

# 电磁场工程中的场与波

吴志忠 杜忠顺

东南大学出版社

# 序

自从1862年麦克斯韦预言和1887年赫兹证实电磁波的存在这一百年来,电磁波应用的不断开拓已使人类社会的生活方式大为改观。现代社会大量地依靠电气工程,而电磁场与波的基本理论与应用即是电气工程的核心内容。有关电磁场与波的教材已有多种,但由于不同的目的而有其不同的特点和适用范围。本教材编者根据他们长期教学实践的经验,对主要章节内容的取舍、布局进行了认真的推敲,汲取了同类教材的优点,体现了少而精的原则,编写了这本适合通信类各专业本科生使用的教材。

本教材的特点在于把重点放在电磁场基本方程的微分形式,并充分利用了矢量分析这一数学工具,避免了与普通物理电学的过多重复。本教材文字流畅、论述严谨、重点突出、难点分散,并精心选配了较多的插图、例题和习题,使学生能对抽象的概念有较好的理解,达到帮助和启发学生思维及综合训练之目的。我认为这是一本好的教材,相信会在教学实践中取得很好的效果,对于广大的通信科技工作者无疑也是一本好的参考书。

中科院学部委员  
电子科技大学教授

林为干

1992年4月于成都

# 前 言

本书是为通信及电子类各专业本科编写的教材,侧重于工程中所需要的电磁场与波的基本理论知识。本书经邮电部高校《电磁场与微波技术(含光通信)》教学指导委员会第二次会议评审通过。

近年来,由于微波、天线、光纤等技术的迅速发展,需要一本既有理论又接近实际工程应用的工科大学电磁场教材,为此编著者在长期讲授电磁场理论课程的基础上,经过数次易稿和撰写,编写成本书。

全书共分九章。第一章扼要介绍矢量分析的基本规律。第二、四、五章为静电场、恒定电流的电场和磁场。静态场的讨论都是以亥姆霍兹定理为纽带,简要论述实验定律后,立即利用矢量分析这一数学工具来建立场的微分方程,避免了和普通物理电磁学过多的重复。在第三章中专门安排了静电场边值问题的解法,介绍了镜象法、分离变量法、复变函数法、有限差分法,这些方法对时变场都是有效的,也是近年来电磁场工程中应用日益增多的部分,本章目的是使读者对边值问题解有初步认识。第六章讨论时变电磁场的基本理论,并从麦克斯韦方程入手,推导出各种不同情况下的波动方程。第七章依据波动方程,系统阐述了无界、均匀、各向同性媒质中电磁波的传播特性,电磁波的极化和电磁波在不同媒质中的反射、折射。第八章讨论导行波理论,主要讨论柱形金属波导和介质波导,为微波技术和光纤技术作理论准备。第九章介绍电磁波的辐射,为天线理论奠定基础。

本书由吴志忠编写第一、二、三、四、五、九章,由杜忠顺编写六、七、八章及全部习题。全书由吴志忠主编。全书的编写得到电子科技大学林为干教授、清华大学杨弃疾教授、南京邮电学院张覃华教授的指导,南京邮电学院曹伟教授、电子科技大学赵家陞副教授、北京邮电学院蒋佩璇副教授对书稿进行了详细的审阅,并提出了许多宝贵意见。本书出版还得到了东南大学、南京邮电学院领导和电子科技大学吴正德教授、王志良博士的支持,在此谨表衷心的感谢。由于我们水平有限,有欠妥之处,敬希不吝指正。

编者

1992年3月

## 主要符号表

$A$	矢量磁位, 矢量位, 矢量函数	$r$	矢径
$B$	磁感应强度	$r^0$	位置单位矢量
$C$	电容, 常数	$S$	坡印亭矢量
$c$	真空中的光速	$T$	周期, 传输系数
$D$	电位移矢量(电通量密度)	$U$	电位差
$E$	电场强度	$V$	电压(直流)
$e$	电子电量	$v$	速度矢量
$F$	力	$v_p$	相速
$f$	频率	$v_g$	群速
$G$	电导	$v_e$	能速
$H$	磁场强度	$W$	能量, 复变函数
$I$	恒定电流强度	$W_e$	电场能量
$i$	时变电流强度	$W_m$	磁场能量
$J$	体电流密度	$w$	能量密度
$J_m$	束缚体电流密度	$w_e$	电场能量密度
$J_s$	面电流密度	$w_m$	磁场能量密度
$J_{sm}$	束缚面电流密度	$X_s$	表面电抗
$k$	波数, 传播常数	$Z_s$	表面阻抗
$L$	自感	$Z$	复数, 阻抗
$M$	磁化强度	$\alpha$	衰减常数, 电位系数, 角度
$M$	互感	$\beta$	相移常数, 电容系数, 角度
$m$	磁偶极矩	$\eta$	波阻抗
$n$	法线方向上的单位矢量	$\delta$	透入深度, 损耗角
$n$	折射率	$\epsilon$	介电常数(电容率)
$P$	电极化强度	$\epsilon_0$	真空介电常数(真空电容率)
$P$	功率	$\epsilon_r$	相对介电常数(相对电容率)
$p$	电偶极矩	$\epsilon$	复介电常数
$Q$	电荷量	$\theta_p$	布儒斯特角
$q$	电荷	$\theta_c$	临界角
$R$	电阻, 反射系数	$\lambda$	波长
$R_s$	表面电阻	$\lambda_0$	真空中波长

$\lambda_c$	截止波长	$\chi_e$	电极化率
$\lambda_g$	波导波长	$\chi_m$	磁化率
$\mu$	磁导率	$\Psi$	全磁通(磁链)
$\mu_0$	真空磁导率	$\phi$	磁通
$\mu_r$	相对磁导率	$x y z$	直角坐标变量
$\dot{\mu}$	复磁导率	$r \varphi z$	圆柱坐标变量
$\rho$	体电荷密度	$r \theta \varphi$	球坐标变量
$\rho_v$	束缚体电荷密度	$\alpha_x \alpha_y \alpha_z$	直角坐标单位矢量
$\rho_s$	面电荷密度	$a_r a_\varphi a_z$	圆柱坐标单位矢量
$\rho_{sv}$	束缚面电荷密度	$a_r a_\theta a_\varphi$	球坐标单位矢量
$\rho_l$	线电荷密度	$\nabla$	哈密尔顿算子, 梯度
$\sigma$	电导率	$\nabla \cdot$	散度
$\Phi$	标量电位, 标量位	$\nabla \times$	旋度
$\Phi_m$	标量磁位	$\nabla^2$	拉普拉斯算子
$\varphi$	相位		

# 目 录

<b>第一章 矢量分析</b> .....	1
1.1 标量场和矢量场 .....	1
1.2 三种常用正交坐标系 .....	2
1.3 矢量代数 .....	4
1.4 标量场的梯度 .....	6
1.5 矢量场的散度 .....	9
1.6 矢量场的旋度 .....	15
1.7 几个矢量关系式 .....	20
1.8 亥姆霍兹定理 .....	21
习 题 .....	22
<b>第二章 静电场</b> .....	24
2.1 库仑定律 电场强度 .....	24
2.2 静电场的基本方程 .....	27
2.3 静电场的边界条件 .....	30
2.4 电位 电位梯度 .....	34
2.5 电位的泊松方程和拉普拉斯方程 .....	39
2.6 电介质中的电场 .....	42
2.7 导体系统的电容 .....	47
2.8 静电场的能量和能量密度 .....	49
习 题 .....	52
<b>第三章 静电场的边值问题</b> .....	56
3.1 格林定理 唯一性定理 .....	56
3.2 镜象法 .....	58
3.3 直角坐标中的分离变量法 .....	67
3.4 圆柱坐标中的分离变量法 .....	75
3.5 球坐标中的分离变量法 .....	81
3.6 复变函数法 .....	84
3.7 有限差分法 .....	89
习 题 .....	92
<b>第四章 恒定电流的电场</b> .....	96
4.1 电流密度和电流连续性方程 .....	96
4.2 导电媒质中的传导电流 .....	98
4.3 导电媒质中恒定电场的基本方程及边界条件 .....	99
4.4 导电媒质中恒定电场与静电场的比拟 .....	104
4.5 弛豫时间 .....	107
习 题 .....	108
<b>第五章 恒定电流的磁场</b> .....	110
5.1 安培定律 磁感应强度 .....	110

5.2	恒定磁场的基本方程 .....	114
5.3	恒定磁场的边界条件 .....	117
5.4	恒定磁场的标量磁位 .....	120
5.5	恒定磁场的矢量磁位 .....	124
5.6	磁介质中的磁场 .....	130
5.7	电感 .....	134
5.8	恒定磁场的能量和能量密度 .....	136
	习 题 .....	139
<b>第六章</b>	<b>时变电磁场</b> .....	<b>144</b>
6.1	法拉第电磁感应定律 位移电流 .....	144
6.2	麦克斯韦方程组 .....	147
6.3	时变电磁场的边界条件 .....	150
6.4	坡印亭定理 .....	152
6.5	波动方程 .....	156
6.6	时变场中的位函数 .....	157
6.7	正弦电磁场 .....	160
	习 题 .....	116
<b>第七章</b>	<b>平面电磁波的传播</b> .....	<b>169</b>
7.1	无界理想介质中的均匀平面电磁波 .....	169
7.2	平面电磁波的极化 .....	175
7.3	无界导电媒质中的正弦平面波 .....	178
7.4	电磁波的色散、相速和群速 .....	184
7.5	正弦平面波在不同媒质分界面上的垂直入射 .....	186
7.6	正弦平面波在不同媒质分界面上的斜入射 .....	193
	习 题 .....	203
<b>第八章</b>	<b>导行电磁波</b> .....	<b>207</b>
8.1	导行电磁波及其一般性质 .....	208
8.2	矩形金属波导 .....	212
8.3	平板介质波导 .....	218
8.4	圆柱形金属波导 .....	223
8.5	圆柱形介质波导 .....	226
	习 题 .....	229
<b>第九章</b>	<b>电磁波的辐射</b> .....	<b>231</b>
9.1	滞后位 .....	231
9.2	电偶极子的辐射 .....	233
9.3	磁偶极子的辐射 .....	236
9.4	线天线和天线阵概念 .....	238
9.5	等效原理 .....	242
	习 题 .....	245
<b>附 录</b>	.....	<b>247</b>
<b>习题答案</b>	.....	<b>249</b>

# 第一章 矢量分析

宏观电磁现象的基本规律——麦克斯韦(Maxwell)方程,可以表示为积分形式和微分形式,在静止电荷和恒定电流引起的恒定场情况下,积分形式的场方程是实验结果的直接反映,在对称系统中有着大量应用,有助于初学者建立场的概念,并可由它方便地导出微分形式的场方程。然而,无论是对称的或是非对称的系统,特别在讨论时变电磁场时,人们发现微分形式的场方程更有用。为了便于微分形式的场方程的推导和理解,掌握场的分析方法,本章首先复习矢量分析中标量场和矢量场的空间导数概念,即梯度、散度和旋度的运算。它能帮助我们揭示场的本质。本章还将介绍矢量场的一个很重要的基本定理——亥姆霍兹(Helmholtz)定理。

## 1.1 标量场和矢量场

在电磁学中,我们通常要研究某个物理量(如电位  $\phi$ 、电场强度  $E$  等)在空间的分布和变化规律。为此,必须引进场的概念。关于场的概念要追溯到法拉第(Faraday),他用一种没有严格数学公式的直观方法——引入力线的概念来描述。后来麦克斯韦建立了描述电磁场的严格的数学公式,并在理论上预言了电磁波的存在。电磁波的存在最后被赫兹(Hertz)用实验方法加以证实。爱因斯坦(Einstein)说:“用来描写物理现象最重要的不是带电体,也不是粒子,而是带电体之间与粒子之间的空间中的场。”

场可以表示为时空的数学函数,即它是空间分布量,同时也可以时间的函数。例如某空间的温度分布就是一个场量,空间各点某时刻的温度可以用函数  $T(x, y, z, t)$  来表示。场的定义是若空间的每一点都对应着某个物理量的一个确定的值,就说在这个空间里确定了该物理量的场。如果这个物理量是标量,这种场就是标量场,例如温度场、电位场;如果这个物理量是矢量,这种场就是矢量场,例如速度场、重力场、电场强度  $E$  场。

我们用黑体字母符号表示矢量,用白体字母符号表示标量或矢量的大小。

任何一个矢量可以由它在三个相互垂直的轴上的投影分量来确定。例如在直角坐标系中,矢量  $A$  在三个坐标轴上的投影分别是  $A_x, A_y, A_z$ 。利用坐标单位矢量  $a_x, a_y, a_z$ , 矢量  $A$  可以由它的三个分量唯一地表示出来:

$$A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z \quad (1.1)$$

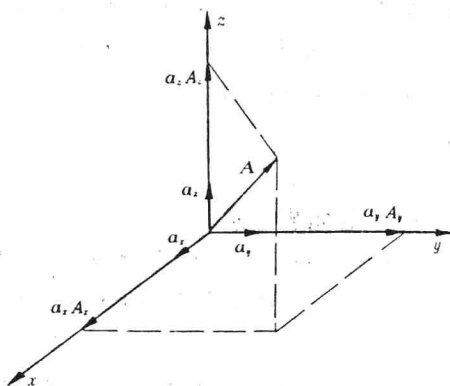


图 1.1 直角坐标中矢量  $A$  及其分量

因此,在三维空间中一个矢量场对应着三个标量(分量)场。矢量  $A$  的大小或模为

$$A = |A| = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

## 1.2 三种常用正交坐标系

在求解电磁场问题时,常常需要选择与给定几何形状相适应的坐标系。例如求解一个带电球体周围的电场,就要采用球坐标系;而解平板电容器中的场,则要采用直角坐标系。直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是三种最常用的正交坐标系。

我们知道空间某一点的位置可以用三个面的交点来确定,每一个面可以是平面,也可以是曲面。当这三个面互相垂直时,就建立了一个正交坐标系。设正交坐标系的三个坐标变量分别为  $u_1, u_2, u_3$ , 那么三个坐标面可分别表示为  $u_1 = \text{常数}, u_2 = \text{常数}, u_3 = \text{常数}$ 。每两个面的交线即为坐标线,例如标  $u_1$  的坐标线是由  $u_2 = \text{常数}, u_3 = \text{常数}$  两个面来定义,见图 1.2。

沿坐标线的切线方向取一个单位矢量  $a_i$ , 称为坐标单位矢量,它的方向指向相应的坐标变量正的增加方向。一个正交坐标系的三个坐标单位矢量  $a_1, a_2, a_3$  相互正交并满足右手螺旋法则,即

$$a_{r_1} \times a_{r_2} = a_{r_3} \quad (1.3a)$$

$$a_{r_2} \times a_{r_3} = a_{r_1} \quad (1.3b)$$

$$a_{r_3} \times a_{r_1} = a_{r_2} \quad (1.3c)$$

在上节中已讨论过任何一个矢量可以用它在三个坐标轴上的分量来表示。因此

$$A = a_{r_1} A_{r_1} + a_{r_2} A_{r_2} + a_{r_3} A_{r_3} \quad (1.4)$$

式中  $A_{r_1}, A_{r_2}, A_{r_3}$  是  $A$  在  $a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}$  方向上的投影。

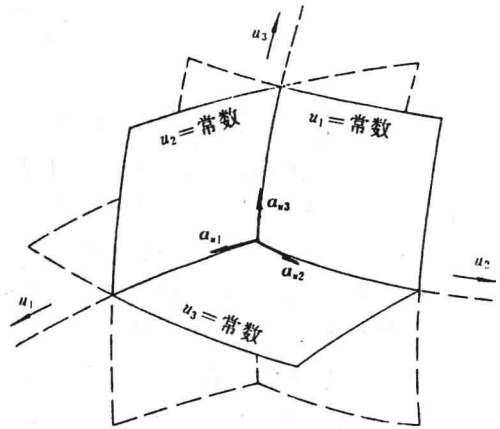


图 1.2 正交坐标系

### 一、直角坐标系

直角坐标系三个坐标变量是  $x, y, z$ , 即  $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z$ , 三个坐标单位矢量是  $a_x, a_y, a_z$ , 见图 1.3(a)。矢量  $A$  在直角坐标系中可写为

$$A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z \quad (1.5)$$

在后面章节的空间微积分中经常要用到体、面和线微分元。在直角坐标中[见图 1.3(b)],

长度微分元  $dl_x = dx, dl_y = dy, dl_z = dz;$

面微分元  $dS_x = dx dy, dS_y = dy dz, dS_z = dz dx;$

体微分元  $dV = dx dy dz。$

### 二、圆柱坐标系

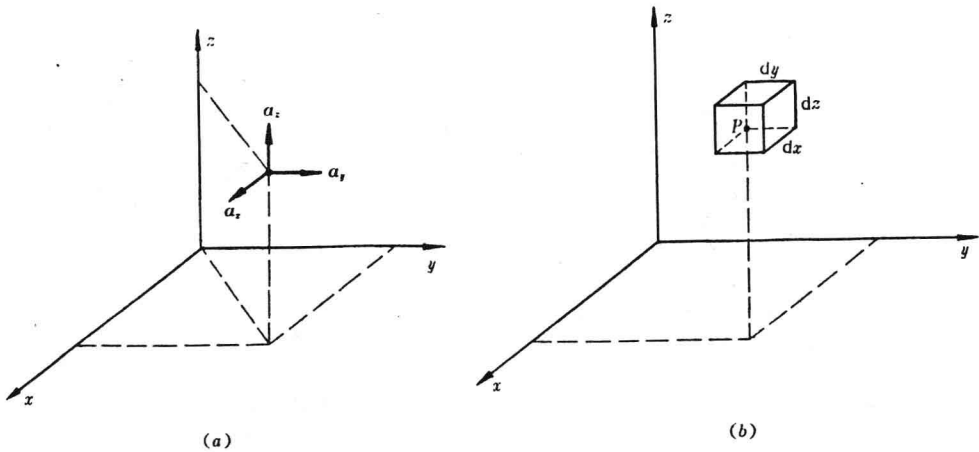


图 1.3 直角坐标系

圆柱坐标系三个坐标变量是  $r, \varphi, z$ , 即  $u_1=r, u_2=\varphi, u_3=z$ , 三个坐标单位矢量是  $a_r, a_\varphi, a_z$ , 见图 1.4(a)。矢量  $A$  在圆柱坐标系中可写成

$$A = a_r A_r + a_\varphi A_\varphi + a_z A_z \quad (1.6)$$

- 长度微分元  $dl_r = dr, dl_\varphi = r d\varphi, dl_z = dz;$
- 面微分元  $dS_r = r d\varphi dz, dS_\varphi = dr dz, dS_z = r dr d\varphi;$
- 体微分元  $dV = r dr d\varphi dz$

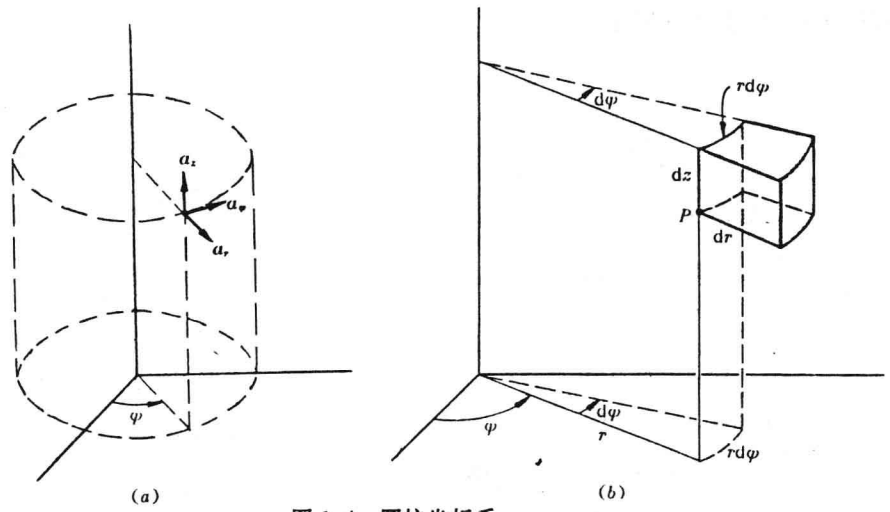


图 1.4 圆柱坐标系

### 三、球坐标系

球坐标系三个坐标变量是  $r, \theta, \varphi$ , 即  $u_1=r, u_2=\theta, u_3=\varphi$ , 三个坐标单位矢量是  $a_r, a_\theta, a_\varphi$ , 见图 1.5(a)。

矢量  $A$  在圆柱坐标系中可写成

$$A = a_r A_r + a_\theta A_\theta + a_\varphi A_\varphi \quad (1.7)$$

- 长度微分元  $dl_r = dr, dl_\theta = r d\theta, dl_\varphi = r \sin\theta d\varphi;$
- 面微分元  $dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, dS_\theta = r \sin\theta dr d\varphi, dS_\varphi = r dr d\theta;$
- 体微分元  $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

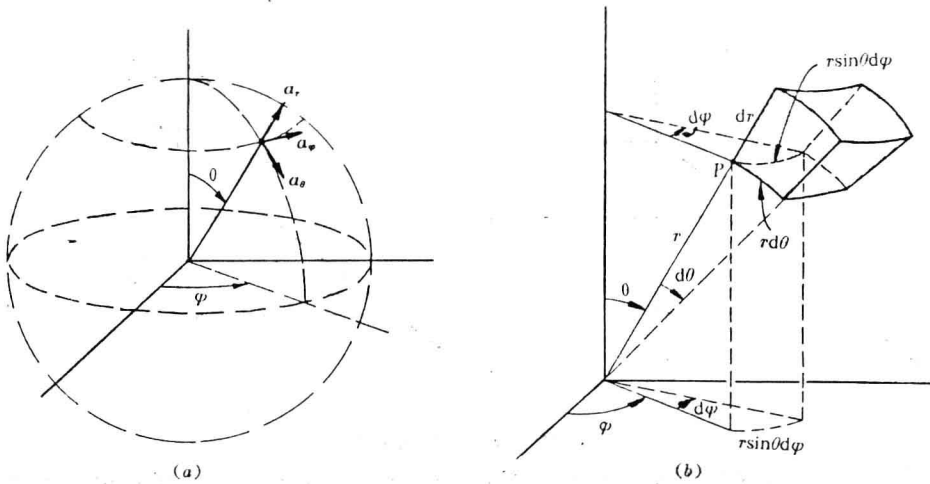


图 1.5 球坐标系

### 1.3 矢量代数

矢量  $A$  和  $B$  相加得到一个新的矢量  $A+B$ , 它是以  $A$  的起点为起点, 以  $B$  的终点为终点所构成的矢量, 如图 1.6 所示。

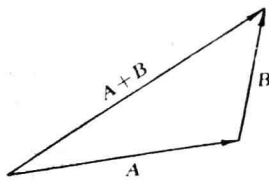


图 1.6 矢量加法

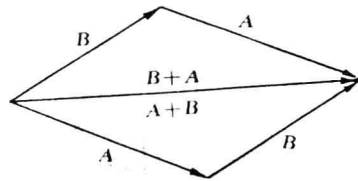


图 1.7 交换律

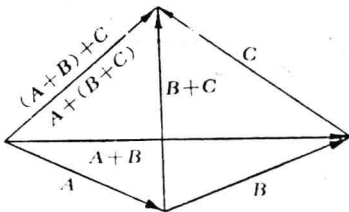


图 1.8 结合律

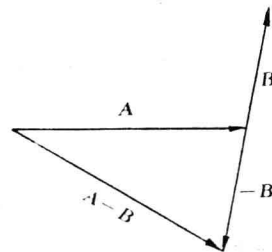


图 1.9 矢量减法

矢量加法服从加法的交换律和结合律, 见图 1.7 和图 1.8, 即

$$A + B = B + A \quad (1.8)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (1.9)$$

两矢量相减, 只要将其中一个矢量变号后, 再相加, 就得到两个矢量之差

$$A - B = A + (-B) \quad (1.10)$$

如图 1.9 所示。

两个矢量  $A$  与  $B$  的标量积(或称点积)是一个标量,等于两矢量的模相乘,再乘以它们间夹角  $\varphi$  的余弦,记作  $A \cdot B$ ,即

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \varphi = AB \cos \varphi \quad (1.11)$$

由定义可知标量积满足乘法交换律

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1.12)$$

矢量  $A$  与其本身的标量积为

$$A \cdot A = |A|^2 = A^2 \quad (1.13)$$

标量积还满足分配律,即

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1.14)$$

由标量积的性质可知

$$\begin{aligned} a_x \cdot a_x &= 1, & a_y \cdot a_y &= 1, & a_z \cdot a_z &= 1, \\ a_x \cdot a_y &= 0, & a_y \cdot a_z &= 0, & a_z \cdot a_x &= 0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z) \cdot (a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

这就是说,两个矢量的标量积等于它们的相应分量的乘积的代数和。当  $B=A$ ,可得

$$A = |A| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

两个矢量  $A$  与  $B$  的矢量积(或称叉积)是一个矢量,设用  $C$  表示,(1)矢量  $C$  的大小等于矢量  $A$ 、 $B$  大小的乘积再乘以它们之间夹角  $\theta$  的正弦,即

$$|C| = |A| |B| \sin \theta \quad (1.16)$$

(2)矢量  $C$  的方向垂直于矢量  $A$  和  $B$  所决定的平面;(3)矢量  $C$  的正方向按“右手法则”来确定。

矢量  $A$  与  $B$  的矢量积记作  $A \times B$ ,即

$$C = A \times B \quad (1.17)$$

矢量积不服从乘法交换律,因为根据“右手法则”,把  $A$  和  $B$  的次序颠倒后, $C$  的方向也倒过来了

$$A \times B = -(B \times A) \quad (1.18)$$

矢量积服从分配律,即

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (1.19)$$

由矢量积的定义及性质可知

$$\begin{aligned} a_x \times a_x &= 0, & a_y \times a_y &= 0, & a_z \times a_z &= 0 \\ a_x \times a_y &= -(a_y \times a_x) = a_z, & a_y \times a_z &= -(a_z \times a_y) = a_x, \\ a_z \times a_x &= -(a_x \times a_z) = a_y. \end{aligned}$$

因此

$$A \times B = (a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z) \times (a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z)$$

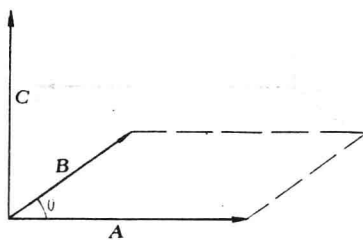


图 1.10  $A$  与  $B$  的矢量积

$$= a_x(A_y B_z - A_z B_y) + a_y(A_z B_x - A_x B_z) + a_z(A_x B_y - A_y B_x)$$

或应用三阶行列式,则上式可表示为

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.20)$$

下面四个关系式是很有用的

$$A \times A = 0 \quad (1.21)$$

$$A \cdot (A \times B) = 0 \quad (1.22)$$

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) \\ = C \cdot (A \times B) \quad (1.23)$$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \quad (1.24)$$

通常式(1.23)称为混合积,式(1.24)称为二重矢量积

## 1.4 标量场的梯度

·让我们考察在直角坐标系中的一标量场  $f(x, y, z)$ , 设它是坐标的连续可微函数。

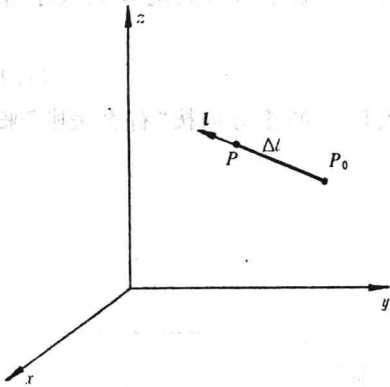


图 1.11 标量函数  $f$  的方向导数

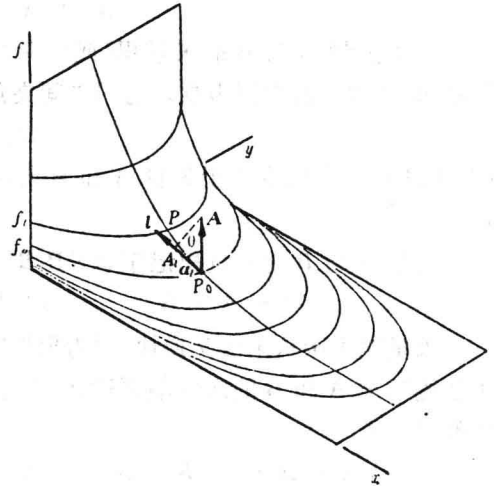


图 1.12 标量函数  $f$  的梯度

令  $f(x, y, z) = f_0$ ,  $f_0$  为一任意常数, 该式则表示在空间中的一个等值曲面。令不同的  $f_0$  值, 就可得到一组等值曲面。设从等值曲面  $f(x, y, z) = f_0$  上的一点  $P_0$  出发, 沿  $l$  方向经过一段非常小的位移  $\Delta l$  后到达  $P$  点,  $P$  点位于  $f(x, y, z) = f_1$  的等值曲面上, 见图 1.11。标量函数  $f(x, y, z)$  经过位移  $\Delta l$  后的增量  $\Delta f = f_1 - f_0$ 。则增量  $\Delta f$  与位移量  $\Delta l$  之比的极限值称为标量函数  $f$  在点  $P_0$  处沿  $l$  方向上的方向导数, 记作  $\frac{\partial f}{\partial l}$ , 即

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f_1 - f_0}{\Delta l} \quad (1.25)$$

显然,这个方向导数的值的大小与  $l$  的方向有关。

如图 1.12, 设  $P_0$  点处有一矢量  $A$ , 其方向沿等值面  $f(x, y, z) = f_0$  的法线方向, 并指向函数  $f(x, y, z)$  增加的方向。它在任意  $l$  方向上的投影为  $A_l$ , 即

$$A_l = A \cdot a_l = |A| \cos\theta \quad (1.26)$$

式中  $\theta$  表示  $A$  与  $a_l$  之间的夹角,  $a_l$  是  $l$  方向上的单位方向矢量。若令

$$\frac{\partial f}{\partial l} = A_l \quad (1.27)$$

则由式(1.26)和(1.27)可以看出, 当  $\theta=0$  时,  $\frac{\partial f}{\partial l}$  达到最大值, 即  $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\text{最大}} = |A|$ 。此时  $l$  的方向正好与矢量  $A$  的方向重合, 这说明矢量  $A$  所规定的方向就是标量函数  $f$  在  $P_0$  点处附近变化率最大的方向, 矢量  $A$  的大小就是标量函数  $f$  最大变化率的数值。我们称矢量  $A$  为标量函数  $f(x, y, z)$  的梯度, 记  $\text{grad} f$ , 即

$$\text{grad} f = A \quad (1.28)$$

在直角坐标系中, 由式(1.27)可知,  $A_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $A_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ , 因此得到

$$\text{grad} f = A = a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1.29)$$

函数  $f(x, y, z)$  的梯度  $\text{grad} f$  的  $x$  分量(或  $y, z$  分量), 即函数  $f(x, y, z)$  相对于  $x$ (或  $y, z$ ) 的偏导数, 代表其沿  $x$ (或  $y, z$ ) 方向的变化率(方向导数)。

由上面讨论可知, 一个标量函数  $f$  的梯度  $\text{grad} f$  是一个矢量, 它指向函数  $f$  增大的方向, 并且垂直于过所在点的等值面。在第二章静电场中将看到, 电场强度  $E$  矢量可以用一个标量电位  $\Phi$  的梯度量来表示, 即

$$E = -\text{grad}\Phi \quad (1.30)$$

这是因为  $\text{grad}\Phi$  指向标量电位函数  $\Phi$  增大的方向, 并垂直于等电位面, 而  $E$  垂直于等电位面, 但由高电位指向低电位, 如图 1.13 所示。由于用  $\Phi$  描述的电场是一个标量场, 在数学上它比矢量场  $E$  简单得多。如果我们能先求得区域内各点的标量电位  $\Phi$  的话, 那么该区域内的电场强度  $E$  就完全可以由式(1.30)确定。

为了简便起见, 我们引入一个算符  $\nabla$  (读作“del”)

$$\nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.31)$$

称为哈密顿(Hamilton)算符。

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left( a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\ &= a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1.32) \end{aligned}$$

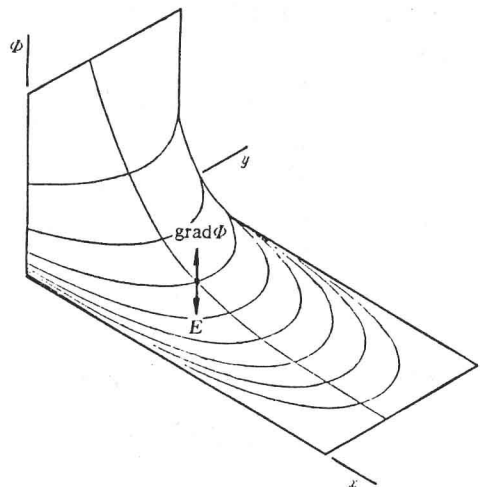


图 1.13  $E$  和  $\Phi$  的关系,  $E = -\text{grad}\Phi$

由式(1.29)和(1.32)可看出,算符 $\nabla$ 可将梯度简写为

$$\text{grad} f = \nabla f \quad (1.33)$$

梯度在圆柱坐标系和球坐标系中的表达式比较复杂,因为 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 中的长度元 $dl$ 一般不等于相应坐标系中的坐标增量。例如 $\nabla f$ 在球坐标中的 $\theta$ 分量,是由 $f(r, \theta, \varphi)$ 在 $a_\theta$ 方向的方向导数给出的,也就是

$$(\nabla f)_\theta = \frac{\partial f}{\partial l_\theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dl_\theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

用类似的方法计算 $\nabla f$ 的每一个分量,可得到

在圆柱坐标系中

$$\nabla f = a_r \frac{\partial f}{\partial r} + a_\varphi \frac{\partial f}{r \partial \varphi} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1.34)$$

在球坐标系中

$$\nabla f = a_r \frac{\partial f}{\partial r} + a_\theta \frac{\partial f}{r \partial \theta} + a_\varphi \frac{\partial f}{r \sin \theta \partial \varphi} \quad (1.35)$$

例 1.1 矢径  $R = a_x(x-x') + a_y(y-y') + a_z(z-z')$ 。如图 1.14 所示。求证

- (1)  $\nabla R = -\nabla' R$ ;
- (2)  $\nabla f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \nabla R$ ;
- (3)  $\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{R} \right)$

其中  $\nabla$  是对  $x, y, z$  运算;  $\nabla'$  是对  $x', y', z'$  运算。

解 (1) 因为

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

代入式(1.32)得

$$\begin{aligned} \nabla R &= a_x \frac{\partial R}{\partial x} + a_y \frac{\partial R}{\partial y} + a_z \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\mathbf{R}}{R} \\ \nabla' R &= a_x \frac{\partial R}{\partial x'} + a_y \frac{\partial R}{\partial y'} + a_z \frac{\partial R}{\partial z'} \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R} = -\nabla R \end{aligned} \quad (1.36)$$

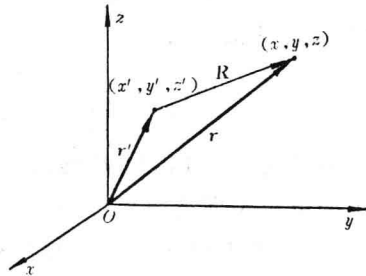


图 1.14 矢径  $R$

$$\begin{aligned} (2) \quad \nabla f(R) &= a_x \frac{\partial f(R)}{\partial x} + a_y \frac{\partial f(R)}{\partial y} + a_z \frac{\partial f(R)}{\partial z} \\ &= a_x \frac{\partial f(R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + a_y \frac{\partial f(R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} + a_z \frac{\partial f(R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f(R)}{\partial R} \nabla R \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$(3) \quad \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial \left( \frac{1}{R} \right)}{\partial R} \nabla R = -\frac{1}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial \left( \frac{1}{R} \right)}{\partial R} \nabla' R = -\frac{1}{R^2} \left( -\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \left( \frac{1}{R} \right) \quad (1.38)$$

若将此结果推广为

$$\nabla f(R) = -\nabla' f(R) \quad (1.39)$$

也是成立的。因此当处理相对坐标的函数时， $\nabla$ 算符和 $\nabla'$ 算符可以互换，但必须改变算符前面的正负号。

**例 1.2** 已知静电场中标量电位(1)  $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ; (2)  $\Phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。求静电场中电场强度  $E$ 。

**解** 由式(1.30)可知  $E = -\nabla\Phi$

$$(1) \quad E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

$$(2) \quad E = -\left( \mathbf{a}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{\partial\Phi}{r\partial\theta} \right) = \mathbf{a}_r \frac{p\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} + \mathbf{a}_\theta \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

## 1.5 矢量场的散度

一个矢量场可以用一个矢量函数来表示。例如，在直角坐标系中，某一矢量场可用矢量函数  $\mathbf{A}(x, y, z)$  来表示

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{a}_x A_x(x, y, z) + \mathbf{a}_y A_y(x, y, z) + \mathbf{a}_z A_z(x, y, z) \quad (1.40)$$

假定矢量函数  $\mathbf{A}$  在坐标轴上的三个标量分量都是坐标的连续可微函数。它们的空间导数可以分为两类：一类空间导数是其分量沿着它自己方向的变化率，如  $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial A_y}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial A_z}{\partial z}$ ，从而引出矢量场的散度定义。另一类空间导数是其分量沿着非自己方向的变化率，如  $\frac{\partial A_x}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial A_x}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial A_y}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial A_y}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial A_z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial A_z}{\partial y}$ ……等，从而将引出矢量场的旋度定义。

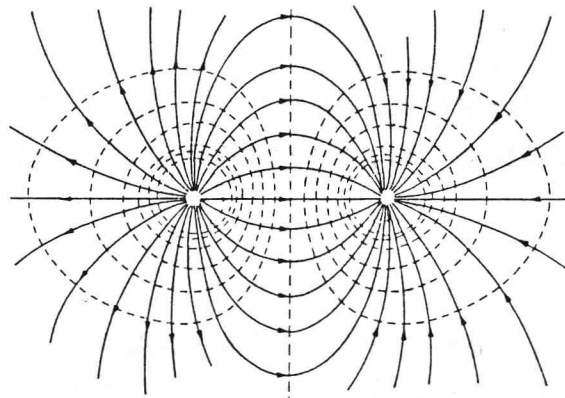


图 1.15 异号等值点电荷的场

在研究矢量场时,用矢量线图可以直观地表示矢量的分布状况。所谓矢量线是指这样的曲线,它在每一点都和矢量场相切,并且用箭头来表示每条线的正方向。它在某点附近的横向密度就是该点场矢量的大小,它的方向就是该点场矢量的方向。电场中的电力线、磁场中的磁力线都是矢量线的例子。图 1.15 是异号等值点电荷场中的电力线分布图,虚线是等电位线。

矢量线也称为通量线,通量概念在场论中是由流体的流量引伸出来的量,即流体中单位时间通过某截面积的流量。现在我们在矢量  $A$  场中取一个假想面  $S$ ,在这个假想面  $S$  上取一个面积元  $dS$ ,如图 1.16 所示,则通过  $dS$  的通量

$$d\Phi = A \cdot dS \quad (1.41)$$

其中  $dS$  的大小等于面积元的大小,其方向与面积元的法线方向一致。穿过有限曲面  $S$  的通量  $\Phi$  是

$$\Phi = \int_S A \cdot dS \quad (1.42)$$

若  $S$  面是一个封闭曲面,上式就写成

$$\Phi = \oint_S A \cdot dS \quad (1.43)$$

$dS$  的方向习惯取封闭曲面外侧的法线方向。因此,如果穿出  $S$  面的矢量线多于进入  $S$  面的矢量线,则由式(1.43)计算出的净通量为正( $\Phi > 0$ ),说明  $S$  面所包围的体积  $V$  中有产生该矢量场的源。若得出的净通量为负( $\Phi < 0$ ),说明体积  $V$  中有该矢量场的受体(或称汇)。如果式(1.43)中的积分结果为零,说明穿出  $S$  面的矢量线等于进入  $S$  面的矢量线,净通量为零。

由式(1.43)得到的通量可以表示一个大范围内场和场源之间的关系。如果我们要知道矢量场  $A$  中每一点处场与场源的关系,就要引入矢量场  $A$  在某一点处的散度  $\text{div} A$  的概念。矢量场  $A$  的散度  $\text{div} A$  的定义为:在矢量场  $A$  中某一点  $P$  处作一包含该点的封闭曲面  $S$ ,如图 1.17 所示,设其所包围的空间区域体积为  $\Delta V$ ,当该体积  $\Delta V$  趋于零时,每单位体积向外穿出的净通量称为矢量场  $A$  在该点的散度,即

$$\text{div} A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S A \cdot dS}{\Delta V} \quad (1.44)$$

由式(1.44)右边项可知,散度  $\text{div} A$  是一个标量,表示场中某一点处单位体积穿出的净通量。若  $\text{div} A$  的值为零,表示该点处无源;若  $\text{div} A > 0$ ,表示该点处有通量流出,该点称为源;若  $\text{div} A < 0$ ,表示有通量流入该点,该点称为汇。见图 1.18。

在矢量场  $A$  所在区域中,若存在其散度异于零的点,称该矢量场为有(通量)源场。例如静电场是有(通量)源场。

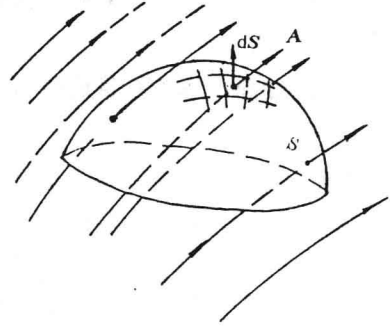


图 1.16 矢量  $A$  场的通量

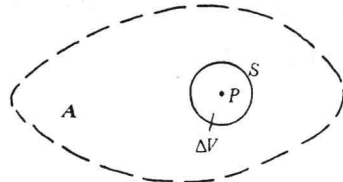


图 1.17 矢量场  $A$  的散度