀胜　编著

东南大学出版社

序

在发达国家和新兴工业化国家的现代化进程中，管理科学都起着巨大的作用。技术进步和管理进步是现代化经济建设轨道上的两个车轮，两者既具有纵向发展上的同步性，又具有横向水平上的相互适应性。在我国正经历着改革开放和建立社会主义市场经济的经济变革，管理科学是建立现代企业制度的重要内容，“管理出效益”已成为人们的共识。十一届三中全会以来，我国的管理科学得到了快速的发展，我国各类高等院校为适应经济建设的需要设立了管理学科门类的不同学科、专业，为国家培养了一大批博士、硕士、本科、专科各个层次的管理人才，他们在我国现代化建设进程中正在发挥着重要的作用。

运筹学是近四十年来发展起来的一门新兴学科。它是实现管理方法现代化和决策手段科学化的有力工具。运筹学在经营管理、工程技术、应用经济、军事科学以及社会科学等各个领域都有着极为广泛的应用。因此，运筹学已经成为高等院校管理、经济学科门类中各学科、专业的一门重要的专业基础课。运筹学在管理科学与工程、工商管理、应用经济学、军事指挥学以及控制科学与工程等学科的完整知识结构中是不可或缺的组成部分。

在中国市场经济体制逐步建立和完善的今天，作为定量优化决策科学的运筹学，发展极为迅速，有关的论文和著作不断涌现。由路正南、张怀胜编著的《运筹学——规划论、存贮论及网络》一书便是其中的一枝奇葩。在认真阅读全书的初稿以后，我认为该书的特点是：首先，体现了少而精的原则，全书容纳了运筹学的基本理论和方法，包括了线性规划论、存贮论及网络理论的主干内容。在

内容的选择上，注重应用的广泛性和实用性；其次，在博采众长的前提下，各章节问题提出明确、自然，内容阐述简捷、流畅，理论推导严密、简明。尽管全书涉及了不少数学方法，但由于把论述重心放在方法应用的思路分析上，读起来还是非常通俗易懂的。全书在内容安排上注意前后连贯性和相对独立性。

我愿意把这本书推荐给读者，相信它的出版问世，将对管理工作者提高优化决策水平有所助益。

李光久

1997年6月28日于京口

目　　录

第一章　线性规划基础

线性规划是运筹学的一个重要分支，也是运筹学最基本的部分。它是研究在现有人力、财力和物力等资源条件下，合理调配和有效使用资源，以达到最优目标(产量最高、利润最大、成本最小、资源消耗最少等)的一种数学方法。线性规划的数学理论是成熟的、丰富的，其解法统一而简单(即著名的单纯形法)，求出的解是精确的全局最优解。

第一节　线性规划问题及其数学模型

一、问题提出

为了说明什么是线性规划问题，我们先来看两个例子。

例 1　某工厂用 A、B、C、D 四种原料生产甲、乙两种产品，生产甲和乙所需各种原料的数量以及在一个计划期内各种原料的现有数量见表 1－1。又已知每单位产品甲、乙分别可获利 400 元和 600 元，问应如何安排生产才能获得最大利润？

表 1－1　　　　单位:公斤

产　　品	所需原料			
	A	B	C	D
甲	4	4	8	2
乙	4	2	0	4
现有原料数量	28	20	32	24

这个问题可以用以下的数学模型来描述，设生产甲种产品 x_1 个单位，乙种产品 x_2 个单位，则可得到的总利润为：

$$Z = 4x_1 + 6x_2 \quad \text{（百元）} \tag{1-1}$$

我们的目标是要使总利润达到最大，于是记成

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2 \tag{1-2}$$

Z 是 x_1、x_2 的线性函数，称为目标函数，$\max Z$ 表示求目标函数的最大值。

另一方面，由于各种原料的数量是有限的，不管如何安排产量 x_1 和 x_2，都应满足下列四个条件：

$$4x_1 + 4x_2 \leqslant 28 \tag{1-3}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \tag{1-4}$$

$$8x_1 \qquad \leqslant 32 \tag{1-5}$$

$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \tag{1-6}$$

此外，产量不能为负值，即

$$x_1、x_2 \geqslant 0 \tag{1-7}$$

(1-3) ～ (1-6) 的四个线性不等式和(1-7) 式的变量非负条件一起，称为约束条件。

根据上述讨论，我们所要解决的问题可简述为：在满足约束条件下，求出变量 x_1、x_2（称为决策变量）的值，使目标函数达到最大。其数学模型写为：

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leqslant 28 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ 8x_1 \qquad \leqslant 32 \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ x_1、x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

这就是例 1 的线性规划模型。

例 2 某公司经销一种产品。它下设三个生产点 A_1、A_2、A_3，每日的产量分别为 9 吨、5 吨、7 吨。该公司把这些产品分别运往四个销售点 B_1、B_2、B_3、B_4，各销售点每日销量分别为 3 吨、8 吨、4 吨、6 吨。每吨产品从各生产点到各销售点的运价如表 1－2 所示。问：该公司应如何调运产品，可在满足各销售点需要量的前提下，使总运费最少？

表 1－2

产 地	各地运价(元/吨)				日 产 量(吨)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	9	10	7	9
A_2	1	3	4	2	5
A_3	8	4	2	5	7
日销量(吨)	3	8	4	6	21

这是一个产销平衡的运输问题。设从生产点 A_i 到销售点 B_j 的调运数量为 x_{ij} 吨，则总运费为：

$$Z = 2x_{11} + 9x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} + 8x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} \quad (1\text{-}8)$$

我们要求它达到最小，于是记成：

$$\min Z = 2x_{11} + 9x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} + 8x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} \quad (1\text{-}9)$$

与上例类似，这里的 Z 是目标函数，它是 x_{ij} 的线性函数；而 min 表示求目标函数的最小值。

另一方面，考虑到各生产点的调出量应与其产量平衡，可得条件

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9 \quad (1\text{-}10)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 5 \tag{1-11}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 7 \tag{1-12}$$

考虑到各销售点的调入量应与其需要量平衡,可得条件

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3 \tag{1-13}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8 \tag{1-14}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4 \tag{1-15}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6 \tag{1-16}$$

此外,调运量 x_{ij} 不能为负值,即

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad j = 1,2,3,4 \tag{1-17}$$

(1-10)～(1-16) 七个线性等式和(1-17) 式的变量非负条件,构成了约束条件。

这样,我们所要解决的问题可表述为:在满足约束条件下,求出决策变量 x_{ij} 的值,使目标函数达到最小。它的数学模型可写为:

$$\begin{aligned}\min Z = {} & 2x_{11} + 9x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + x_{21} + 3x_{22} \\ & + 4x_{23} + 2x_{24} + 8x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 5 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 7 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6 \\ x_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

上述两个数学模型具有的共同特征是:

1. 每一个问题都有一组决策变量($x_1, x_2, \cdots, x_n$),这组变量的一组定值就代表一个具体的规划方案。通常要求变量的取值是非负的。

2. 每个问题都有一个目标函数，它是决策变量的线性函数。按研究问题的不同，要求目标函数达到最大值，或者最小值。

3. 每个问题都存在一定的限制条件，它们都可以用线性不等式或线性等式来表达。

由于我们所要解决的问题就是要得到规划方案$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而它的目标函数和约束条件都是决策变量的线性表达式，故称线性规划。它的数学模型的一般形式为：

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-18}$$

简写成：

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{1-19}$$

写成矩阵形式为：

$$\max(\min)Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leqslant (=, \geqslant) b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-20}$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

二、资源最优配置的线性规划模型

在经济建设、企业管理和生产实践等方面的各项活动中，我们常常需要合理分配有限资源，以期获得最大的效益。运用线性规划方法来研究这类问题，首先要建立它的数学模型。一个正确的数学模型的建立，要求建模者熟悉规划问题的生产和管理内容，明确目标要求和错综复杂的约束条件，要通过大量的调查和统计资料获取可靠的原始数据。这些要求对建立一个较复杂的实际模型是要花费相当大的工作量的。对于初学者来说，怎样从问题的内容出发，分析和认识问题，善于从数学这个角度有条理地表述出来，掌握建模过程是十分重要的技术。下面，我们通过各种不同有关资源最优配置的实例，来说明线性规划问题的建模过程，同时加深对线性规划的应用领域和它的现实意义的认识。

例 3 （生产计划问题） 某厂生产 A、B 和 C 三种产品，每种产品都需经过三道工序：零件加工、电镀和装配。根据该厂在每道工序上现有的设备和劳动力等生产条件，可以确定各工序每周的生产能力，我们把它折合成有效工时来表示。每件产品在每道工序上所花费的工时，每道工序每周可利用的有效工时以及每件产品的利润情况由表 1 － 3 给出。试问：为使从一周内生产的产品中获得最大的利润，三种产品各应生产多少件？

设 x_1、x_2 和 x_3 分别表示产品 A、B 和 C 一周内的生产件数，则一周内获得的利润为：

$$Z = 32x_1 + 28x_2 + 25x_3$$

目标是 Z 能取得最大值，即

$$\max Z = 32x_1 + 28x_2 + 25x_3$$

表 1－3

生产工序	加工每件产品的工时(小时)			每周可利用的有效工时(小时)
	A	B	C	
零件加工	1.9	1.6	1.1	6000
电　　镀	0.8	0.7	0.5	1400
装　　配	1.1	0.9	0.7	880
每件利润(元)	32	28	25	

考虑到零件加工工序、电镀工序和装配工序的生产条件，决策变量 x_1、x_2 和 x_3 应满足下面三个条件：

$$1.9x_1 + 1.6x_2 + 1.1x_3 \leqslant 6000$$
$$0.8x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 \leqslant 1400$$
$$1.1x_1 + 0.9x_2 + 0.7x_3 \leqslant 880$$

此外，x_1、x_2 和 x_3 显然只能取非负值，故有：

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

于是，该生产计划问题的线性规划模型为：

$$\max Z = 32x_1 + 28x_2 + 25x_3$$
$$\begin{cases} 1.9x_1 + 1.6x_2 + 1.1x_3 \leqslant 6000 \\ 0.8x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 \leqslant 1400 \\ 1.1x_1 + 0.9x_2 + 0.7x_3 \leqslant 880 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 4　(生产进度问题)　某厂生产的一种产品，其需求具有季节性，假定每年只能在连续的三个月内进行生产和销售。生产可以按正常工作时间进行，也可以加班。前二个月的月产量可以大于当月的销售量而将多余的产品存贮，但要付出存贮费；而在第三个月月末要将产品全部售完。设产品在正常工作时间生产，每月最多能生产 300 单位，单位成本为 75 元。在加班时间生产，每月最多能

生产 90 单位，单位成本为 95 元。每月生产量及平均成本不一定要相等。存贮费每月每单位 0.5 元。三个月的需求量分别为 160、380 和 300 单位。试确定每月在正常时间及加班时间各生产多少产品，使总成本最小。

设在第 i 月正常时间内生产的产品数为 $x_i(i=1,2,3)$，在第 i 月加班时间内生产的产品数为 $y_i(i=1,2,3)$，在第 i 月末存贮的产品数为 $s_i(i=1,2)$，则总成本为

$$Z=75(x_1+x_2+x_3)+95(y_1+y_2+y_3)+0.5(s_1+s_2)$$

生产能力约束为：

$$x_i \leqslant 300 \qquad i=1,2,3$$

$$y_i \leqslant 90 \qquad i=1,2,3$$

产品需求约束为：

$$x_1+y_1-s_1=160$$

$$x_2+y_2+s_1-s_2=380$$

$$x_3+y_3+s_2=300$$

变量均为非负，即

$$x_i, y_i, s_i \geqslant 0$$

于是，该生产进度问题的线性规划模型为：

$$\min Z=75(x_1+x_2+x_3)+95(y_1+y_2+y_3)+0.5(S_1+S_2)$$

$$\begin{cases} x_i \leqslant 300 \\ y_i \leqslant 90 \\ x_1+y_1-s_1=160 \\ x_2+y_2+s_1-s_2=380 \\ x_3+y_3+s_2=300 \\ x_i, y_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,3), s_i \geqslant 0 \quad (i=1,2) \end{cases}$$

例 5 （合理下料问题） 设用某原材料下零件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的毛坯。根据过去经验在一件原材料上有 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 种不同的

下料方式，每种下料方式可得各种毛坯个数及每种零件需要量如表 1 — 4 所示。问应怎样安排下料方式，使得既能满足需要，用的原材料又最少。

表 1 — 4

零件名称	各下料方式下毛坯个数				零件需要量
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m

通过例 1 ～ 例 4，我们对线性规划问题的建模过程已有了一定的了解。从本例开始，在不难理解的情况下，将简化叙述。

设用 B_j 种方式下料的原料数为 x_j，则合理下料问题的线性规划模型为：

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

（所用原材料最少）

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ \text{（所下的 } A_i \text{ 零件总数不能少于 } a_i\text{）} \\ x_j \geqslant 0,\text{整数} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\ \text{（各种方式下料的原材料数不能是负数、分数）} \end{cases}$$

例 6 （配料问题） 设用 n 种原料 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 制成具有 m 种成分 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的产品，其所含各成分需要量分别不低于 $a_1,a_2,\cdots,a_m$。一单位原料所含成分的数量以及有关资料如表 1 — 5 所示。问应如何配料，才能使产品成本最低。

表 1 － 5

成分名称	每种原料所含成分				产品所含成分需要量
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
单　　价	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

设取原料 B_j 为 x_j 单位（$j=1,2,\cdots,n$）。则该配料问题的线性规划模型为：

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

（产品成本最低）

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ \text{（各种原料所含成分 } A_i \text{ 的总数应不少于} \\ \text{产品对 } A_i \text{ 的需要量 } a_i\text{）} \\ x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n \\ \text{（所取原料不能为负数）} \end{cases}$$

例 7 （分派问题）　设有 n 件工作 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 分派给 n 人 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 去做，每人只做一件工作且每件工作只分派一人去做。设 A_i 完成 B_j 的工时为 $c_{ij}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$。问应该如何分派才使完成全部工作的总工时最少。

设 x_{ij} 为 B_j 分派给 A_i 的情况：B_j 分派给 A_i 时，$x_{ij}=1$；不分派给 A_i 时，$x_{ij}=0(i,\ j=1,2,\cdots,n)$，则该分派问题的线性规划模型为：