[张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学题源探析经典1000题

(解析分册·数学一)

1000 EXERCISES ON MATHS

□ Mr. Zhang

主编

张宇

2017

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪云图 理工社®

[张宇考研数学系列丛书]

张宇 考研数学题源探析经典1000题

CLASSIC

（解析分册·数学一）

张宇 ◎ 主编

编委（按姓氏拼音排序）：蔡燧林 高昆轮 胡金德 万金平 乌日罕
亦一（笔名）于吉霞 曾凡（笔名）张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 解析分册. 数学一 / 张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.1

ISBN 978—7—5682—1840—5

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第021949号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010) 82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 河北鹏润印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 19.5
字　　数 / 486千字
版　　次 / 2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷
定　　价 / 54.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第 1 章　函数、极限、连续

一、选择题

1.1. (B) **【解析】**若$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n\cdot\dfrac{1}{x_n}=0$,故(B)正确.

若取$x_n=\dfrac{1}{n}$,$y_n=1$,则满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,且$\{x_n\}$在$n\to\infty$时是无穷小、有界、单调递减的,但$\{y_n\}$不是无穷小,排除(A),(C),(D).

1.2. (D) **【解析】**对于命题①,由数列收敛的定义可知,若数列$\{u_n\}$收敛于A,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在自然数N,当$n>N$时,恒有　$|u_n-A|<\varepsilon$.

可知当$n_i>N$时,恒有　$|u_{n_i}-A|<\varepsilon$.

因此数列$\{u_{n_i}\}$也收敛于A,可知命题正确.

对于命题②,不妨设数列$\{x_n\}$为单调增加的,即

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

其中某一给定子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于A,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在自然数N,当$n_i>N$时,恒有

$$|x_{n_i}-A|<\varepsilon.$$

由于数列$\{x_n\}$为单调增加的数列,对于任意的$n>N$,必定存在$n_i\leqslant n\leqslant n_{i+1}$,有

$$-\varepsilon<x_{n_i}-A\leqslant x_n-A\leqslant x_{n_{i+1}}-A<\varepsilon,$$

从而　$|x_n-A|<\varepsilon$.

可知数列$\{x_n\}$收敛于A.因此命题正确.

对于命题③,因$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$,由极限的定义可知,对于任意给定的$\varepsilon>0$,必定存在自然数$N_1,N_2$:

当$2n>N_1$时,恒有　$|x_{2n}-A|<\varepsilon$;

当$2n+1>N_2$时,恒有　$|x_{2n+1}-A|<\varepsilon$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时,总有$|x_n-A|<\varepsilon$.因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.可知命题正确.

故答案选择(D).

【注】本题命题③为 2015 年考研实考题,提醒读者注意基本功训练.

1.3. (D) **【解析】**令$g(x)=\varphi[\varphi(x)]$,注意$\varphi(x)$是奇函数,有

$$g(-x)=\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[-\varphi(x)]=-\varphi[\varphi(x)]=-g(x),$$

因此$\varphi[\varphi(x)]$为奇函数,同理可得$f[\varphi(x)]$,$f[f(x)]$,$\varphi[f(x)]$均为偶函数.答案选(D).

1.4. (B) **【解析】**注意在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内,$\sin x$是增函数,$\cos x$是减函数.

任取 $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1 < x_2$，有 $\cos x_1 > \cos x_2$，所以 $\sin(\cos x_1) > \sin(\cos x_2)$，即 $f(x)$ 是减函数；由于 $\sin x_1 < \sin x_2$，所以 $\cos(\sin x_1) > \cos(\sin x_2)$，即 $\varphi(x)$ 是减函数.

【注】复合函数的单调性：若 $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数，则 $f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$ 是增函数，而 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是减函数.

1.5. (C) **【解析】**$f_2(x) = f_1[f_1(x)] = \dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}} = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

设
$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\ (k \geqslant 1),$$
则
$$f_{k+1}(x) = f_1[f_k(x)] = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$
因此对任意 $n \geqslant 1$，$f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，故选(C).

1.6. (D) **【解析】**$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leqslant 0, \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$

1.7. (C) **【解析】**令 $u(x) = \dfrac{2}{x}$，$v(x) = \dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时可排除(A)；令 $u(x) = v(x) = \dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时可排除(B)；令 $u(x) = \dfrac{1}{x}$，$v(x) = -\dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时可排除(D).

1.8. (D) **【解析】**如 $\alpha(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta(x) = x$，当 $x \to 0$ 时，都是无穷小. 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较阶的高低.

1.9. (A) **【解析】**对于任意给定的正数 M，总存在点 $x_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，当 $n > \dfrac{2M-\pi}{4\pi}$，使 $|f(x_n)| = \left|2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right| > M$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

(C) 错，对于任意给定的正数 M，无论 x 取多么大的正数，总有 $x_n = |2n\pi| > x$（只要 $|n| > \dfrac{x}{2\pi}$），使 $f(x_n) = x_n \sin x_n = 0 < M$，故当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.10. (B) **【解析】**令 $\dfrac{1}{x} = t$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}} - 1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha} - \left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\sin t} - 1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1} - 1]} = \dfrac{1}{\alpha - 1}(\alpha \neq 1)$.

1.11. (D) **【解析】**设 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时为无界变量，不是无穷大. 令 $g(x) = x$，当 $x \to 0$ 时为无穷小，可排除(A). 设 $x \to 0$ 时，令 $f(x) = x^2$，$g(x) = \dfrac{1}{x}$ 可排除(B)，(C).

1.12.(B) **【解析】方法一** 若 $f(x)+\sin x$ 在点 x_0 处连续,则

$$f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$$

在点 x_0 处也连续,与已知矛盾.

方法二 排除法.设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,$f(x)\sin x\equiv 0$ 在 $x=0$ 处连续.若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,但 $f^2(x)=1$,$|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处都连续.故可排除(A),(C),(D).

1.13.(A) **【解析】**有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小量.

1.14.(C) **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\left[e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right]}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq 0,$$

则 $n=3$ 时,$C=\dfrac{1}{3}$.

1.15.(D) **【解析】**分母不为零,故 $\lambda\leqslant 0$;又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,故 $k>0$.

1.16.(D) **【解析】**由 $f(x)$ 的表达式可知 $x=0$,$x=1$ 为其间断点.

$x\to 1^+$,$x-1\to 0^+$,$\dfrac{x}{x-1}\to+\infty$,$e^{\frac{x}{x-1}}\to+\infty$,$f(x)\to 0$;

$x\to 1^-$,$x-1\to 0^-$,$\dfrac{x}{x-1}\to-\infty$,$e^{\frac{x}{x-1}}\to 0$,$f(x)\to-1$;

$x\to 0^+$,$\dfrac{x}{x-1}\to 0^-$,$e^{\frac{x}{x-1}}-1\to 0^-$,$f(x)\to-\infty$;

$x\to 0^-$,$\dfrac{x}{x-1}\to 0^+$,$e^{\frac{x}{x-1}}-1\to 0^+$,$f(x)\to+\infty$.

故 $x=1$ 是第一类间断点,$x=0$ 是第二类间断点,选(D).

1.17.(A) **【解析】**$x=0$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点,其余点连续.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\ln|x|\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

则 $x=0$ 为可去间断点.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}\sin x=\begin{cases}\sin 1, & x\to 1^+,\\ -\sin 1, & x\to 1^-,\end{cases}$$

因 $x\to 1$ 时,$\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1$,则 $x=1$ 为跳跃间断点.答案选择(A).

1.18.(A) **【解析】**不妨设 $f(x)$ 单调增加,且 $|f(x)|\leqslant M$,对任一点 $x_0\in(a,b)$,当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 随着 x 增加而增加且有上界,故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在;当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 随着 x 减小而减小且有下界,故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在,故 x_0 只能是第一类间断点.

二、填空题

1.19. na 【解析】令 $x=-1$，则 $f(1)=f(-1)+f(2)$，因 $f(x)$ 是奇函数，得到 $f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$. 再令 $x=1$，则 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$，现用数学归纳法证明

$$f(n)=na.$$

当 $n=1,2,3$ 时，已知或者已证. 假设 $n=k$ 时，有 $f(k)=ka$. 当 $n=k+1$ 时，$f(k+1)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a$，故对一切正整数 n，有 $f(n)=na$，令 $x=0$，则 $f(2)=f(0)+f(2)$，即 $f(0)=0=0\cdot a$，又 $f(x)$ 是奇函数，故对一切负整数 n 有 $f(n)=-f(-n)=-(-na)=na$. 所以对一切整数 n，均有 $f(n)=na$.

1.20. $e^{\frac{1}{100}x^2}$ 【解析】当 x 充分大时，有重要关系：$e^{\alpha x}\gg x^\beta\gg\ln^\gamma x$，其中 $\alpha,\beta,\gamma>0$，故本题填 $e^{\frac{1}{100}x^2}$.

1.21. 0 【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0.$

1.22. 2 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2.$$

1.23. $5,\dfrac{1}{4^5}$ 【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(4-\frac{1}{x}\right)^\alpha}x^{5-\alpha}$

$$=4^{-\alpha}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{5-\alpha}=\beta>0,$$

所以 $\alpha=5,\beta=\dfrac{1}{4^5}$.

1.24. -3 【解析】当 $x\to0$ 时，

$$\ln\frac{1-ax^2}{1+ax^2}=\ln\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)\sim-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\sim-2ax^2,$$

$$\frac{1}{10\ 000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)\sim\sin^2(\sqrt{6}x)\sim6x^2,$$

故 $a=-3$.

1.25. $-\dfrac{2}{9}$；2 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\cos\frac{2x}{3}\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\cos\frac{2x}{3}-1\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\frac{2x}{3}-1}{Ax^k}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}{2}}{Ax^k}=-\frac{2}{9}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{Ax^k}=1.$$

故 $k=2,-\dfrac{2}{9A}=1$，即 $A=-\dfrac{2}{9}$.

1.26. $-\dfrac{1}{32}$；2 【解析】当 $x\to\pi$ 时，

$$\sqrt[4]{\sin\frac{x}{2}}-1=\sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}-1$$
$$=\sqrt[4]{1+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]}-1$$
$$\sim\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]$$
$$\sim\frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\right]=-\frac{1}{32}(x-\pi)^2.$$

故 $A=-\frac{1}{32},k=2.$

1.27. 1 **【解析】** $\lim\limits_{x\to0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1,\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a.$ $f(x)$ 在零点处连续,可得

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=1=\lim_{x\to0^-}f(x)=a.$$

1.28. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **【解析】**因为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right],$$

而

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right],$$

所以$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}}$,由于$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$,这样$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\to0(n\to\infty)$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

三、解答题

1.29.【解】本题考查分段函数的复合方法.下面用解析法求解.

首先,广义化为 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant0,\\ \ln g(x), & g(x)>0.\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知,

(1) 当 $g(x)\leqslant0$,即$\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}$或$\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}$,而

$$\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln2\},$$
$$\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}=\{-1\leqslant x\leqslant1\}\cap\{x>0\}=\{0<x\leqslant1\}.$$

(2) 当 $g(x)>0$,即$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}$或$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}$,而

$$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x>-\ln2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{-\ln2<x\leqslant0\},$$
$$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}=\{x>1\text{或}x<-1\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}.$$

综上,得 $f[g(x)]=\begin{cases}(2e^x-1)^2-1, & x\leqslant-\ln2,\\ \ln(2e^x-1), & -\ln2<x\leqslant0,\\ (x^2-1)^2-1, & 0<x\leqslant1,\\ \ln(x^2-1), & x>1.\end{cases}$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1.30.【解】(1) 若 $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$,则$\sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant 1 \cdot \sqrt[n]{3}$,

若$\dfrac{1}{2} \leqslant x < 2$,则 $2x < \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant 2x\sqrt[n]{3}$;

若 $2 \leqslant x < +\infty$,则 $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant x^2\sqrt[n]{3}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$,故

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2},\\ 2x, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < 2,\\ x^2, & 2 \leqslant x < +\infty.\end{cases}$$

(2) 因为 $f(x)$ 在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\left[\dfrac{1}{2},2\right),[2,+\infty)$ 上均连续,又

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=1,\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$
$$\lim_{x\to2^-}f(x)=4,\ \lim_{x\to2^+}f(x)=4,\ f(2)=4,$$

所以 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续.

【注】本题源于苏联的数学竞赛题,在近些年考研中多次涉及,是用夹逼准则求极限的典型考题. 注意本题的放缩法.

(1) 夹逼准则:①$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$;②$y_n \to A, z_n \to A \Rightarrow x_n \to A(n\to\infty)$.

(2) 对于 $u_1+u_2+\cdots+u_n(u_i \geqslant 0, n$ 为有限数),其放缩法为:

$$1\cdot u_{\max} \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant n\cdot u_{\max}.$$

1.31.【解】因为$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} > (3^n)^{\frac{1}{n}}=3$,又

$$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} < (3\cdot3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot3^{\frac{1}{n}},\lim_{n\to\infty}3\cdot3^{\frac{1}{n}}=3,$$

由夹逼准则,得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.32.【解】(1) 当 $x\to0$ 时,$\tan x \sim x,(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1 \sim \dfrac{1}{n}\sin x \sim \dfrac{x}{n}$,故原极限 $=\dfrac{1}{n}$.

(2) 这是“1^∞”型极限,可用公式$\lim\limits_{x\to0}u^v=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}v(u-1)\right\}$来计算,事实上

$$\ln u=\ln[1+(u-1)] \sim u-1(u\to1).$$

故原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+e^x-1}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{e^x-1}{x}\right)\right\}=e^2$.

(3) 这是“$\infty-\infty$”型未定式极限,首先通分变成“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式,然后使用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2},$$

或利用等价无穷小代换 $e^x-1 \sim x(x\to0)$,则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2}=\frac{3}{2}.$$

【注】典型错误：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2e^x+xe^x)=2.$

等价无穷小代换只能在乘除运算时使用，不能在加减运算时使用.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$ 是"1^∞"型极限，可以使用洛必达法则求极限，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]$$

$$\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 $\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3x\cdot x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\frac{1}{6}.$

投命题者所好，当狗 $\to0$ 时，狗 $-\sin$ 狗 $\sim\frac{1}{6}$ 狗^3.

(6) 当 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x$，$x\sin^2x\sim x^3$，故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\quad\left(x\to0\text{ 时},\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right).$$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.$$

根据海涅定理，取 $x=\frac{1}{n}$，则原式 $=e^{\frac{1}{3}}$.

(9) 当 $x=0$，原式 $=1$；

当 $x\neq0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\cdot\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]+0$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a-\frac{a}{1+ax}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

(12) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}=\dfrac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}$.

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1+\ln x}\right\}=e^0=1$.

(14) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^-}\tan x\ln(\cot x)\}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\cot x)\}=e^0=1$.

(15) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{3}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)2\sin x\cos x}{\frac{4}{3}x^3}=\dfrac{3}{2}$.

(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

(17) 原式$=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}$$

$=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$(注意常用的公式:$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$).

(18)$\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$;$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$;$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2^2 2!}+o(x^4)$.

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+o(x^4)}=\dfrac{1}{6}$.

(19) 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$,故

$$\lim_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right\}=e.$$

(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$,

故$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(21)$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)$,$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^3)(x\to 0)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\right\}$

$$\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}\right\}=e^{\frac{1}{2}}.$$

【注】典型错误:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$.错误原因:求极限是一个统一的过程,即,在同一极限号下当$x\to+\infty$(或x_0)时,所有的x都要$\to+\infty$(或x_0),不能一部分$x\to+\infty$(或x_0),而另一部分x不$\to+\infty$(或x_0).

1.33.【证】用反证法.设$|f(1)|$,$|f(3)|$,$|f(5)|$都小于2,即

$|f(1)|=|a+b+1|<2$，$|f(3)|=|3a+b+9|<2$，$|f(5)|=|5a+b+25|<2$，

则 $$|f(1)-2f(3)+f(5)|\leqslant|f(1)|+2|f(3)|+|f(5)|<2+2\times2+2=8.$$

而事实上，$|f(1)-2f(3)+f(5)|=|a+b+1-6a-2b-18+5a+b+25|=8$ 矛盾，故 $|f(1)|$，$|f(3)|$，$|f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.34.【解】 $\frac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})$，即

$$1<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\sqrt[n]{n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1.$

1.35.【解】 因为 $x\to0$ 时 $\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}$，而

$$\ln\frac{2+\cos x}{3}=\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim\frac{\cos x-1}{3}\sim\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3}=-\frac{1}{6}x^2,$$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$

1.36.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin^2x+e^x}{e^x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+e^{2x}}{e^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{e^x}\cdot\frac{e^{2x}}{x^2}=\lim_{x\to0}e^x=1.$$

1.37.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{-1+\frac{1}{x}}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x}+1$$

$$=1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}=1+1=2.$$

1.38.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})(1+\sqrt{\cos 2x})}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot4x^2}{x^2}=1,\text{故}$$

原极限 $=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

1.39.【解】为了在使用洛必达法则时使求导变得简单,先做变量代换,令 $t=\frac{1}{x}$,

从而原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^{t})}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}\cdot\frac{1+e^{t}}{e^{t}}=2$.

1.40.【解】此题为"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式,若用洛必达法则,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

连续使用完两次法则,又回到了起点,法则失效,正确的做法是先对式子恒等变形.

分子分母同乘 e^{-x},$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$.

1.41.【解】

原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{nx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{n}\left(\frac{a_1^x-1}{x}+\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\frac{a_n^x-1}{x}\right)$

$=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)$,

故原极限 $=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

1.42.【解】方法一 原极限等价于求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)$. 令 $f(t)=\arctan t,t\in\left[\frac{a}{x+1},\frac{a}{x}\right]$,由拉格朗日中值定理可得

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=\frac{1}{1+\zeta^2}\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right),\text{其中 }\zeta\in\left(\frac{a}{x+1},\frac{a}{x}\right),$$

$$\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{1+\zeta^2}\cdot\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\zeta^2}\cdot\frac{ax^2}{x(x+1)}=a.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)$.

令 $\frac{1}{x}=t\Rightarrow\frac{a}{x+1}=\frac{at}{1+t}$,所以

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan at-\arctan\frac{at}{1+t}}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{a(2t+t^2)}{2t(1+a^2t^2)[(1+t)^2+a^2t^2]}=a.$$

1.43.【解】因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A$,所以 $\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$,又 $x\to0$ 时,

$$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a.$$

这样 $\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]\sim(A+\alpha)\cdot x\ln a\sim Ax\ln a(x\to0)$,所以 $1+\frac{f(x)}{\sin x}\sim a^{Ax}$,因此

$$f(x)\sim(a^{Ax}-1)\sin x\sim Ax\ln a\cdot\sin x,$$

于是得到 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{Ax\ln a\cdot\sin x}{x^2}=A\ln a$.

1.44.【解】设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$,则

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+\lim_{x\to 1}\left[2x^2e^{x-1}\lim_{x\to 1}f(x)\right]$$

$$\Rightarrow A=\lim_{t\to 0}\frac{t-\arctan t}{t^3}+2A$$

$$\Rightarrow A=-\lim_{t\to 0}\frac{t-\arctan t}{t^3}=-\lim_{t\to 0}\frac{t-\left[t-\frac{t^3}{3}+o(t^3)\right]}{t^3}=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}-\frac{2}{3}x^2e^{x-1}.$$

1.45.【解】因为$\lim\limits_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq 0)$，所以$f(2a)=f(4a)=0$，从而得知$x-2a,x-4a$为$f(x)$的因式.又因为$f(x)$为三次多项式，可令$f(x)=b(x-2a)(x-4a)(x-c)$.于是

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 2a}\frac{b(x-2a)(x-4a)(x-c)}{x-2a}=-2ab(2a-c)=1,$$

$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to 4a}\frac{b(x-2a)(x-4a)(x-c)}{x-4a}=2ab(4a-c)=1,$$

解得$\begin{cases}b=\frac{1}{2a^2},\\c=3a,\end{cases}$所以$f(x)=\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)$，这样

$$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\frac{1}{2a^2}\cdot a\cdot(-a)=-\frac{1}{2}.$$

1.46.【解】 $\frac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=\frac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\beta}=\frac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left[1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)}$，

显然由条件知$\beta\neq 0$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)}=\begin{cases}\infty, & \alpha-\beta+1>0,\\ \frac{1}{\beta}, & \alpha-\beta+1=0,\\ 0, & \alpha-\beta+1<0,\end{cases}$$

因此有$\alpha-\beta+1=0$，且$\frac{1}{\beta}=10$，故$\alpha=-\frac{9}{10},\beta=\frac{1}{10}$.

1.47.【证】 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$

$$=e\cdot\left\{1+\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]+\frac{1}{2!}\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]^2+o(x^2)\right\}$$

$$=e\cdot\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right]=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2),$$

故$A=-\frac{e}{2},B=\frac{11}{24}e$.

1.48.【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\frac{1}{2}\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right]$，

而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}=-1$，故原极限$=\frac{e}{2}$.

【注】请问，可以不用洛必达法则吗？当然可以.请读者利用上一题的答案思考.

1.49.【解】先看$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com