HIT

数学·统计学系列

Article about the Mathematical Olympiad Inequality

数学奥林匹克不等式散论

邓寿才 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

数学奥林匹克不等式散论

Article about the Mathematical Olympiad Inequality

邓寿才 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

全文共包括探索无限、关于一个三角不等式的研究、关于一道德国数奥题的解读、几道数奥巧题的多种解证等十篇长文。本书适合于高等学校相关专业师生，数学奥林匹克选手及教练员和数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克不等式散论/邓寿才编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.4

ISBN 978-7-5603-3279-6

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①邓…　Ⅲ.①不等式—研究　Ⅳ.①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 089892 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 18.25　字数 336 千字
版　　次　2011 年 5 月第 1 版　2011 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3279-6
定　　价　38.00 元

⊙序

记得高尔基说过，所谓的才华，就是对某一事物的兴趣。

这是一本农民出身的自学者的业余之作。作者邓寿才在今日中国几亿农民中是一个异数。他参加过高考，虽然数学得了高分但还是落榜。在农村面朝黄土背朝天的艰苦劳作之余，夜深人静，一灯如豆，钻研数学并从其中得到了莫大的快乐。后随打工潮到了广东，从事着最低级的体力劳动，成为一名地道的农民工，但他没有因地位卑微就放弃对梦想的追求，几十年下来写下了大量文字。在今天许多大学生身处大学良好的学习环境，却终日泡网吧，打游戏的厌学时代，邓寿才确实具有一种榜样的力量。从早年中国高玉宝的《我要读书》到英国兰姆的《牛津度假记》类似的事迹，举不胜举。英国散文家兰姆少年时代成绩很出色，但因口吃上不了大学，他后来就不时跑去牛津大学看书散步，想象自己是个学生，在他那篇《牛津度假记》中他这样写道："在这，我可以不受干扰地散步，随心所欲地想象自己得到了什么样的学历，什么样的身份，我仿佛已经获得了该项学历，过去失去的机会得到补偿，教堂钟声一响，我就起身，幻想这钟声正是为我而鸣，我心情谦卑之时，想象自己是一名减费生、校役生。骨子的傲气一抬头，我又大摇大摆走路，以自费上学的贵族子弟自居。我一本正经地给自己授予了硕士学位，说实在话，跟那种

体面人物相比，我也差不多可以乱真。”

从邓寿才先生的成长经历中笔者感触最深的一个词是自由，是那种精神的自由。高尔泰说：美是自由的象征！

关于精神自由，中国古代文学典籍里比比皆是，如杜甫诗云：“送客逢春可自由”（杜甫《和裴迪登蜀州东亭送客逢早梅相忆见寄》）；对春天来临，人如同草木一样自由生长的场景无限向往；王安石诗歌：“我终不嗔渠，此瓦不自由。”（王安石《拟寒山拾得二十首之四》）；柳子厚诗云：“春风无限潇湘意，欲采蘋花不自由。”（柳宗元《酬曹侍御过象县见寄》）；宋代僧人道潜也有诗歌提到自由：“风蒲猎猎并轻柔，欲立蜻蜓不自由。”（道潜和尚《临平道中》）。这些关于自由的抒情说辞，都是关乎心灵状态，让人想起某种无拘无束的超脱之感。

有人说中国农村真穷，中国农民真苦，中国农业真危险，依我看这些都不致命，致命的是中国农民没梦想了，不敢想了。这使我们想到杜拉斯所说：“爱之于我，不是肌肤之亲，不是一蔬一饭，它是一种不死的欲望，疲惫生活中的英雄梦想。”

人生不能没有梦想，我们无法想象，人类失去梦想，世界将会怎样.现在许多有识之士在担忧中国阶层的板结化，上升通道的世袭化，笔者曾有过几次暂短的国外逗留，给我感触最深的是自由，自由迁徙，自由择业，自由梦想，这三个自由在中国虽历尽辛苦，但邓寿才做到了，而且邓同一般民科有本质的区别。

微博如今大行其道，而微动力的精神实质，就是著名博主冉云飞屡次申明的“日拱一率，不期速成”。IT 名人胡泳引用朱学勤先生《让人为难的罗素》中罗素赞成的实践方式是：“每天前进一寸，不躁不馁，……纵使十年不‘将’军，却无一日不‘拱’卒。”

民科们动辄宣称证明了哥德巴赫猜想、黎曼猜想、费马大定理，闻之心惊肉跳，而本书作者绝不好高骛远，只取初等数学中的不等式一块深入发掘，终小有收获。

作为本书作者的发现者之一，为了作者将来的成长性，还是要点评一下这位业余作者的不足之处，本书作者的一大喜好是抒情过度化，并不是说学理的人没有文学才能，恰恰相反，理科怪才不乏文科大才。

在 20 世纪 80 年代初有一部非常轰动一时的话剧叫《于无声处》。其作者叫宗福先，而宗的老师是曲信先先生，曲先生原是一位理科大学生，1963 年，曲信先在中国科技大学生物物理专业读三年级，由于他业余写的一本话剧剧本《斯巴达克斯》受到时任校长郭沫若的赏识，被推荐到上海戏剧学院学习，由院长熊佛西单独授课，一位理科怪才终成文科大才。

学数学的人都崇拜华罗庚、苏步青、陈省身、柯召、王元等大家，他们确实是文理兼备，学贯中西，琴棋书画，笔墨丹青，但那毕竟是少数顶尖人物，如果我们

没有那些旧学功底最好不要理中带文，因为那样很容易画虎不成。

第二，本书结构过于平淡，写数学书也要像古时做文一样，喜突不喜平。不能老是提出一个例题，然后推广 A,B,C,…。

李敖说：中国人评判文章，缺乏一种像样的标准，以唐宋八大家而论，所谓行家，说韩愈文章'如崇山大海'，柳宗元文章'如幽岩怪壑'，欧阳修文章'如秋山平远'，苏轼文章'如长江大河'，王安石文章'如断岸千尺'，曾巩文章'如波泽春涨'……说得玄之又玄，除了使我们知道水到处流山一大堆以外，实在摸不清文章好在哪里？好的标准是什么？

数学文章写得好很难，而且很难提出一个标准，但榜样总是有的，如华先生、闵先生及常庚哲先生、单墫先生等。

第三是新方法的提出，本书尽管推广了很多，但方法始终是幂平均、琴生、切比雪夫、赫尔特、杨克昌等不等式，可以说无它，唯熟练耳！

早在 1930 年 6 月，陈寅恪先生为陈垣《敦煌劫余录》作序时，就指出："一时代之学术，必有其新材料和新问题。取用此材料，以研究问题，则为此时代学术之新潮流。治学之士，得预于此潮流者，谓之预流，其未得预者，谓之未入流，此古今学术史之通义，非彼闭门造车之徒，所能同喻者也。"

其实陈先生是希望按顺序完成发掘新材料，引进新理论，提出新问题，得出新结果这几个学术步骤，不可缺，不能乱。

所以基于以上几点，笔者希望作者能少抒情，多理论，少平淡，多奇峰，少旧法，多新意，特别是多攻克那些尚未被证明的不等式，以显示其功力。

总之，本书及本书作者是中国农村的一株奇葩！

刘培杰于哈工大
2011.5.1

目录

探 索 无 限

(一)

题 1　设正数 a,b,c,x,y,z 满足 $cy+bz=a,az+cx=b,bx+ay=c$.求函数

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$$

的最小值.

本题的解答之一是先从已知条件解出

$$x=(b^2+c^2-a^2)/2bc,y=(c^2+a^2-b^2)/2ca,z=(a^2+b^2-c^2)/2ab$$

然后巧妙地将复杂的代数问题转化为三角问题.

在 $\triangle ABC$ 中,求函数

$$f(\cos A,\cos B,\cos C)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}$$

的最小值.

然后又将三角问题转化为代数问题求得

$$f_{\min}=\frac{1}{2}$$

自然,这一问题等价于:

题 2　在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}\geqslant\frac{1}{2}\tag{1}$$

从余弦倍角公式知,式(1)还有两个漂亮的外观

$$\frac{1+\cos 2A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos 2B}{1+\cos B}+\frac{1+\cos 2C}{1+\cos C}\geqslant 1\tag{2}$$

$$\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2\geqslant 1\tag{A}$$

而且，众所周知，式(A)不仅结构匀称，形态优雅，而它还是著名的Garfunkel-Bankoff不等式

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \tag{B}$$

变形得到的等价形.

(二)

科学无止境，探索亦无限.至今，笔者还没有建立(A)，(B)两式满意的加权推广，为此，我们先给出式(A)的两种新证法.

新证1 由于在 $\triangle ABC$ 中有

$$\begin{aligned}
&A+B+C=\pi\Rightarrow\\
&\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\\
&\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\cos^2C=\\
&1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2C=\\
&1+[\cos C-\cos(A-B)]\cos C=\\
&1-[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C=\\
&1-2\cos A\cos B\cos C\Rightarrow\\
&\sum\cos^2 A+2\prod\cos A=1
\end{aligned} \tag{1}$$

又

$$\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2\geqslant 1\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{\cos^2A}{1+\cos A}\geqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&2\sum\cos^2A(1+\cos B)(1+\cos C)\geqslant\prod(1+\cos A)\Leftrightarrow\\
&2\sum\cos^2A+2\sum\cos^2A(\cos B+\cos C)+2(\prod\cos A)\sum\cos A\geqslant\\
&1+\sum\cos A+\sum\cos A\cos B+\prod\cos A\Leftrightarrow\\
&2\sum\cos^2 A+2\sum\cos^2 A(\cos B+\cos C)+\\
&(1-\sum\cos^2 A)\sum\cos A\geqslant\\
&(\sum\cos^2 A+2\prod\cos A)+\sum\cos A+\prod\cos A+\\
&\sum\cos B\cos C\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\sum \cos^2 A - \sum \cos A\cos B \geqslant$$
$$\sum \cos^3 A - \sum \cos^2 A(\cos B + \cos C) + 3\prod \cos A \Leftrightarrow$$
$$2\sum \cos^2 A - 2\sum \cos B\cos C \geqslant$$
$$2\sum \cos^3 A - 2\sum \cos^2 A(\cos B + \cos C) + 3\prod \cos A \Leftrightarrow$$
$$\sum (\cos A - \cos B)^2 \geqslant$$
$$\sum (\cos A + \cos B - \cos C)(\cos A - \cos B)^2 \tag{3}$$

不妨设

$$A \geqslant B \geqslant C \Rightarrow \cos A \leqslant \cos B \leqslant \cos C \leqslant 1 \Rightarrow$$
$$\cos A + \cos B - \cos C \leqslant \cos A \leqslant 1 \Rightarrow$$
$$(\cos A - \cos B)^2 \geqslant (\cos A + \cos B - \cos C)(\cos A - \cos B)^2$$

又 $\cos C \leqslant 1$,因此欲证式(3)只须证明

$$\cos C(\cos B - \cos C)^2 + \cos C(\cos C - \cos A)^2 \geqslant$$
$$(\cos B + \cos C - \cos A)(\cos B - \cos C)^2 +$$
$$(\cos C + \cos A - \cos B)(\cos C - \cos A)^2 \Leftrightarrow$$
$$(\cos B - \cos A)^2(2\cos C - \cos A - \cos B) \geqslant 0 \tag{4}$$

从 $\cos C \geqslant \cos B \geqslant \cos A$ 知式(4)成立,所以式(3)成立,从而式(2)成立,因此式(A)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

新证 2 由于 $x = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc, y = (c^2 + a^2 - b^2)/2ca, z = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$. 因此式(A)等价于

$$\frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z} \geqslant \frac{1}{2} \tag{5}$$

令 $\alpha = b^2 + c^2 - a^2 > 0, \beta = c^2 + a^2 - b^2 > 0, \gamma = a^2 + b^2 - c^2 > 0$

从而用推得

$$x = \alpha / \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$$
$$y = \beta / \sqrt{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}$$
$$z = \gamma / \sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}$$
$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} \Big/ \left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}\right] =$$
$$\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma) + \alpha\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}$$

因此,应用 Cauchy(柯西)不等式有

$$\sum\left[\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)+\alpha\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}\right]\geqslant$$

$$\frac{(\sum\alpha)^2}{\sum(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)+\sum\alpha\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}} \tag{6}$$

因此,欲证明式(5),只须证明

$$2(\sum\alpha)^2\geqslant\sum(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)+\sum\alpha\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\Leftrightarrow$$

$$2\sum\alpha^2+4\sum\beta\gamma=\sum\alpha^2+3\sum\beta\gamma+\sum\alpha\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\Leftrightarrow$$

$$\sum\alpha^2+\sum\beta\gamma\geqslant\sum\alpha\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} \tag{7}$$

又应用平均值不等式有

$$\sum\alpha\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\leqslant\sum\alpha\left(\frac{\alpha+\beta+\alpha+\gamma}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\sum\alpha(2\alpha+\beta+\gamma)=\sum\alpha^2+\sum\beta\gamma$$

即式(7)成立,从而式(5)成立,所以式(A)成立,等号成立仅当 $\alpha=\beta=\gamma\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为正三角形.

(三)

对于式(A):它的加权推广是我们朝思暮想、若若追寻的目标,现在,我们经过努力,终于“海日生残夜,江春入旧年”.

推广 1 设实数 λ,μ,υ 满足 $\lambda\mu\upsilon\geqslant 1$,那么对于锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\lambda\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2+\mu\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^2+\upsilon\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2\geqslant\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\lambda a^2+\mu b^2+\upsilon c^2}\right)^2 \tag{C}$$

其中 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的边长.

显然,当 $\lambda=\mu=\upsilon=1$ 时,式(C)立即还原为式(A),因此式(C)是式(A)的加权推广.

证明 式(C)等价于

$$P_\lambda=\frac{\lambda\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\mu\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\upsilon\cos^2 C}{1+\cos C}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\lambda a^2+\mu b^2+\upsilon c^2}\right)^2 \tag{1}$$

应用已知条件 $\lambda\geqslant 1/\mu\upsilon$ 和余弦定理有

$$P_\lambda=\sum\frac{\lambda\cos^2 A}{1+\cos A}=\sum\frac{\lambda(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)}\geqslant$$

$$\sum \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4\mu\upsilon b^2c^2+2\mu\upsilon bc(b^2+c^2-a^2)} \geqslant$$

（应用柯西不等式）

$$\frac{[\sum(b^2+c^2-a^2)]^2}{\sum[4\mu\upsilon b^2c^2+2\mu\upsilon bc(b^2+c^2-a^2)]} \Rightarrow$$

$$P_\lambda \geqslant \frac{1}{m}(a^2+b^2+c^2)^2 \tag{2}$$

其中

$$m=\sum[4\mu\upsilon b^2c^2+2\mu\upsilon bc(b^2+c^2-a^2)]=$$

$$4\sum\mu\upsilon b^2c^2+4\sum(\mu b^2)(\upsilon c^2)\cos A(\text{应用三角母不等式}) \leqslant$$

$$4\sum\mu\upsilon b^2c^2+2\sum(\lambda a^2)^2=$$

$$2(\sum\lambda a^2)^2=2(\lambda a^2+\mu b^2+\upsilon c^2)^2 \Rightarrow$$

$$P_\lambda \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\lambda a^2+\mu b^2+\upsilon c^2}\right)^2$$

即式(1)成立，从而式(C)成立，等号成立仅当 $\lambda=\mu=\upsilon=1$ 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

进一步地，式(C)又可推广为

推广 2 设 $\lambda,\mu,\upsilon,x,y,z$ 均为正数，且满足 $x+y+z\geqslant 3$，则对锐角三角形 $\triangle ABC$ 有

$$\frac{x^2}{\mu\upsilon}\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2+\frac{y^2}{\upsilon\lambda}\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^2+\frac{z^2}{\lambda\mu}\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2 \geqslant$$

$$\left(\frac{(3-2x)a^2+(3-2y)b^2+(3-2z)c^2}{\lambda a^2+\mu b^2+\upsilon c^2}\right)^2 \tag{D}$$

在式(D)中取 $x=y=z=1$ 时，化为式(C).

略证 由前面的证法可知

$$T_\lambda=\sum\frac{\frac{x^2}{\mu\upsilon}\cos^2 A}{1+\cos A}=$$

$$\sum\frac{\frac{x^2}{\mu\upsilon}(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)}=$$

$$\sum\frac{[x(b^2+c^2-a^2)]^2}{\mu\upsilon[4b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)]}=$$

(应用柯西不等式)$\geqslant$

$$\frac{\left[\sum x(b^2+c^2-a^2)\right]^2}{\sum \mu\upsilon\left[4b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)\right]}\geqslant$$

$$\frac{\left[\sum x(b^2+c^2-a^2)\right]^2}{2\left(\sum \lambda a^2\right)^2}\text{(应用 } m\leqslant 2\left(\sum\lambda a^2\right)^2\text{)}=$$

$$\frac{\left[\sum (y+z-x)a^2\right]^2}{2\left(\sum \lambda a^2\right)^2}=\frac{\left[\sum (x+y+z-2x)a^2\right]^2}{2\left(\sum \lambda a^2\right)^2}\geqslant$$

$$\frac{\left[\sum (3-2x)a^2\right]^2}{2\left(\sum \lambda a^2\right)^2}\Rightarrow \sum\frac{x^2}{\mu\upsilon}\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2\geqslant\left(\frac{\sum(3-2x)a^2}{\sum\lambda a^2}\right)^2$$

即式(D)成立.等号成立仅当 $x=y=z=\lambda=\mu=\upsilon=1$ 时.

特别地,当 $\lambda=\mu=\upsilon$ 时,式(D)化一个漂亮的推论

$$x^2\left(\frac{\cos A}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2+y^2\left(\frac{\cos B}{\cos\frac{B}{2}}\right)^2+z^2\left(\frac{\cos C}{\cos\frac{C}{2}}\right)^2\geqslant\left(\frac{pa^2+qb^2+rc^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \tag{E}$$

其中 $p=y+z-x,q=z+x-y,r=x+y-z$.

现在,仔细算来,我们已为式(A)建立了3个加权推广,使我们倍感舒畅.但是,笔者的体会是:"踏破铁鞋无觅处,得来如此费工夫."

另一方面,从上面的证明过程启发我们——有一个不错的副产品:

题3 设 $k\geqslant\frac{1}{2}$,$\triangle ABC$ 为锐角三角形,则有

$$\frac{1}{6}\left(\sum a^2\right)\sum(bc)^{2k-1}\leqslant\sum(bc)^{2k}\cos A\leqslant\frac{1}{2}\sum a^{4k} \tag{3}$$

等号成立仅当 $k=\frac{1}{2}$ 或 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证明 当 $k=\frac{1}{2}$ 时,式(3)化为恒等式

$$\frac{1}{2}\sum a^2=\sum bc\cos A=\frac{1}{2}\sum a^2 \tag{4}$$

当 $k>\frac{1}{2}$ 时,不妨设

$$0<A\leqslant B\leqslant C<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos A\geqslant\cos B\geqslant\cos C>0\\ a\leqslant b\leqslant c\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}bc\cos A\geqslant ca\cos B\geqslant ab\cos C\\ (bc)^{2k-1}\geqslant(ca)^{2k-1}\geqslant(ab)^{2k-1}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\sum (bc)^{2k} \cdot \cos A = \sum (bc)^{2k-1} \cdot bc\cos A$$

(应用切比雪夫不等式) $\geqslant$

$$\frac{1}{3}\left[\sum (bc)^{2k-1}\right]\left(\sum bc\cos A\right) =$$

$$\frac{1}{6}\left(\sum a^2\right)\sum (bc)^{2k-1} \tag{5}$$

又应用三角母不等式知

$$\sum (bc)^{2k}\cos A = \sum b^{2k}c^{2k}\cos A \leqslant \frac{1}{2}\sum a^{4k} \tag{6}$$

由式(5)、(6)知,此时式(3)成立,等号成立仅当 $k=\frac{1}{2}$ 或 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(四)

如果我们应用幂平均不等式,就可轻松地将式(A)指数推广为

$$\left(\frac{\cos A}{\cos \frac{A}{2}}\right)^{2k} + \left(\frac{\cos B}{\cos \frac{B}{2}}\right)^{2k} + \left(\frac{\cos C}{\cos \frac{C}{2}}\right)^{2k} \geqslant 3^{1-k} \tag{F}$$

其中 $k \geqslant 1$,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

但我们觉得式(F)虽然结构对称简洁,外形美观漂亮,但它略显单调,不尽人意,更美更好是我们永恒的追求.只要我们不畏"长途跋涉,翻山越岭",就能寻觅到理想的"梦中情人":

推广 3　设指数 α,β 满足 $2\beta \geqslant 2\alpha \geqslant 1+\beta$,$\triangle ABC$ 为锐角三角形,则有

$$\frac{(\cos A)^{2\alpha}}{(\cos \frac{A}{2})^{2\beta}} + \frac{(\cos B)^{2\alpha}}{(\cos \frac{B}{2})^{2\beta}} + \frac{(\cos C)^{2\alpha}}{(\cos \frac{C}{2})^{2\beta}} \geqslant 3^{1-\beta} \cdot 2^{2(\beta-\alpha)} \tag{G}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

显然,由已知条件有 $\beta \geqslant \alpha \geqslant 1$,当取 $\alpha=\beta=k \geqslant 1$ 时,(G)式化为(F)式.如此简洁美妙的(G)式,我们怎样爱它呀!

证明　记 $\theta = 2\alpha/(1+\beta) \geqslant 1, 0 < \varphi = \frac{\alpha}{\beta} \leqslant 1$.

$$P = \sum \frac{(\cos A)^{2\alpha}}{(\cos \frac{A}{2})^{2\beta}}, S = a^2+b^2+c^2$$

应用余弦倍角公式及余弦定理有

$$\frac{P}{2^{\beta}}=\sum\frac{(\cos A)^{2\alpha}}{\left(2\cos^{2}\frac{A}{2}\right)^{\beta}}=\sum\frac{(\cos A)^{2\alpha}}{(1+\cos A)^{\beta}}=\sum\frac{\left(\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}\right)^{2\alpha}}{(1+\cos A)^{\beta}}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha}\sum\frac{(b^{2}+c^{2}-a^{2})^{2\alpha}}{[(bc)^{\frac{2\alpha}{\beta}}+(bc)^{\frac{2\alpha}{\beta}}\cos A]^{\beta}}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha}\sum\frac{[(b^{2}+c^{2}-a^{2})^{\theta}]^{1+\beta}}{[(bc)^{2\varphi}+(bc)^{2\varphi}\cos A]^{\beta}}$$

(应用权方和不等式)$\geqslant$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha}\frac{M^{1+\beta}}{m^{\beta}}\Rightarrow P\geqslant 2^{\beta-2\alpha}\frac{M^{1+\beta}}{m^{\beta}} \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases}m=\sum[(bc)^{2\varphi}+(bc)^{2\varphi}\cos A]\\ M=\sum(b^{2}+c^{2}-a^{2})^{\theta}\end{cases} \tag{2}$$

应用三角母不等式,有

$$m=\sum(bc)^{2\varphi}+\sum(bc)^{2\varphi}\cos A\leqslant$$

$$\sum(bc)^{2\varphi}+\frac{1}{2}\sum a^{4\varphi}=\frac{1}{2}\left(\sum a^{2\varphi}\right)^{2}$$

(注意到 $0<\varphi=\alpha/\beta\leqslant 1$,应用幂平均不等式)$\leqslant$

$$\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{\sum a^{2}}{3}\right)^{\varphi}\right]^{2}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2(1-\varphi)}\cdot S^{2\varphi}\Rightarrow$$

$$m^{\beta}\leqslant 2^{-\beta}\cdot 3^{2(\beta-\alpha)}\cdot S^{2\alpha} \tag{3}$$

注意到 $\theta=\frac{2\alpha}{1+\beta}\geqslant 1$,应用幂平均不等式有

$$M=\sum(b^{2}+c^{2}-a^{2})^{\theta}\geqslant 3\left[\frac{\sum(b^{2}+c^{2}-a^{2})}{3}\right]^{\theta}=3\left(\frac{S}{3}\right)^{\theta}\Rightarrow$$

$$M^{1+\beta}\geqslant\left[3\left(\frac{S}{3}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}=\left[3\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{2\alpha}{1+\beta}}\right]^{1+\beta}=3^{(1+\beta-2\alpha)}S^{2\alpha} \tag{4}$$

式(1),(3),(4) 结合得

$$P\geqslant 2^{\beta-2\alpha}\cdot\frac{3^{(1+\beta-2\alpha)}\cdot S^{2\alpha}}{2^{-\beta}\cdot 3^{2(\beta-\alpha)}\cdot S^{2\alpha}}=3^{1-\beta}\cdot 2^{2(\beta-\alpha)}$$

即式(G) 成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(五)

如果我们能将前面推广 2 中的式(D) 与推广 2 中的式(G)“珠联璧合,龙凤

相配”那就再妙不过了，即若我们能从系数和指数两方面联合推广式(A)，那就两全其美、趣味无穷了.

推广 4 设指数 α,β 满足 $2\beta\geqslant 2\alpha\geqslant 1+\beta$，正权系数满足 $x,y,z;\lambda,\mu,\upsilon>0$ 且 $x+y+z\geqslant 3$，$\lambda+\mu+\upsilon=3$，则有

$$\frac{\left(\frac{x^2}{\mu\upsilon}\cos^2 A\right)^{\alpha}}{\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{2\beta}}+\frac{\left(\frac{y^2}{\upsilon\lambda}\cos^2 B\right)^{\alpha}}{\left(\cos\frac{B}{2}\right)^{2\beta}}+\frac{\left(\frac{z^2}{\lambda\mu}\cos^2 C\right)^{\alpha}}{\left(\cos\frac{C}{2}\right)^{2\beta}}\geqslant 3^{1-\beta}\cdot 2^{2(\beta-\alpha)}\cdot t^{2\alpha} \tag{H}$$

$$\frac{(x\cos A)^{2\alpha}}{\left(\sqrt{\mu\upsilon}\cos\frac{A}{2}\right)^{2\beta}}+\frac{(y\cos B)^{2\alpha}}{\left(\sqrt{\upsilon\lambda}\cos\frac{B}{2}\right)^{2\beta}}+\frac{(z\cos C)^{2\alpha}}{\left(\sqrt{\lambda\mu}\cos\frac{C}{2}\right)^{2\beta}}\geqslant 3^{1-\beta}\cdot 2^{2(\beta-\alpha)}\cdot t^{2\alpha} \tag{H$'$}$$

其中

$$t=\frac{(3-2x)a^2+(3-2y)b^2+(3-2z)c^2}{\lambda a^2+\mu b^2+\upsilon c^2} \tag{1}$$

观察可见，式(H)与式(H$'$)左边相异，右边相同，它们两全其美，比翼双飞.

如果令

$$(\lambda,\mu,\upsilon)=(3-2x,3-2y,3-2z)\Rightarrow t=1\Rightarrow \lambda+\mu+\upsilon=3$$

且式(H$'$)与式(H)分别简化为

$$\sum\frac{(x\cos A)^{2\alpha}}{\left[\sqrt{(3-2y)(3-2z)}\cos\frac{A}{2}\right]^{2\beta}}\geqslant\frac{4^{\beta-\alpha}}{3^{\beta-1}} \tag{h$_1$}$$

$$\sum\frac{[(3-\lambda)\cos A]^{2\alpha}}{\left(\sqrt{\mu\upsilon}\cos\frac{A}{2}\right)^{2\beta}}\geqslant 3\left(\frac{4}{3}\right)^{\beta} \tag{h$_2$}$$

其中 $x,y,z\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$，$x+y+z=3$；$\lambda,\mu,\upsilon\in(0,3)$，$\lambda+\mu+\upsilon=3$.

若令 $x=y=z=1$ 及 $\lambda=\mu=\upsilon=1$，则(h_1)，(h_2)，(H)，(H$'$)均化为式(G).

若 $\triangle ABC$ 为正三角形(注意到此时 $a=b=c$)，则式(H$'$)化一个代数不等式

$$\frac{x^{2\alpha}}{(\mu\upsilon)^{\beta}}+\frac{y^{2\alpha}}{(\upsilon\lambda)^{\beta}}+\frac{z^{2\alpha}}{(\lambda\mu)^{\beta}}\geqslant 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{2\alpha}\cdot\left(\frac{\lambda+\mu+\upsilon}{3}\right)^{-2\beta} \tag{2}$$

此不等式只须要求：$x,y,z,\lambda,\mu,\upsilon>0$，$2\alpha\geqslant 1+\beta>1$.

显然，当 $x+y+z=\lambda+\mu+\upsilon=3$ 时，式(2)简化为

$$\frac{x^{2\alpha}}{(\mu\upsilon)^{\beta}}+\frac{y^{2\alpha}}{(\upsilon\lambda)^{\beta}}+\frac{z^{2\alpha}}{(\lambda\mu)^{\beta}}\geqslant 3 \tag{3}$$

略证 记 $\theta=2\alpha/(1+\beta)\geqslant 1$. 应用权方和不等式有

$$\sum\frac{x^{2\alpha}}{(\mu\upsilon)^{\beta}}=\sum\frac{(x^{\theta})^{1+\beta}}{(\mu\upsilon)^{\beta}}\geqslant\frac{(\sum x^{\theta})^{1+\beta}}{(\sum\mu\upsilon)^{\beta}}\geqslant\frac{[3^{1-\theta}(\sum x)^{\theta}]^{1+\beta}}{\left[\frac{1}{3}(\sum\lambda)^{2}\right]^{\beta}}=$$

$$\frac{\left[3^{\left(1-\frac{2\alpha}{1+\beta}\right)}(\sum x)^{\frac{2\alpha}{1+\beta}}\right]^{1+\beta}}{3^{-\beta}(\sum\lambda)^{2\beta}}=3\cdot 3^{2(\beta-\alpha)}\cdot\frac{(\sum x)^{2\alpha}}{(\sum\lambda)^{2\beta}}\Rightarrow$$

$$\sum\frac{x^{2\alpha}}{(\mu\upsilon)^{\beta}}\geqslant 3\left(\frac{\sum x}{3}\right)^{2\alpha}\left(\frac{\sum\lambda}{3}\right)^{-2\beta}$$

即式(2)成立,等号成立仅当 $x=y=z$ 及 $\lambda=\mu=\upsilon$.

现在我们证明美妙的推广4,限于篇幅,我们只须证明式(H′),式(H)同理可证.

证明 设 $\theta=\dfrac{2\alpha}{1+\beta}\geqslant 1,0<\varphi=\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant 1$(因 $2\beta\geqslant 2\alpha\geqslant 1+\beta$)

$$P_{\lambda}=\sum\frac{(x\cos A)^{2\alpha}}{(\mu\upsilon\cos^{2}\frac{A}{2})^{\beta}}$$

应用余弦倍角公式和余弦定理有

$$\frac{P_{\lambda}}{2^{\beta}}=\sum\frac{(x\cos A)^{2\alpha}}{(2\mu\upsilon\cos^{2}\frac{A}{2})^{\beta}}=\sum\frac{\left[\frac{x(b^{2}+c^{2}-a^{2})}{2bc}\right]^{2\alpha}}{[\mu\upsilon(1+\cos A)]^{\beta}}\Rightarrow$$

$$2^{2\alpha-\beta}\cdot P_{\lambda}=\sum\frac{\{[x(b^{2}+c^{2}-a^{2})]^{\theta}\}^{1+\beta}}{[\mu\upsilon(bc)^{2\varphi}+\mu\upsilon(bc)^{2\varphi}\cos A]^{\beta}}$$

$$(\text{应用权方和不等式})\geqslant\frac{M^{1+\beta}}{m^{\beta}} \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases}m=\sum[\mu\upsilon(bc)^{2\varphi}+\mu\upsilon(bc)^{2\varphi}\cos A]\\ M=\sum[x(b^{2}+c^{2}-a^{2})]^{\theta}\end{cases} \tag{5}$$

于是

$$m=\sum\mu\upsilon(bc)^{2\varphi}+\sum\mu\upsilon(bc)^{2\varphi}\cos A=\sum(\mu b^{2\varphi})(\upsilon c^{2\varphi})+$$

$$\sum[(\mu b^{2\varphi})\cdot(\upsilon c^{2\varphi})\cos A](\text{应用三角母不等式})\leqslant$$

$$\sum(\mu b^{2\varphi})(\upsilon c^{2\varphi})+\frac{1}{2}\sum(\lambda a^{2\varphi})^{2}=\frac{1}{2}(\sum\lambda a^{2\varphi})^{2}$$