聚焦考研

FOCUS 聚焦图书

一本竞争对手都连说“好，好，好”的书！ 中国最值得信赖的考研品牌

去掉

考研数学（经济类）

短板

陈文灯 审订 张驰 徐博 编著

2011版

核心功能： 讲清重要易混题型，深度解析重点难点
深入浅出辨析误区，彻底去掉数学短板

世界图书出版公司

需要全本请访问 www.ertongbook.com

聚焦考研

一本竞争对手都连说“好，好，好”的书！ 中国最值得

去掉

考研数学（经济类）

短板

陈文灯 审订 张驰 徐博 编著

核心功能： 讲清重要易混题型，深度解析重点难点
深入浅出辨析误区，彻底去掉数学短板

2011版

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

去掉考研数学短板.经济类 / 张弛,徐博等编著.
—北京:世界图书出版公司北京公司,2007.1 (2010.3 修订)
ISBN 978-7-5062-8165-2

Ⅰ.考... Ⅱ.①张... ②徐... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019509 号

去掉考研数学短板(经济类)

主　　编:张　弛　徐　博
审　　订:陈文灯
责任编辑:张中兴
装帧设计:余曙敏

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 010-88861708　邮编 100089)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:廊坊人民印刷厂

开　　本:787×1092 毫米
印　　张:14.5
字　　数:290 千字
版　　次:2010 年 3 月第 4 版　2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-8165-2/G · 247　　**定价:23.80 元**

服务热线:010—88861708

序　言

在过去的几年里，我对市场上各种考研数学复习资料进行了系统全面的研究，发现至今仍没有任何一本参考书籍从学生常遇见的短板问题的角度给予重视。对于一个从考研路上走过来的数学满分考生，我真想为自己的学弟学妹们做些什么，在强烈的责任感和使命感之下，我开始了本书的创作。本书在创作过程中得到很多一线专家和考研成功人士的帮助和支持，在此我的感激之情无以言表。下面就本书的创作过程做简要说明，希望能够对读者的学习起到指引作用。

要想考研数学在考试中取得好成绩，就必须整体把握考研大纲中要求的内容。可是如何整体把握呢？说起来轻松做起来难。这就是为什么考研辅导书市场上几乎所有数学指导书籍均是以大学数学教材为蓝本、纵向对数学内容进行讲解和训练的原因。依据教材的讲解顺序是目前考研数学教学的主要方式，它的优点是按照人们接受数学概念的顺序，由浅入深，循序渐进，适合初次学习和首轮复习。缺点是知识内容相对孤立，相似概念和方法容易混淆，短板问题此起彼伏。因此对于考研数学的学习只从纵向延伸是不够的，考生们在首轮复习完后更需要知识的横向贯穿，只有横纵结合、抽掉短板才能将考研数学这张知识大网编织牢固。虽然我已经从考研路上走了过来，但是我仍旧很关心正在考研的学弟学妹们，也经常和他们交流。在交流的过程中，我发现：在研究生数学考试中取得好成绩的考生们，无一例外的在横向知识贯穿上做得很棒。所以，我就想创作这样一本书——把高分考生横向知识贯穿的方法总结成册。

下面就来说一说本书的结构。本书第一篇从总体上对考研数学从思维方法到题型架构进行了详细的讲解，进行了横向的贯穿，把考试中各个章节中相关的内容综合起来进行串讲，实现了真正的横向串联。本书第二篇汇集了上百个令众多一线考生苦恼的短板问题。本书的最后一篇主要就这些短板问题一一进行解答，还对高等数学、线性代数和概率统计进行了内容上的补充，其中包括许多新的方法以及其他参考书绝没有的技巧。这些更能帮助读者深刻地理解考研数学的概念，找到解题方法的本质以便更快地解题。这无疑会对考研数学学习成绩的提高大有帮助。此外，书中还包含着许许多多考生们容易忽略的细节问题，我将这些细节问题用【注意】和【说明】标出，相信对细心的读者会有很大帮助。

问心无愧地讲本书绝对不是在重复别人的工作，绝对是前所未有的创新!! 本书的任何一个专题，任何一个内容方法，均从真正为了考生的立场给予解决。总之，本书是一本起深化和巩固作用的提高类书籍。它应该用于考研数学复习的第二阶段，在读者全面复习过考研数学的基本内容后更会凸显其不凡意义。

考研数学的学习是一个激发自身潜力的过程，我将本书献给那些希望解除自己考研数学短板问题的莘莘学子们，献给那些立志在考研数学中取得优异成绩的学弟学妹们，希望你们在本书中找到适合自己的学习方法，并预祝各位在2011年研究生数学考试中取得辉煌成绩!!

张驰

2010年2月

前　言

木桶原理又称短板理论，其核心内容为：一只木桶盛水的多少，并不取决于桶壁上最高的那块木块，而恰恰取决于桶壁上最短的那块。也就是说只要这个木上有一块木板高度不够，木桶里的水就不可能是满的。这个理论放之于四海皆准，同样，在考研学习的过程中也是这样，你考研能否成功取决于你短板科目的分数。毫无疑问考研数学是考研各科中最有难度的一科，从开始有“考研”这件事之日起，就一直是“得数学者得天下”的。

考研数学为什么能令那么多考生“尽折腰”呢？原因是数学学习过程中的短板实在太多了，基于帮助考生去掉数学学习短板的出发点，我们为考生精心打造了这套书籍——《去掉考研数学短板》。书中精心收集了源于考研一线学生的一些疑问，从考研学生自己的角度出发，将考生在考研数学复习之中产生的疑问归纳总结出来，并且以专题的形式对疑问进行了解答，对每一个短板问题做出精准的指导，将之彻底消灭于进入考场之前。

本书作为考研数学辅导用书，首次采用独特的有问有答的篇章结构，目的是使考生在阅读学习本书的过程中感同身受，更全面、更透彻地理解考研数学复习中的知识点，更好、更有效地备考。同时，每个专题又不仅仅局限于解答单个的问题，而且还对考研数学整体内容进行了纵向贯穿，将知识点和思维方法综合起来，彻底解决考生们的疑惑。

本书分为三个部分：

第一部分为考研数学思维导图及题型架构，目的在于让考生在思维上对近二十年来的考研数学有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式、题型规律和思维方法。这部分从总体上对考研数学进行了横向的贯穿，把各个章节中相关的知识点综合起来进行串连讲解，实现了真正的网状学习架构。

第二部分为考研数学中常见的短板问题，这些均是来自于亲历考研的学生们遇见的典型疑难问题。

第三部分为考研数学短板问题解答的正文，这里将考研中所遇见的问题和知识点横向贯穿，将每一个知识点都进行明确的网状定位。在这一部分里对高等数学、线性代数和概率统计进行了内容上的补充，加入来自许多高分考生的创新解题方法和独门技巧。这些内容将会帮助读者更深刻地理解考研数学的概念，找到解题方法的本质。亲爱的读者们，读过本书后你们将会发现，横向和纵向相结合，能更好地理解数学、分辨易混淆的知识，最终会令原来困扰你数学进步的短板消失。

使用建议：

由于该书是一本起着深化和巩固作用的提分类考研参考书籍，所以读者应该在自己对考研数学系统的复习过一轮后使用本书，这样去掉你数学学习短板的作用才会真正凸现！

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

考研数学思维导图及题型架构 …… (1)

考研数学短板 69 问 …… (13)

第一篇　微积分

专题 1. 分段复合函数的求法 …… (17)
专题 2. 部分分式展开法 …… (19)
专题 3. “抓大头”,“抓小头” …… (23)
专题 4. 定式与未定式 …… (29)
专题 5. 一元函数可导的充分与必要条件 …… (32)
专题 6. 变限积分 …… (36)
专题 7. 后求收敛域法 …… (52)
专题 8. 函数展开成幂级数与幂级数求和 …… (55)
专题 9. 和式问题与敛散性问题 …… (60)
专题 10. 多元函数一些概念间的关系 …… (68)
专题 11. 多元函数的微分法 …… (71)
专题 12. 化二重积分为累次积分 …… (78)

第二篇　线性代数

专题 13. 用待定系数法求抽象矩阵的逆矩阵 …… (84)
专题 14. 用折线法求线性方程组的全部解 …… (85)
专题 15. 秩为 1 的矩阵 …… (92)
专题 16. 行变换、列变换 …… (97)

第三篇　概率统计

专题 17. 文氏图法 …… (102)
专题 18. 二维随机变量分布函数的求法 …… (107)
专题 19. 右连续 …… (112)
专题 20. 分布函数法 …… (117)
专题 21. 二维条件分布的范围问题 …… (121)

专题 22. 独立性与相关性 …… (124)
专题 23. 矩估计问题 …… (135)

第四篇　综合部分

专题 24. “≤”和“<”,“≥”和“>” …… (138)
专题 25. 放缩法 …… (144)
专题 26. 相等与恒等(“=”与“≡”) …… (155)
专题 27. 极值、最值与凹凸性问题 …… (157)
专题 28. 转移变量 …… (169)
专题 29. 隐含条件问题 …… (172)
专题 30. 近似问题 …… (181)
专题 31. 对称性问题 …… (184)
专题 32. 图示法 …… (195)
专题 33. 常用概念的对比 …… (213)

考研数学思维导图及题型架构

考研数学按题型可以分为客观题和主观题，客观题包括填空题和选择题，主观题包括证明题、计算题和判断题. 进入本书的学习之前，首先给您揭开考研数学题型的神秘面纱，让同学们从总体上把握适用于各类题型的思维方法，这相当于从考研数学中抽象出了一个总体的框架，这是一个针对题型及思考方式的纵向框架. 以这个总框架作为指导去复习各个看似孤立的知识点，你就会发现思维方法真的是数学的灵魂，它贯穿于考研数学解题的始终.

一般的思维方法

考研数学中有一些既适用于客观题又适用于主观题的思维方法.

1. **对称性思维**	2. **递推思维**	3. **图形思维**
4. **“简单化”**	5. **转移变量**	6. **隐含条件**
7. **逆推思维**		

下面我们就分条阐述这些思维方法.

1. 对称性思维

对称性是指物体或一个系统的各部分之间具有平衡、协调一致的特点，从而产生一种简单性和美感. 考研数学中也有着大量的对称性问题，利用对称性可以使数学问题简化. 拿到题目首先就要判断问题是否具有对称性，能否利用对称性将其化简. 考研数学中常出现的对称性问题在本书 < **对称性问题** > 中有详细的总结和讨论.

2. 递推思维

递推思维好比“找规律”，即对已知的式子进行运算，找到“规律”，然后利用“规律”推出最终的结果. 递推思维的依据是数学中的传递性. 递推思维常常用于求解关于整数型函数 $f(n)$ 的问题.

狭义的递推公式是指不定积分中常涉及到的公式：

若 $I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$，则 $I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right](n\geqslant 2)$

广义的递推公式则是指所有用递推思维推出的公式.

考研数学中有许多内容涉及递推思维的使用，如：

(1) 积分学中利用分部积分法推出递推公式，如上面的递推公式. 再如：

若 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$（$n$ 为非负整数），则 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}(n\geqslant 2)$

由这个递推公式可以得到：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

只要令 $u=\frac{\pi}{2}-x$，则可以立即得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

(2) 级数中有时会用到递推思维.

(3) 放缩法中有时会用到递推思维.

(4) 求 n 阶导数时有时会用到递推思维.

(5) 数学归纳法. 数学归纳法常用于证明关于自然数 n 的命题 $P(n)$ 成立，实际上就是应用了递推思维：证明由第一项能够推出第二项，再证明前一项能够推出后一项，从而证明命题 $P(n)$ 成立.

(6) 线性代数中 n 阶行列式的问题中有时会用到递推思维.

3. 图形思维

图形思维是一种以数形结合为基础的思维方法，这种思维方法指导的解题方法是图示法，就是将题目的意义与图形紧密地结合起来，通过图形直观地解决问题. 详见 < **图示法** >.

4. "简单化"

考研数学出题人往往在题目思路上下功夫，而在计算上力求"简单化"，这与许多模拟题是不同的. 因此考研数学真题中很少会出现计算上非常复杂，而原理上却很简单的题目. 因此，如果已知条件中的式子很复杂，则一般都可以用某种公式或定理将其化简为很简单的形式，往往越复杂的已知条件越可以化简出简单的结论，相反越简单的已知条件越容易有陷阱让读者误入歧途. 这是考研出题人常用的手段，也是一种心理战术.

基于这种心理战术，读者在遇到看似复杂的问题千万要冷静，要对自己说："这道题可能不这么难". 遇到看似简单的问题也千万要冷静，要对自己说："这道题可能不这么容易".

【典型例题 1】 设 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，则 $I=\iint_S x\,dS$ 为(　　)

(A) $8\pi aR^2$　　(B) $4\pi aR^2$　　(C) $12\pi aR^2$　　(D) πaR^2

【解】 本例如果直接利用曲面 S 的方程计算曲面积分 $I=\iint_S x\,dS$，则计算过程很复杂，这样复杂的题目作为选择题不符合考研选择题一贯的"简单化"思路，因此应尝试寻找其他简单方法.

设球的密度均匀分布，则球面重心应为球心 (a,b,c)，而重心坐标 x 方向的值为：

$\frac{\iint_S x\,dS}{\iint_S dS}=\frac{I}{4\pi R^2}=a$，因此 $I=4\pi aR^2$，本例选择(B).

【典型例题 2】 计算曲线积分

$I=\int_L\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$，其中 L 为圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 的正向.

【解】 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$，

在 $(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 2$ 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $\oint_L P\,dx+Q\,dy=0$.

【注意】 本例根据"简单化"思维得到了一个规律性结论：往往被积函数的形式越复杂，曲线积分越可能与路径无关，或可用格林公式化简为很简单的二重积分式进行计算.

5. 转移变量

转移变量是“化归思想”的体现，它是将不容易分析的变量（自变量或因变量）转移到容易分析的变量中去. 转移变量有两种主要形式：自变量转移和因变量转移.

6. 隐含条件

解题中要用到但是没有在已知条件中明确给出的，通过已知条件和已具备知识可以推得的条件称为隐含条件. 当解题过程由于缺少条件无法继续进行时，要想到去发掘隐含条件. 考研中常出现的各种隐含条件情况在本书 < **隐含条件问题** > 中有详细讨论.

7. 逆推思维

小时候玩走迷宫有这样一个技巧，就是不要从入口进，从出口出，而是走相反的路，往往会很快找出路线. 考研数学中许多题目的求解都与走迷宫相似，从结论出发向已知条件上靠拢，就可以很快找出解法. 逆推思维的口诀是“要求 ……，只需求出 ……”，“要证 ……，只需证明 ……”. 逆推思维在单项选择题中体现为“逆推法”.

客观题

客观题是考研数学试卷上较低层次的题目，填空题和选择题同属客观性试题，它们有许多共同特点：其形态短小精悍，考查目标集中，答案简短、明确、具体，不必填写解答过程. 针对客观题的这些特点，除了前面提到的一般思维方法外，还有些专门针对客观题的思维技巧.

简单化在客观题中体现得更为明显，通常一道客观题只考察一个或两个知识点，而且计算都不会很复杂，要抱着简单快速且准确的原则来解客观题.

一、填空题

考研数学中的填空题通常是一个不完整的句子，要求考生填写一些关键性的内容，使之成为完整的句子或一段话. 填空题的特点是命题较容易，答案是唯一的，评分是客观的.

做填空题相当于做热身运动，相信大部分读者都不会在填空题部分“卡住”的. 如果真的遇到不会做的填空题，不要着急，将它放下来做后面的题目，最后返回来再解决它. 就算考试结束时仍然做不出，那也不要空着不写，根据相关知识蒙一个答案吧，或许可能蒙对呢.

二、选择题

考研数学的选择题都是单项选择题，“一题多解”的现象在单项选择题中表现突出. 选择题有备选项，给试题的解答提供了丰富的有用信息，有相当大的提示性，为解题活动展现了广阔的天地，大大地增加了解答的途径和方法. 常常潜藏着极其巧妙的解法，有利于对考生思维深度的考查.

选择题除了充分体现了“简单化”的思维方法以外，还有一个重要的问题，就是对**“对立选项”**的处理：

在对对立选项的处理问题上，数学中单项选择题与其他学科（如英语、政治等）的单项选择题有一个很明显的不同之处.

在 *TOEFL* 英语听力考试中常有这样一条技巧：如果两个选项内容对立，则其中一般必有一个选项为正确答案. 如：某道 *TOEFL* 听力试题有这样四个选项：

(A) *Mike went to the party*　　(B) *Mike liked the party*

(C) *Tom called Mike to join the party*　(D) *Mike refused to go to the party*

(A)(D)两个选项中一个说 *Mike* 参加了聚会，另一个说他没有参加聚会，这就是两个对立选项. 在 *TOEFL* 听力考试中，如果出现这样的两个选项，则通常一定有一个是正确选项. 因此本题只要结合文章的内容从(A)(D)两选项中做出选择即可，(B)(C)选项不用考虑. 这样做不仅节约了思考时间，而且在听不懂的情况下也有一半的可能性蒙对正确答案.

但在数学考试中上面这条技巧是不能使用的. 这是因为一个数学命题的成立往往需要满足某个条件，若题干乃至选项都没有给出命题成立的条件，则命题可能正确也可能不正确. 此时，即使有对立的两个选项也不能保证其中一定有正确选项.

即：**对于考研数学的单项选择题，正确选项不一定在对立选项中.**

如下面的例子就涉及对立选项问题.

【典型例题 3】 设 A,B 是任意两个概率不为 0 的不相容事件，则下列结论中正确的是(　　)

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　(D) $P(A-B)=P(A)$

通过对题目的解答发现：虽然(A)(B)两选项的内容对立，但当 A,B 为对立事件时(A)正确，A,B 为非对立事件时(B)正确. 条件不同，不同选项成立，所以本例(A)(B)均不能选.

下面来总结一下考研数学中单项选择题的解法：

1. **推演法**	2. **逆推法**	3. **排除法**
4. **举例法**	5. **图示法**	

下面我们就一一详细介绍这些解题方法.

1. 推演法

推演法是根据题干中已知条件直接推出结论，从而在选项中寻找出正确答案的方法.

当从题目已知条件可以很容易地推出结论，或是题目很难用逆推法、排除法等方法处理时通常选用推演法解题.

【典型例题 4】 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$，其中 $t>0,s>0$，则 I 的值(　　)

(A) 依赖于 s 和 t　(B) 依赖于 s,t,x

(C) 依赖于 s，不依赖于 t　(D) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s

【解】 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$ 出现复合函数 $f(tx)$，需要进行变量代换.

$$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x\xlongequal{u=tx}t\int_0^{s}f(u)\frac{\mathrm{d}u}{t}=\int_0^{s}f(u)\mathrm{d}u$$

所以 I 的值只依赖于 s. 本例选择(C).

【说明】 ① 凡涉及复合函数的单项选择题往往要用推演法来求解，并且要做变量代换.

② 四个选项均为数字的单项选择题往往要用推演法来求解.

2. 逆推法

直接使用推演法不容易处理的选择题可以尝试使用逆推法. 逆推法常与排除法同时使用，根据某选项进行逆推后得到的命题与所给出的已知条件相悖时，就将该选项排除；相符时，该

需要全本请访问 www.ertongbook.com

选项就是正确选项.

【典型例题 5】 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆，$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 为(　　)

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$

【解】 本例很难使用推演法得到结果，尝试使用逆推法，将各选项中的矩阵与矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相乘，有：

$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\neq\boldsymbol{E}$，因此(A) 不正确；

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{E}$，因此(B) 也不正确；

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})=[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\text{，因此(C) 正确.}\end{aligned}$$

找到正确选项后就不用对(D) 选项进行逆推了.

【注意】 求复杂抽象矩阵的逆矩阵的单项选择题，往往用逆推法来求解.

3. 排除法

排除法是解单项选择题的一种十分有效的方法. 它是根据已知条件找出选项中不合理之处从而将其排除，进而缩小正确选项的存在范围. 如果能够排除三个错误选项，则剩下的一个就是正确选项. 排除法常常作为解单项选择题的首选方法，它体现了求解选择题的技巧性，并且往往与其他方法(如逆推法，举例法等等) 相结合使用.

【典型例题 6】 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则其分布函数为(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x},x<0\\1,\quad x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x},\quad x<0\\1-\frac{1}{2}e^{-x},x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-x},x<0\\1,\quad x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x},\quad x<0\\1-\frac{1}{2}e^{-x},0\leqslant x<1\\1,\quad x\geqslant 1\end{cases}$

【解】 因为在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$\frac{1}{2}e^{-|x|}\neq 0$，即概率密度在 $(-\infty,+\infty)$ 恒不为零. 所以当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to 1$，即不存在一个有限点 $x=x_0$，使当 $x\geqslant x_0$ 时 $F(x)=1$. 据此，可以排除(A)(C)(D) 三个选项，选择(B) 项.

【说明】 本例也可以使用推演法，但排除法是解单项选择题的首选方法，应首先尝试使用排除法. 同时从本例的解题过程来看，排除法要比推演法简单许多.

【典型例题 7】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记：

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量为(　　)

(A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　(B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　(C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　(D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

【解】 从题干中知,本例要求服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量.根据"$n-1$ 分布对应含有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$"知:随机变量(统计量)的表达式中应含有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,不应含有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$,即应含有 S_1 或 S_2,不应含有 S_3 或 S_4.因此排除(C)(D)两选项,正确答案要在(A)(B)两选项中选择.

因为 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$, $\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}=\dfrac{nS_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

所以 $\dfrac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{nS_2^2}{\sigma^2(n-1)}}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_2}{\sqrt{n-1}}}\sim t(n-1)$,故本例应选择(B).

4. 举例法

举例法是当题干中给出具有概括性、抽象性的条件时针对各选项举出特殊的例子,从而验证选项中命题的正确性的方法.由于举例法所举的例子一般是特殊例子,不具有一般性,所以往往只能验证并排除错误选项,因此举例法常与排除法结合使用.

有些参考书上提到的赋值法、举反例法都属于举例法,因为它们的实质都是:举出特殊的例子 → 排除错误选项 → 剩下正确的选项.举例法一般多用于解含有抽象函数或抽象矩阵的单项选择题.

【典型例题 8】 设 $f(x)$ 处处可导,则(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,则有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,则有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

【解】 令 $f(x)=x$,知(A)(C)选项不正确;令 $f(x)=x^2$,知(B)选项不正确.排除三个错误选项后得到本例选择(D).

【典型例题 9】 设 $\boldsymbol{A}$ 为任一 n 阶方阵($n\geqslant 3$),$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,又知 k 为常数,且 $k\neq 0,\pm 1$,则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$(　　)

(A) $k\boldsymbol{A}^*$　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则根据 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,得:

$$(k\boldsymbol{E})^*=\begin{bmatrix}k & & \\ & \ddots & \\ & & k\end{bmatrix}^*=k^n\begin{bmatrix}1/k & & \\ & \ddots & \\ & & 1/k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k^{n-1} & & \\ & \ddots & \\ & & k^{n-1}\end{bmatrix}=k^{n-1}\boldsymbol{E}$$

而 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{E}$,因此可以排除(A)(C)(D)三个选项.本例选择(B).

【典型例题 10】 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=$(　　)

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$　　(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

【解】 令 $f(x)\equiv 1$，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x t\,dt = x$，而 $f(x^2)=1$，因此可以排除(B)(C)(D)三个选项.本例选择(A).

【典型例题 11】 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处(　　)

(A) $f(x)$ 的导数存在且不为 0　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

【解】 令 $f(x)-f(a)=-(x-a)^2$，则 $f(x)=f(a)-(x-a)^2$，$f'(x)=-2(x-a)$，$f''(x)=-2$，在 $x=a$ 处 $f'(x)=0$.对照各选项，可以排除(A)(C)(D)三个错误选项.本例选择(B).

【说明】由上面例题可以看出，举例法所举的例子通常是一些简单的函数形式，简单的矩阵等等，只要能够排除错误选项就是成功的举例.举例法与排除法结合往往可以巧妙地解选择题.读者在平时练习的时候就要多留心这些简单而且特殊的例子以备考试的时候使用.

【典型例题 12】 设 $u(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 取极小值，且 $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}$ 存在，则(　　)

(A) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}\geqslant 0,\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}\geqslant 0$　　(B) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}>0,\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}>0$

(C) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}\geqslant 0,\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}\leqslant 0$　　(D) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}\leqslant 0,\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}\geqslant 0$

【解】 本例实际是求二元函数在某点取极小值时，函数二阶偏导数满足的必要条件.这在教材上并没有讲过.

但是我们学过二元函数取极小值的这样一个充分条件：若 $B^2-AC<0$ 且 $A>0$，则 $f(M_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极小值，其中 $A=\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}$，$B=\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x\partial y}$，$C=\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}$.

如果令 $B\equiv 0$，则上述充分条件就变为：若 $A>0,C>0$，则 $f(P_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极小值.

因为一个命题的必要条件一定包含它的充分条件，所以本例的必要条件一定包括了条件 $A>0,C>0$.因此排除(C)(D)两个选项.

令 $u(x,y)=x^4+y^4$，显然此函数在(0,0)点取得唯一极小值，但是 $u''_{xx}(0,0)=0$，$u''_{yy}(0,0)=0$，满足(A)选项却不满足(B)选项，故排除(B)选项，选择(A).

【注意】命题 A 的必要条件 $\supseteq$ 命题 A 的充分条件，这个结论可以通过画文氏图或直接从充分条件与必要条件的定义分析得到.

5. 图示法

图示法是一种直观的方法，这种方法不仅用于解选择题，在计算题，证明题以及判断类问题中都有着广泛的应用.

主观题

主观题是考研数学试卷上较高层次的题目.按类型可以将主观题分为证明题，计算题和判

断题，主观题是按步骤给分的，所以在书写主观题过程时一定不要偷懒，不要“多步并一步”，“思维大跃进”. 遇到实在不会做的题目也不要完全空着不写，要尽可能把会的、与之相关的都写上，往往可以得到一些过程分.

对于主观题，除前面提到的一般思维方法外，还有以下一些思维技巧：

1. 见参数要讨论　　2. 用前面问题的结论　　3. 条件一定要用到

下面我们就逐个讲述这些思维技巧的妙用：

1. 见参数要讨论

见参数要讨论的思维方法是指：如果题目中含有某未知参数，则一定要注意是否要对其进行讨论.

由于参数取值的不确定性，不同参数值可能使结果不同，故见到参数一定要注意是否要对之进行讨论. 具体实例如下：

【典型例题 13】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，求 a,b.

【解】 根据函数的特点，选择对幂函数在 $|x|=1$ 处分开进行讨论：

当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时，$f(x)$ 分别为 $\dfrac{1}{2}(1+a+b)$ 和 $\dfrac{1}{2}(-1-a+b)$；

当 $|x|>1$ 时，x^{2n-1} 和 x^{2n} 分别为分子分母的“大头”；

当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n-1}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}$ 均趋近于 0，此时 $ax+b$ 和 1 分别为分子分母的“大头”.

运用“抓大头”的方法得：$f(x)=\begin{cases}ax+b, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x=1,\\ \dfrac{1}{2}(-1-a+b), & x=-1.\end{cases}$

因为 $f(x)$ 为连续函数，所以在间断点 $x=-1$ 处有：$f_-(-1)=f_+(-1)=f(-1)$.

又因为 $f_-(-1)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x}=-1$；$f_+(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}(ax+b)=-a+b$，

所以 $-1=-a+b=\dfrac{1}{2}(-1-a+b)$，　　(*)

同理，因为 $f_-(1)=a+b$，$f_+(1)=1$，

所以 $1=a+b=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$.　　(**)

联立(*)式和(**)式解得：$a=1,b=0$.

2. 用前面问题的结论

如果一个题目出现两个或两个以上问题，要注意看后面的问题是否能使用前面问题的结论. 前后问题往往有联系紧密，前面的问题的结论也往往对后面问题的求解有很大帮助.

【典型例题 14】 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}$ 在 $[-1,1]$ 上收敛，证明：

(1) $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\leqslant\dfrac{M}{n(n-1)}$，$(n=2,3,\cdots)$，$M$ 为某正数. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

【证明】 (1) 因为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}$ 在$[-1,1]$上收敛，所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，因此$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，即 a_n 有界，$|a_n|\leqslant M$.

于是有 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}=M\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{M}{n(n-1)}$.

(2) 利用(1)的结论 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n(n-1)}$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n(n-1)}$ 绝对收敛，根据比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

若问题是这样问的：判断命题 A 是否成立，若成立则求命题 B，若不成立说明理由. 则命题 A 一般都成立，并要接下来求命题 B.

我们可以这样揣摩出题人的意思：若命题 A 不成立，说明理由，则此题相当于只有一个问题；若命题 A 成立，求命题 B，则相当于在原问题的基础上又增加了第二个问题. 出题人能白白浪费笔墨出这第二个问题么？

【典型例题 15】 设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a_2=1$，且 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$，判定当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 是否收敛？若收敛，则求其和函数；若不收敛，则说明理由.

【解】 由已知条件可知 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}>a_n(n=2,3,\cdots)$，即$\{a_n\}$为单调增加的正数列.

又因为 $a_3=2$，$a_4=a_3+a_2<2a_3=2^2$，所以用数学归纳法：

设 $a_n<2^{n-2}$，则 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}<2a_n<2^{n-1}$，得到 $a_n<2^{n-2}.(n\geqslant 2)$.

于是有 $|a_nx^{n-1}|<2^{n-2}|x^{n-1}|=\frac{1}{2}|(2x)^{n-1}|$.

因为当 $|2x|<1$ 即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^{n-1}$ 收敛，

所以使用比较判别法，得：

当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+1}x^n$$

（a_2x：部分变换；$\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}$：整体变换）

$$=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+a_{n-1})x^n$$

$$=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

（$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$：公因式变换；$\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n$：整体变换）

$$=1+x+x\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

（$x\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^{n-1}$：部分变换；$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}$：公因式变换）

$$=1+x+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}-a_1\right)+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$$

$$= 1 + (x + x^2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

移项整理得：$(1 - x - x^2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1 - x - x^2}$，$|x| < \frac{1}{2}$.

3. 条件一定要用到

主观题题干中没有一个条件是对解题毫无用处的，如果解主观题遇到困难进行不下去，则要回头看看是不是哪个条件没有用到. 如果主观题求解完毕后还有条件没有用到，则要检查一下，一定是哪个步骤出错或考虑不全面. 如果给出的条件全部用到，解题仍因缺乏条件而无法进行时，应尝试去发掘隐含条件.

下面我们就将按主观题题型分类，详细讨论每种题型思维的核心方法.

一、证明题

证明题的思维方法核心是：条件与结论相结合，利用相关的知识进行联系. 证明题需要注意的有以下几点：

1. 充分性与必要性　　2. 转移证明　　3. 反证法

1. 充分性与必要性

许多证明题都涉及要求证明充要条件，有些读者分不清从谁证到谁是充分，从谁证到谁是必要. 设有命题 A 和命题 B，如果题干是这样写的：求证 $A \Leftrightarrow B$，或求证 A 当且仅当 B. 则通常认为证明 $A \Rightarrow B$ 是证明必要性，即 B 是 A 的必要条件，记作“$\Rightarrow$”；证明 $A \Leftarrow B$ 是证明充分性，即 B 是 A 的充分条件，记作“$\Leftarrow$”. 如果读者在考场上记不清“$\Rightarrow$”和“$\Leftarrow$”到底那个是证充分性，那个是证不必要性，则干脆不要写“充分性”和“必要性”的汉字，只要写出“$\Rightarrow$”和“$\Leftarrow$”，然后根据箭头方向进行推理证明就可以了.

另外，充要条件还有另一种证法，即从已知到求证步步充要，每一步证明均为“$\Leftrightarrow$”，则一次证明即可，不用分充分性和必要性进行两次证明.

2. 转移证明

何谓转移证明？就是结合已知条件对要证结论一步步进行化简分析：要证明这个结论，只需证明……，又因为……，所以只需证明…… 相信很快你就会找到证明题的关键所在.

转移证明是逆推思维在证明题中的体现，具体例子如下：

【典型例题 16】 利用导数证明：当 $x > 1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.

【解】 当 $x > 1$ 时，要证明 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$，只要证明 $(1+x)\ln(1+x) - x\ln x > 0$.

设 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x\ln x$，则 $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

当 $x > 1$ 时，有 $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$，所以当 $x > 1$ 时，$f(x)$ 为增函数.

因此 $f(x) > f(1) = 2\ln 2 > 0$，即 $(1+x)\ln(1+x) - x\ln x > 0$.

移项并整理得 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com