高等教育自学考试指定教材配套辅导丛书(续V)

总主编　李怀强　孙自强　程爱学

离　散　数　学

自考过关教练

主　编　党　锋　乔惠英
副主编　侯　洁

中华工商联合出版社

前　言

《离散数学》是遵照全国高等教育自学考试委员会电子电工与信息类专业委员会审定的《离散数学自学考试大纲》要求而编写的自学教材。

计算机与计算机科学正以无比的优越性和强劲的势头迅猛地进入人类社会的各个领域,急剧地改变着人们的生产方式和生活方式,而信息化社会必然对人才素质和知识结构提出新的要求。

为了帮助广大计算机及应用专业的自学考试考生学好《离散数学》,更好地掌握计算机应用的基本知识与能力,以适应于计算机技术与应用日益发展与普及的时代,我们总结长期教学经验,按照大纲和题型要求编写了这本《离散数学自考过关教练》。

本书以考试大纲为纲,以教科书(全国考委组编本,左孝凌主编,经济科学出版社出版)为根本。其内容共分三部分:第一部分是自考门径,第二部分是综合练习题,题型有选择题、填空题、计算题、证明题。第三部分是考前模拟题。书中为广大考生提供了大量的题解分析和练习题目,选题内容、题型与考试一致,重点突出,针对性强,以期自学者在掌握各章节要点的基础上,学会对习题的分析方法与解答方法。所选练习题带有典型性和启发性,对某些难点作了详尽的分析。考生通过这些题型的练习和自测,可为通过考试打下必胜的基础。本书是为准备参加自学考试这门课程的考生提供的具有积极作用的一本考前辅导书。

由于时间仓促,水平有限,书中错误与不足之处在所难免,恳请广大读者批评指正,以利日后改进。

编　者

目　　录

第一部分　离散数学自考门径

离散数学是高等教育自学考试计算机及应用(独立本科段)专业考试计划中的一门基础课,它研究世界事物间的离散结构和相互关系。离散数学理论体系完整,结构严谨,具有很多相应的典型实例。对于学习有关计算机理论与实践,离散数学是一门必不可少的工具性学科。同时通过对本课程学习,要使学生能够接受现代数学关于离散结构的观点,从系统结构的研究方法出发,研究事物的有关属性;同时要应用数形结合方法,使事物论证简洁直观;此外要通过描述方法和缜密思维方法的训练,使学生具有良好的抽象思维和逻辑思维能力。总之,离散数学不仅是一门服务于专业的工具性学科,而且也是一门培养学生具有缜密素质的核心基础课程。

一、课程要求

离散数学是培养学生抽象思维和缜密思维概括能力的素质训练课程。它需要使学生紧密结合专业,为其他专业基础课程做好各种数学知识的准备,同时也要使学生兼具开拓能力。本课程总目标是训练学生具有严密的思维方法,严格证明的推理能力,应用自如的解题技巧,以及训练有素的演算能力,使学生能掌握处理各种离散结构事物的描述工具与方法,以适应学习其他专业课程的各种需要。

一般离散数学课程包括数理逻辑、集合论、图论、代数结构等四个部分。数理逻辑的重点是公式演算与推理证明;集合论的重点是关系理论与映射的描述;图论着重于数形结合的描述以及各种实际应用;代数结构则主要是从系统宏观的代数方法去研究客观事物的各种性质与特征。

离散数学是一门体系独立自行封闭的基础数学课程,但为了论述方便,此课程应安排在高等数学与线性代数课程之后。为了加强离散结构方法的训练,在讲授本课程的基础上,可讲授数据结构、数据库原理,这样对于集合和图论的应用能够加深理解,温故而知新。另外离散数学与计算机网络与通信,以及计算机系统结构等课程关系紧密,是本专业其它专业基础课和专业课的先修课程。

二、应试指导

离散数学是一门结构严谨,概念繁多,解题技巧变化万庙的基础核心课程。为了使本课程通过自学真正达到课程大纲预定的目标,特提出如下一些指导自学的参考意见:

首先必须认真阅读教材,边读边做笔记,在阅读教材的基础上,逐字逐句地理解每一学习内容,反复巩固反学知识,即要做到粗读—精读—再精读;阅读时以“节”为单位,详细摘记教材有关内容,搞清基本名词定义的含义后,对有关定理必须了解其证明的思路与方法。在仔细阅读每节教材以后,认真解答问题,在解题过程中必须先抄写题目,详细审题,

逐步完整地写出解题过程,不能草率或心算写出答案,简略地完成解答习题任务,必须养成严谨的解题习惯;正确使用有关资料和题解手册,在做习题时,必须在阅读教材基础上独立思考解题,在解题遇到困难时,不要轻易查阅相应题解手册,务必不要先看题解后做习题,这样长此以往,将会严重丧失独立思考能力;对于自学者来说阅读一遍书是不够的,有时即使阅读两三遍也可能未完全弄清楚,这不足为奇,更不要为此丧失信心,必须反复巩固学习内容,不断加深理解所学知识,及时总结阶段性知识成果,不断深入,不断进步;每章学习后要总结归纳每章学习内容,写出每章问题概要,写出典型实例,但每个习题并不都有典型模式,应该培养举一反三,触类旁通的能力。

"考核要点"中各条知识细目都是考试的内容,试题覆盖到章,且适当突出重点章节,加大重点内容的覆盖密度;试卷中不同能力层次所占的比例大致是:"识记"占 15%,"领会"占 35%,"简单应用"占 35%,"综合应用"占 15%;试题难易程序可分为四档:易、较易、较难、难。这四档在每份试卷所占的比例大致依次为 2:3:3:2;试题主要题型有单项选择、填空、计算、证明、应用等;考试方式为闭卷、笔试,考试时间为 150 分钟,试题量以中等水平考生在规定时间内答完全部试题为准,评分采用百分制,60 分为及格。

(一)选择题

例 1.关于命题变元 $P_1, P_1 \cdots P_n$ 的不同的极小项共有 ( )

A. n^2 个　　　　B. 2^n 个

C. 2^{2n}个　　　　D. n 个

答:B

例 2.设 $f: x \to Y$ 和 $g: Y \to Z$,若 $g \circ f$ 是双射,则 ( )

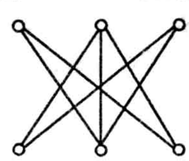
A. g 是内射且 f 是满射　　　　B. g 是满射

C. g 是内射　　　　D. g 是满射且 f 是内射

答:$B\ C\ D$

例 3.下图是 ( )

A.平面图　　B.欧拉图　　C.哈密顿图　　D.二部图



答:$A\ C\ D$

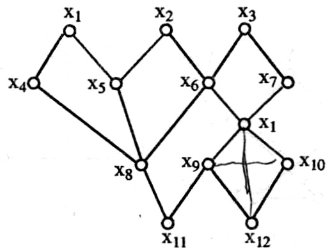
例 4.若集合 A 上的二元关系 R_1 和 R_2 都是反对称的,则 ( )

A. $R_1 \cup R_2$ 是反对称的　　　　B. $R_1 \cap R_2$ 是反对称的

C. $R_1 - R_2$ 是反对称的　　　　D. $R_1 \oplus R_2$ 是反对称的

答:$B\ C$

例 5.集合 $\{X_1, X_2, \cdots, X_{13}\}$ 上的半序关系 R 的哈斯图如下,$S = \{X_1, X_2, X_5, X_6, X_7\}$,则 ( )



A. *S* 的极大元集合为$\{X_1, X_2, X_3\}$　　*B*. *S* 的极大元集合为$\{X_1, X_6, X_7\}$

C. *S* 有下界　　*D*. *S* 无下确界

答：*B C*

(二)填空题

例 1. $\bigcap\{\Phi, \{a\}, \{b\}\}$ = ________。

答：Φ

例 2. $\{a, b, c\} - \{c, d, e\}$ = ________

答：$\{a, b\}$

例 3. 若$\{1, 2, 3, 4, 5\}$上的二元关系 $R = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$，则 $domR$ = ________，$ranR$ = ________。

答：$\{1,2,3\}$　$\{4\}$

例 4. 若 $f: N \to N$，f(____) $= 2n + 1$，则 $f^{-1}[\{2,3,4,5\}]$ = ________。

答：n　$\{1,2\}$

例 5. 使合式公式$(P \vee \neg P \to Q) \to (P \vee \neg P \to R)$为假的全部解释为{________，________}。

答：F, T, F　T, T, F

例 6. 给命题变元 P 指派真值 T，Q 和 R 指派真值 F，公式 $P \wedge Q \to (P \to R) = P \vee R$ 的真值为()。

答：T

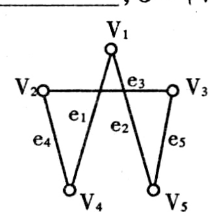
例 7. 公式 $P \to (P \wedge Q)$的主合取范式为________

答：$\neg P \to Q$

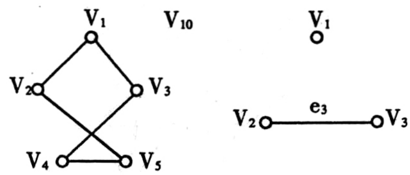
例 8. V_1 和 V_2 是连通无向图 G 的两个结点，则 G 有一条从 V_1 至 V_2 的欧拉路径当且仅当()

答：G 恰有两个奇结点 V_1 和 V_2

例 9. 图 G 如图所示，则 $\bar{G}$ 为________，$G - \{V_4, V_5\}$为________。



答:



例 10. $\{1,2\}\oplus\{2,3\}=$ ________

答:$\{1,3\}$

例 11. 设 $f:X\rightarrow Y$,且 $X\neq\Phi$,f 为右可逆的当且仅当________,f 为左可逆的当且仅当________。

答:f 是满射　f 是内射

例 12. 设 $f:\{1,2,3\}\rightarrow\{4,5\}$,定义为 $f=\{<1,4>,<2,5>,<3,4>\}$,则 f 有________个左逆,有________个右逆。

答:0　2

例 13. n 阶二叉树有________条边,有________个叶结点,有________分支结点。

答:$n-1$　$\dfrac{n+1}{2}$　$\dfrac{n-1}{2}$

例 14. 台式公式 $(P\wedge Q)\vee[\neg P\vee Q]$ 的对偶式为________。

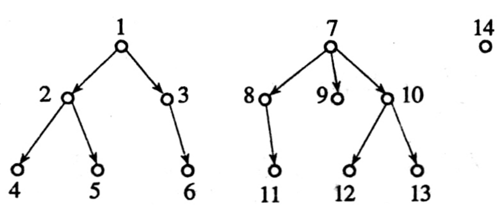
答:$(P\vee Q)\wedge[\neg P\wedge Q]$

例 15. 设图 $G_1=<V_1,E_1,\varphi_1>$ 和 $G_2=<V_2,E_2,\varphi_2>$ 是可运算的,若________,则存在唯一的 $G_1\cap G_2$。

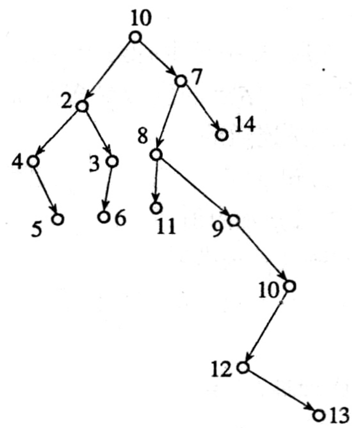
答:$V_1\cap V_2\neq\Phi$

(三)计算题

例 1. 画出下面的有序森林对应的二元定位有序树。



答:二元定位有序树如下:



(四)证明题

例 1.用自然推理系统证明:

$P\to Q\vdash(P\wedge R)\to(Q\wedge R)$

证明:(1)$P\to Q,P\wedge R\vdash P\wedge R$　　　　$(\in)$

(2)$P\to Q,P\wedge R\vdash$　　　　$(\wedge_-)(1)$

(3)$P\to Q,P\wedge R\vdash P\to R$　　　　$(\in)$

(4)$P\to Q,P\wedge R\vdash Q$　　　　$(\to_+)(2,3)$

(5)$P\to Q,P\wedge R\vdash R$　　　　$(\wedge_-)(1)$

(6)$P\to Q,P\wedge R\vdash Q\wedge R$　　　　$(\wedge_+)(4,5)$

(7)$P\to Q\vdash(P\wedge R)\to(P\wedge R)$　　　　$(\to_+)(6)$

例 2.用自然推理系统证明:$A\to B\vdash\neg B\to\neg A$

证明:(1)$A\to B,\neg B,A\vdash\ A\to B$　　　　$(\in)$

(2)$A\to B,\neg B,A\vdash\ A$　　　　$(\in)$

(3)$A\to B,\neg B,A\vdash\ B$　　　　$(\to_-)$　(1)　(2)

(4)$A\to B,\neg B,A\vdash\ \neg B$　　　　$(\in)$

(5)$A\to B,\neg B\vdash\neg A$　　　　$(\to_-)$　(3)　(4)

(6)$A\to B,\vdash\neg B\to\neg A$　　　　$(\to_+)$　(5)

例 3.设无向图 G 中有 n 个顶点,m 条边,已知 $m\geqslant n$。证明 G 中必有回路。

证明:假设图 G 中没有回路,设 G 有 $k(k\geqslant1)$个分支,$G_1,G_2,\cdots G_k$,则 $G_1(1\leqslant i\leqslant k)$中也没有回路,$G_i$ 为树,设 G_i 有 n_i 结点,m_i 条边,所以　　$m_i=n_i-1$

$$m=\sum_{i=1}^{k}m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k,(k\geqslant1)$$

因此 $m<n$,这与 $m\geqslant n$ 矛盾,故 G 中必有回路。

例 4.用图论证明:有 $2n$ 个电话局,如果每个电话局都至少与另外 n 个电话局直接通话,则其中任何两个电话局都是可以通话的(包括通过另外的电话局进行间接通话)。

分析:用 $2n$ 个结点表示 $2n$ 个电话局,凡是能直接通话的电话局之间连一条边,这样

就得到一个简单图 G。由题意知，G 中每个结点的度数 $\geqslant n$，要证明每两个结点之间必有一条路径，即证明 G 是连通的。

证明：(用反证法)，设 G 不连通，G 中至少有两个分支。于是必存在一个最多具有 n 个结点的分支，在这样的分支中，每个结点的度数最多是 $n-1$，这与 G 中每个结点的度数 $\geqslant n$ 的假设矛盾。因此，G 只能是连通的。

例 5. 设 $f: X \to Y$，$g: Y \to X$，已知 $g \circ f = I_x$，$f \circ g = I_y$，证明：f 可逆且 $f^{-1} = g$。

证明：$\because f \circ g = I_y$，$\therefore f$ 是满射且 g 是内射，

又 $\because g \circ f = I_x$，$\therefore f$ 是内射且 g 是满射，

故 f 和 g 都是双射。

$\because f \circ g = I_y$ 且 $g \circ f = I_x$

$\therefore$ 由逆函数定义知 f 是可逆的且 $f^{-1} = g$

(五) 应用题

例. 设 $< A, +, \circ >$ 是定义了普通加法和乘法的代数系统，A 分别表示以下各集合：

(a) $A = \{x \mid x \geqslant 0, x \in I\}$ (I 为整数集合)

(b) $A = \{x \mid a + b\sqrt{3}, a, b, \in Q\}$ (Q 为整数集合)

问 $< A, +, \circ >$ 在以上各种情况下是否是整环？是否是域？说明理由。

答：(a) $< A, +, \circ >$ 甚至不是环。因为一切 $x \in I$，$X > 0$ 对加法都没有逆元。所以不满足环要求 $< A, + >$ 是交换群的要求。

(b) 是整环。因为 $< A, \circ >$ 含幺元 1，运算 $\circ$ 是可交换的，且无零因子。

同时，$< A, +, \circ >$ 也是域。因为 $< A - \{0\}, \circ >$ 是可交换群。事实上，对每一个 $a + b\sqrt{3} \neq 0$，都有 $(a - b\sqrt{3})/(a^2 - 3b^2)$ 它们互为逆元。因此，$< A - \{0\}, \circ >$ 是可交换群(验证在有理数域上 $a^2 - 3b^2 \neq 0$)

第二部分　离散数学综合复习题解

第一章　命题演算

数理逻辑的任务是采用数学方法研究抽象的思维规律，研究的中心问题是推理，而推理基本要素是命题，故学习本章首先要深刻理解命题的概念。理解原子命题与复合命题的关系，在了解复合命题的基础上，理解联结词的定义。命题演算中两个重要内容是命题公式的范式表示与命题的推理理论，前者主要是命题公式化简与主范式表示，后者则需熟悉直接推理与间接推理两种方法。

本章重点是命题概念及其表示、命题公式化简、主范式及其互化、P 规则、T 规则以及 CP 规则。难点是推理理论及应用。

考核要点

1. 命题概念，要求达到“领会”层次。
   命题与真值的概念
   复合命题与联结词关系
   命题公式与联结词的简化
2. 命题公式化简要求达到“简单应用”层次。
   命题等价式与蕴含式的定义
   造真值表证明等价式
   不构造真值表证明蕴含式与等价式
3. 命题公式的形式化描述要求达到“简单应用”层次。
   命题符号化与翻译
   命题翻译中歧义性消除
4. 范式与主范式要求达到“简单应用”层次。
   合取范式与析取范式概念
   主合取范式与主析取范式求法
   Π、Σ的命题公式互化
5. 推理理论要求达到“简单应用”层次。
   P 规则、T 规则的推理证明
   应用 CP 规则等间接推理证明

综合练习题解

一、选择题

1. 下列句子中哪些是命题。

(1)我是教师。

(2)禁止吸烟。

(3)蚊子是鸟类动物。

(4)上课去!

(5)月亮比地球大。

其中(　　)是命题。

供选择项:

A.(1),(2),(4),(5)　　B.(1),(2),(3),(4)

C.(1),(3),(5)　　D.(1),(3),(4),(5)

答:C

2. 设 P:我生病,Q:我去学校。

(1)虽然我生病,但我仍去学校。符号化为:(　　)。

(2)只有在生病的时候,我才不去学校。符号化为:(　　)。

(3)如果我生病,那么我不去学校。符号化为:(　　)。

供选择项:

A. $P\vee Q$　　B. $P\wedge Q$　　C. $P\rightarrow Q$　　D. $P\rightarrow\neg Q$

E. $P\rightleftarrows Q$　　F. $Q\rightleftarrows P$

答:(1)B　(2)F　(3)D

3. 设 P:我有钱,Q:我去看电影,R:我在家看电视。

(1)如果我有钱,那么我就去看电影,R:我在家看电视。

(2)虽然我有钱,但我不去看电影而在家里看电视。符号化为:(　　)。

(3)如果我有钱,那么我去看电影,否则在家看电视。符号化为:(　　)。

供选择项:

A. $P\vee Q$　　B. $P\wedge\neg Q\wedge R$　　C. $P\rightarrow Q$

D. $(P\leftrightarrows Q)\wedge(\neg P\leftrightarrows Q)$　　E. $P\rightarrow(\neg Q\vee E)$

答:(1)C　(2)B　(3)D

4. 对于下列各式

(1) $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$

(2) $P\rightarrow(P\vee Q)$

(3) $Q\rightarrow(P\wedge Q)$

(4) $(\neg P\wedge(P\vee Q))\rightarrow A$

(5) $(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$

其中(　　)永真式

供选择项：

A.(1),(2),(3)　　B.(1),(3),(5)

C.(1),(3),(4)　　D.(1),(2),(4)

E.(1),(2),(3),(4)　　F.(1),(2),(3),(4),(5)

答:D

5.求与下列各式逻辑等价的命题公式。

(1)$P \rightleftharpoons \neg Q \Leftrightarrow$(　　)

(2)$(P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow$(　　)

(3)$(P \vee (P \wedge Q)) \rightarrow R \Leftrightarrow$(　　)

(4)$P \rightarrow (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow$(　　)

供选择项：

~~A.~~P　　B.$P \rightarrow R$　　C.$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

D.$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$　　E.$P \rightarrow Q$　　F.$P \wedge R$

答:(1)D　(2)A　(3)B　(4)E

6.对于前提:$A \rightarrow B, C \rightarrow \neg B, C \vee D, D \rightarrow \neg B$其有效结论为(　　)。

供选择项：

A.A　　B.B　　C.C　　D.D

E.$\neg A$　　F.$\neg B$　　G.$\neg C$　　H.$\neg D$

答:(1)E　(2)F

7.对于前提:$S \rightarrow \neg Q, S \vee R, \neg R, \neg P \rightleftharpoons Q$,其有效结论为(　　)。

供选择项：

A.$\neg S$　　B.Q　　C.R　　D.P

E.$\neg P$

答:D

8.对于下列各式

(1)$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$可化简为(　　)。

(2)$Q \rightarrow (P \vee (P \wedge Q))$可化简为(　　)。

(3)$((\neg P \vee Q) \rightleftharpoons (\neg Q \rightarrow \neg P)) \wedge P$可化简为(　　)。

供选择项：

A.P　　B.$\neg P$　　C.Q　　D.$\neg Q$

E.$Q \rightarrow P$　　F.$P \rightarrow Q$

答:(1)B　(2)E　(3)A

9.对于下列命题公式的主析取范式。

(1)$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$有(　　)极小项。

(2)$(R \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$有(　　)极小项。

(3)$P \vee Q \vee R$有(　　)极小项。

供选择项：

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

E.5　　F.6　　G.7　　H.8

答:(1)B　(2)C　(3)G

10.设 A(x):x 是大学生;B(x):x 要考试;C(x):x 爱唱歌。那么

(1)所有大学生都要参加考试。符号化为(　　)。

(2)有些大学生爱唱歌,符号化为(　　)。

供选择项:

A. $(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$　　B. $(\forall x)(A(x)\land B(x))$

C. $(\exists x)(A(x)\land B(x))$　　D. $(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x))$

答:(1)A　(2)C

11.令 P(x):x 是实数;Q(x):x 是无理数。下列命题:

(1)并非每个实数是无理数。符号化为(　　)。

(2)虽然有些实数是无理数,但未必一切实数都是无理数。符号化为(　　)。

供选择项:

A. $(\forall x)\neg(P(x)\land Q(x))$　　B. $\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

C. $(\exists x)(P(x)\land Q(x))\land\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

D. $\neg((\exists x)(P(x)\land Q(x)))\land((\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)))$

答:(1)B　(2)C

二、计算题

1.如果 P,Q,R 的意义如下:

P:小周是大学生。

Q:小周获得奖学金。

R:小周放声歌唱。

试用日常语言叙述以下命题:

(1) $P\land(Q\rightarrow R)$

(2) $P\land(\neg Q\rightarrow\neg R)$

(3) $\neg P\land\neg Q\land R$

答:

(1)小周是大学生,如果他获得奖学金,那么他就放声歌唱。

(2)小周是大学生,如果他没有获得奖学金,那么他不放声歌唱。

(3)小周不是大学生,也没有获得奖学金,但他放声歌唱。

2.求下列命题公式的析取范式和合取范式。

(1) $(P\land(Q\rightarrow R))\rightarrow S$

(2) $(P\rightarrow Q)\lor(P\rightarrow R)$

(3) $(\neg P\lor Q)\rightarrow R$

(4) $\neg(P\lor Q)\rightleftharpoons(P\land Q)$

(5) $(P\rightarrow Q)\rightleftharpoons R$

(6) $(P \rightleftharpoons Q) \wedge (\neg R \vee S)$

(7) $\neg (P \to Q) \vee (Q \rightleftharpoons R)$

(8) $P \wedge (Q \rightleftharpoons R)$

答：(1) $(P \wedge (Q \to R)) \to S \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q \vee R)) \to S \Leftrightarrow \neg (P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S \Leftrightarrow \neg R \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$。

由此得到其析取范式为：$\neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S$。

再利用分配律可得：$\neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S \Leftrightarrow (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)$

由此得到其合取范式为：$(\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)$

(2) $(P \to Q) \vee (P \to R) \Leftrightarrow$

$\neg P \vee Q \vee \neg P \vee R \Leftrightarrow$

$\neg P \vee Q \vee R$

于是 $\neg P \vee Q \vee R$ 既是析取范式也是合取范式。

(3) $(\neg P \vee Q) \to R \Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

由此得到其析取范式为：$(P \wedge \neg Q) \vee R$

其合取范式为：$(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

(4) $\neg (P \vee Q) \rightleftharpoons (P \wedge Q) \Leftrightarrow ((\neg (P \vee Q)) \wedge (P \wedge Q)) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q)) \Leftrightarrow$

$(\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \Leftrightarrow$

$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

由此得到其合取范式为：$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

其析取范式为：$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

(5) $(P \to Q) \rightleftharpoons R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \rightleftharpoons R \Leftrightarrow$

$(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg (\neg P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow$

$(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee R) \Leftrightarrow$

$(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

由此得到其合取范式：$(\neg P \vee P \vee \neg R) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$。

又由于 $(P \to Q) \rightleftharpoons R \Leftrightarrow (\neg P \rightleftharpoons Q) \Leftrightarrow R$

$((\neg P \vee Q) \wedge R) \vee (\neg (\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \Leftrightarrow$

$(\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

由此得到其析取范式：$(\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

(6) $(P \rightleftharpoons Q) \wedge (\neg R \vee S) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \vee S)$

由此得到其合取范式：$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \vee S)$。

又由于 $(P \rightleftharpoons Q) \wedge (\neg R \vee S) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg R \vee S) \Leftrightarrow$

$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$

$(P \wedge Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge S)$

由此得到其析取范式：$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge S)$。

(7) $\neg (P \to Q) \vee (Q \rightleftharpoons R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \rightleftharpoons R) \Leftrightarrow$

$$(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$$

由此得到其析取范式：$(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$。

又由于$\neg(P\rightarrow Q)\vee(Q\rightleftharpoons R)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\rightleftharpoons R)\Leftrightarrow$

$(P\wedge\neg Q)\vee((Q\vee\neg R)\wedge(\neg Q\vee R))\Leftrightarrow$

$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\vee R)\Leftrightarrow$

$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\Leftrightarrow\neg Q\vee R$

由此得到其合取范式：$\neg Q\vee R$

(8)$P\wedge(Q\rightleftharpoons R)\Leftrightarrow R\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(Q\vee\neg R)$

由此得到其合取范式：$P\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(Q\vee\neg R)$

又由于 $P\wedge(Q\rightleftharpoons R)\Leftrightarrow P\wedge((Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R))\Leftrightarrow$

$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

由此得到其析取范式：$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

3.求下列命题公式的主析取范式和主合取范式。

(1)$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)$

(2)$(\neg P\vee Q)\rightarrow R$

(3)$\neg(P\vee Q)\rightleftharpoons(P\wedge Q)$

(4)$(P\rightarrow Q)\rightleftharpoons R$

(5)$\neg(P\rightarrow Q)\vee(Q\rightleftharpoons R)$

(6)$P\wedge(Q\rightleftharpoons R)$

答：(1)用真值表法。

由此可得其主析取范式为：$m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{111}\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$。

易知，其主合取范式为：$M_{010}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}\Leftrightarrow(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

(2)用真值表法。

P	Q	R	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

P	Q	R	$(\neg P\vee Q)\rightarrow R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

由此可得其主析取范式为：$m_{001}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{111}\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge$

$Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$。

易知，其主合取范式为：$M_{100}\wedge M_{010}\wedge M_{110}\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$。

(3)利用常用等价式证明之。

$$\neg(P\vee Q)\rightleftharpoons(P\wedge Q)\Leftrightarrow((\neg P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))\Leftrightarrow$$
$$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$$

由此可得其主合取范式为$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow M_{00}\wedge M_{11}$。所以其主析取范式为：$m_{01}\vee m_{10}\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(4)用真值表法

由此可得其主析取范式为：$m_{001}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{111}\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$。

易知，其主合取范式为：$M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{101}\wedge M_{110}\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$。

(5)用真值表法

P	Q	R	$(P\to Q)\rightleftharpoons R)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

P	Q	R	$\neg(P\to Q)\vee(Q\rightleftharpoons R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

由此可得其主析取范式为：$m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{111}\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$。

易知，其主合取范式为：$M_{010}\wedge M_{110}\Leftrightarrow(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$。

(6)利用常用等价式可知

$$P\wedge(Q\rightleftharpoons R)\Leftrightarrow P\wedge((Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R))\Leftrightarrow$$
$$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$$

所以其主析取范式为：$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\Leftrightarrow m_{111}\vee m_{100}$。

易知其主合取范式为：$M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{101}\wedge M_{110}\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$。

4.将下列公式化成与之等值并且仅含$\{\neg,\wedge,\vee\}$中联结词的公式：

(1)$p\vee q\vee\neg r$；

(2)$(p\to q)\to r$；

(3)$(p\leftrightarrow q)\wedge r$;

(4)$p\wedge q\vee\neg r$;

答:(1)公式 $p\vee q\vee\neg r$ 已满足要求。

(2)$(p\rightarrow q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee r$ (满足要求)

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee r$ (已满足要求)

(3)$(p\leftrightarrow q)\vee r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge r$ (已满足要求)

(4)$p\wedge q\vee\neg r$ (已满足要求)

5.设 p,q 的值为 0,r,s 的值为 1,求下列各公式的真值:

(1)$p\vee(q\wedge r)\vee s$;

(2)$(p\leftrightarrow r)\wedge((\neg q\wedge\neg s)\vee(q\wedge s))$;

(3)$(p\wedge(q\vee r))\rightarrow((p\vee q)\wedge(r\wedge s))$;

(4)$\neg(p\vee(q\rightarrow(r\wedge\neg p)))\rightarrow(r\vee\neg s)$;

(5)$\neg(q\rightarrow p)\wedge p\wedge r$;

(6)$(p\rightarrow(p\vee q))\wedge((p\wedge q)\rightarrow q))$.

答:在含 4 个命题变元的公式中,共有 $2^4=16$ 个赋值,本题给出的是 0011,即判断 0011 是成真赋值还是成假赋值。

(1)该公式是含 3 个简单合取式的析取式,其中 s 的真值为 1,故公式真值为 1。

(2)该公式最高层次的联结词是 $\wedge$,而其中$(p\leftrightarrow r)$在赋值 0011 下为假,故 0011 是公式的成假赋值。

类似可讨论(3),(4),(5),(6),对(5)来说给出的赋值为 001(不含 s),对(6)来说给出的赋值为 00(不含 r,s)。

结论为:在给定赋值下,(1),(3),(4),(6)的真值为 1,(2),(5),的真值为 0。

6.用等值演算法求下列公式的主析取范式,主合取范式,并求成真赋值和成假赋值:

(1)$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$;

(2)$(p\vee q\vee\neg r)\rightarrow(p\wedge q\wedge r)$

答:(1)$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\rightarrow(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\vee\neg q\vee p$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg q\vee p$

$\Leftrightarrow\neg q\vee p$ (吸收律)

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$ (主析取范式)

$\Leftrightarrow M_1$ (主合取范式)

说明:倒数第 4 步到倒数第 3 步,直接写出了由$\neg q$ 和 p 派生的极小项,倒数第 3 步到倒数第 2 步用了幂等律。