算學叢書

初等幾何學作圖不能問題

林鶴一著　任誠　陳懷書　趙任書譯

算學叢書

初等幾何學作圖不能問題

林鶴一 著

陳懷書
任　誠 譯
趙仁壽

商務印書館發行

中華民國二十四年二月初版
(53820·1)
算學叢書 初等幾何學作圖不能問題一册
每册定價大洋壹元叁角
外埠酌加運費匯費
原著者 林鶴一
譯述者 陳懷書 任誠 趙仁壽
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)
B六一五四
周

目　次

初等幾何學作圖不能問題

第一章

緒論

(1) 幾何學作圖問題,有性質雖似初等,若可屬於初等範圍中者,而究其解法,困難實甚.古來幾多數學家從事探討者,有下之三題:

I. 立方倍積問題,

求作立方體之一邊,使其體積爲所與立方體之二倍(此題亦名戴羅斯(Delos)問題);

II. 三等分任意角問題;

III. 改圓爲方問題,

求作正方形之一邊,使其面積等於所與之圓之面積.

上列三問題,數千年間之學者絞其腦汁以研究解法,其正當之答案.最近時代始求得之.夫學者何以爲此奮勉不休之研求乎?則以其性質類似初等,以爲其

解法亦屬於初等之範圍,而不知其實際不如是之簡單也.據最近研究之結果,已證明此等問題斷非囿於初等範圍所可得其解答者.其證明須借助於代數,是則古代學者所想像不及者矣.

(2) 余於述此等問題之解釋之先,不得不說明求作幾何圖形時所許用之公法 (Postulate).自歐幾里得 (Euclid) 以來,所許爲作圖公法者,不外次之二項:

第一. 過二點得引一直線;

第二. 以任意一點爲中心,任意之長爲半徑,得畫一圓.

有多數幾何學教科書中,以此等作圖公法列爲三項:

第一. 自任意一點得引直線至他點;

第二. 有限直線得任意延長之;

第三. 以任意一點爲中心,任意之長爲半徑,得畫一圓.

此第三項與前舉之第二項同,第一及第二兩項包含於前之第一項中,余所著新撰幾何學教科書,亦係如此.

如此規定,實予吾人以一種之束縛.所謂不能作圖

之問題,乃在此限制下不能作圖之謂.若一旦取消限制,則不能者無不能矣.卽任意角之三等分,亦甚易事也.且應用此種公法,亦非可適用至無限次數;因次數至於無限,則解釋失其精密,作圖仍未見其可能也

此後本書所謂能否作圖,悉從此限制以立論.故若漠視此限制而漫然主張作圖之可能,其立足點已大異乎吾人,固可不必置辯.卽於此限制下,凡已經證明不能作圖之問題,猶欲強索其解答,且不能指摘吾人不能作圖之證明爲非者,實亦可笑之至也.

第二章

幾何學之作用與代數學之運算

(3) 茲先揭一題,以示用代數的方法解釋幾何問題之例.

例題. 延長已知直線,自 A 向 B,於其上作 M 點.

令 $$BM^2=AM\cdot AB.$$

假定 M 已經求得,以 x 表 BM,以 a 表 AB,則 x 必滿足於次方程式

$$x^2=(a+x)a,\ 即\ x^2-ax-a^2=0.$$

解之得 $$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

根號前之負號,將使 x 爲負數,故可棄而不用.

依此表明 x 之值之代數式,得爲 BM 之幾何的作圖如次:

自 A 引 $AC\perp AB$,令 AC 等於 AB 之半,聯結 BC,則

$$BC=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

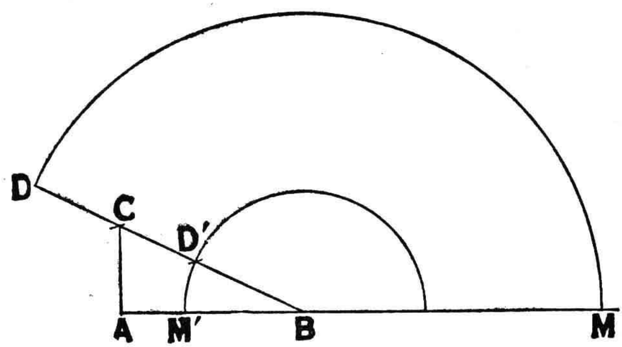

圖 1

延長BC,於其上求D點,使$CD=\frac{a}{2}$,則$BD=x$爲所求之長,故以B爲中心,以BD爲半徑作圓,與直線AB交於B側之點,卽所求之M也.

(注意)　設取複符號中之負號,則M當落於B之他側,其法當於CD線上C之他側求D',令$CD'=CD$,然後以B爲中心,BD'爲半徑作圓,與AB相交,則於BA之間得M'點.由此得定理如下:

定理　　於一般二次方程式

$$x^2-ax\pm b^2=0$$

中,a,b及x皆表明線分之長,且$\frac{a^2}{4}\mp b^2\geqq 0$,則適合於此方程式之$x$,卽$\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}\mp b^2}$可以作圖

(4) 一切幾何學上所處理之量,不外線,面及體三種;卽不外線分之長,面積及體積三種.廣濶之面,旣由若干面單位所積成,而所謂面單位者,實卽以線單位爲一邊之正方形耳;故線爲一次元,面爲二次元.同理知體爲三次元,而於幾何的量與量之間所有代數的關係,皆可作線分之長之代數的關係觀.

以代數式表明線分之長之關係時,其各項之元數卽以組成各項之線單位之數而定;例如 a,b 及 c 皆表線分之長,則 a^3 及 ab^2 皆爲三次元,而 $\frac{a^2b}{c}$ 則爲二次元.若代數式中有 $\frac{a^5b^3}{c^6}$ 項,分母子分別言之,毫不含有幾何的意味;然論其全體,則大有意味存焉.如 $\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot a^2$ 項中,前二因子所表僅爲 a^3 與 c^3 或 b^3 與 c^3 之比,可作一種單純之數論,而 a^2 則表明面積;故 $\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot a^2$ 爲二次元.總之,代數式所有各項不必一一皆含有幾何的意義;但注意其項爲若干線單位組合而成,則該項爲某次元自可確定.於是有次揭之重要定理:

定理　線分之長之關係,苟具有代數式之形,式中各項若不皆爲同次元,則此代數式不含有幾何學的

意味.

此定理本身已甚明瞭,毋庸另行證明.

例如方程式　$x^2-ax+b^2=0$ 中,所有文字 a,b 及 x 所表皆爲線分之長,其各項皆爲二次,故此式具有幾何的意義;但方程式若爲 $x^2-ax+b=0$, 則 a,b 及 x 雖所表皆爲線分之長,其式則毫無意義之可言也.

代數式爲同次各項所組成,其式卽謂之同次式;如 $\frac{a^2}{4}-b^2$ 之兩項,同爲二次元,故其式爲二次式.

(注意)　計算某項爲某次元時,於不名數不生關係.

於是復有次述之定理,

定理.　由一個或二個以上已知線分之長,依幾何的方法所可求得之量,卽由作圖所可求得之量,以線分之長,面積及體積爲限.

卽除二次元及三次元外,一切皆不能作圖也.

所謂求作一線分之長 x 適合於二次方程式者,設 a 爲 n 次,則 b 必爲 $n+1$ 次,c 必爲 $n+2$ 次,因必滿足此條件,$\frac{b}{a}$ 始可爲一次元,$\frac{c}{a}$ 始可爲二次元.由此

$$x=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

始得備具幾何的意味,故又得定理如次:

定理. 設$\frac{b}{a}$爲一次元,$\frac{c}{a}$爲二次元,而均得以其他一個或二個以上已知線分之長作成者,則適合於二次方程式$ax^2+bx+c=0$之x,亦得以最初所知一個或二個以上線分之長作出.

(注意) a,b及c三者雖不能個別作圖,但求$\frac{b}{a}$及$\frac{c}{a}$能作圖卽得.

幾何學問題僅由幾何學的狀態移轉於代數學的狀態而未受代數學的變化時,各項固必同次,且不可高至四次以上,因四次以上之項全無幾何的意味也.

但自幾何的狀態移轉於代數的狀態後,因欲去分母或根號而施行代數的變化時,常發生四次以上之項,蓋因受非幾何的代數變化不得不然.然無論如何變化,其式旣由同次項所組成,結果必仍爲同次,雖高至四次以上,所表仍不失幾何的意味也.

(5) 解一切作圖問題時,欲決定所求之圖形,須求得適合於此圖形之點,而點之位置,則由線分之長所決定者.

例如三等分AOB角時,但求得分線中一點,C與OA之距離CM及C點與A之距離卽得.故由幾何的狀態

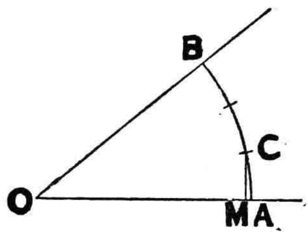

圖 2

變爲代數的狀態時,其中未知數所表明者卽用以決定此點之線分之長;而以幾何的方法決定某點云云者,卽決定此點必需之線分之長已經決定之謂也.

吾人今後決定作圖問題之能否,恆着眼於以決定某點所要線分之長爲根之代數方程式;因以幾何的方法解各種作圖問題時,從無一般之法則.故欲以幾何的手段決定作圖之能不能,目的實難達到,而一經變爲代數的狀態之後,則研究之方便自較普通也.

如前所述幾何的作圖,不外以引直線及畫圓決定某點,故第一可以研究者,以此項幾何的作用變爲代數的狀態時究屬如何;換言之,由若干直線與圓決定某點時所必要之線分之長與旣知之線分之長,究有若何關係,爲亟須研究者也.

(6)　今假設一直線以代數的方法表明其位置時,則得方程式如次

$$Ax+By+C=0,\cdots\cdots\cdots(1)$$

x及y爲直線上任意之點之坐標.