

算 學 叢 書

初等幾何學作圖不能問題

林 鶴 一 著

陳 懷 書 譯
任 誠 譯
趙 仁 壽

商 務 印 書 館 發 行

中華民國二十四年二月初版

(53820.1)

周

算學叢書
初等幾何學作圖不能問題一冊

每冊定價大洋壹元叁角

外埠酌加運費匯費

版權所有
翻印必究

原 著 者	林 鶴
譯 述 者	陳 懷 壽
發 行 人	王 仁 五
印 刷 所	上 海 雲 南 路
發 行 所	上 海 河 南 路
	商 務 印 書 館
	上 海 及 各 埠
	商 務 印 書 館

(本書校對者胡達聰)

*B六一五四

目 次

第一章 緒論	1
1. 初等幾何學中有名之三作圖不能問題.....	1
2. 作圖方法之制限及作圖不能之意義	2
第二章 幾何學之作用與代數之運算.....	4
3. 代數學解幾何學問題之一例.....	4
4. 關於代數式有幾何學的意義之必要條件.....	6
5. 表幾何學的關係之代數方程式之意義.....	8
6. 二直線之交點可得決定之點.....	9
7. 二圓或與一直線可得決定之點	10
8. 關於幾何學的得決定某點之必要而且充 分之條件	12
9. 二次曲線與直線之交點得作圖者	14
10. 其例	14
11. 同上.....	16
第三章 既約及未約代數的有理整函數	19
12. 有整係數且最高次項之係數的 1 之方程	

式	19
13. 既約及未約代數函數之定義	20
14. 關於整函數分解高司氏之定理	21
15. 愛賽因太氏之定理	23
16. 奈脫氏之定理	25
17. 自高司氏定理誘出之一定理	32
18. 未約及既約之意義之擴張,第17節定理之 一般情形	32
19. 第8節之條件之再說	35
第四章 可歸於三次方程式及四次方程式之作圖 問題	38
20. 既約三次方程式之根僅以有理運算及開 平方不得解出	38
21. 立方倍積問題	40
22. 七等分圓周及九等分圓周	40
23. 三等分任意之角	43
24. 可爲未知數之長之任意	46
25. 可歸於他不能問題之例題	46
26. 知三角之二等分線之長而作三角形	49
27. 知 $a, b \sim c, A \sim C$ 而作三角形	51

28. 知內心,外心及垂心之位置而作三角形	53
29. 欲求之長爲四次方程式之根之情形	56
30. 朴普斯問題之擴張	59
31. 知 $h_a h_b w_a$ 而作三角形	62
第五章 派脫生氏關於由有限回的施行有理運算 及開平方得解之代數方程式之研究及其 幾何學的應用	65
32. 本章總說	65
33. 所與方程式之次數	65
34. 所與方程式之他一性質	67
35. 與任意直線之交點能得決定之代數的曲 線	68
36. 與任意圓之交點能得決定之代數的曲線	72
37. 卡斯鉄龍問題及其擴張	72
38. 圓與高次曲線之交點能得決定之特別情 形	76
第六章 圓周等分問題及圓積問題	79
39. 圓周等分問題總說	79
40. 解本問題必要之整數論定理——夫也羅邁 定理	80

41. 其他二定理	82
42. 圓周等分問題	84
43. 圓積問題	87
44. e 爲超越數之證明	88
45. π 爲超越數之證明	95
附錄第一 作圖不能問題例解增補	100
1—10. 例題十則	100
附錄第二 正十七角形之作圖法	124
11. 正十七角形能得作圖之理由	124
12. 叟雷及巴哈門之作圖法	127
13. 紀勒兒之作圖法	128
附錄第三 圓周及角之近似的等分法	134
14. 總說	134
15—17. 圓周等分法三種	134
18—20. 角之等分法三種	135
附錄第四 用直線及圓以外之曲線以解所謂三大 問題之方法	141
21. 立方倍積問題之變形	141

41. 圓積問題解法	171
附錄第五 求等於圓周之直線問題之近似的解 法	174
42—45. 本問題方法四種	174
附錄第六 π 之值	178
46. 幾何學的算出法	178
47. 解析的算出法	180
48. 於日本算出之結果	183

初等幾何學作圖不能問題

第一章

緒論

(1) 幾何學作圖問題，有性質雖似初等，若可屬於初等範圍中者，而究其解法，困難實甚。古來幾多數學家從事探討者，有下之三題：

I. 立方倍積問題，

求作立方體之一邊，使其體積為所與立方體之二倍（此題亦名戴羅斯 (Delos) 問題）；

II. 三等分任意角問題；

III. 改圓為方問題，

求作正方形之一邊，使其面積等於所與之圓之面積。

上列三問題，數千年間之學者絞其腦汁以研究解法，其正當之答案，最近時代始求得之。夫學者何以為此奮勉不休之研求乎？則以其性質類似初等，以為其

解法亦屬於初等之範圍，而不知其實際不如是之簡單也。據最近研究之結果，已證明此等問題斷非囿於初等範圍所可得其解答者。其證明須借助於代數，是則古代學者所想像不及者矣。

(2) 余於述此等問題之解釋之先，不得不說明求作幾何圖形時所許用之公法 (Postulate)。自歐幾里得 (Euclid) 以來，所許為作圖公法者，不外次之二項：

第一. 過二點得引一直線；

第二. 以任意一點為中心，任意之長為半徑，得畫一圓。

有多數幾何學教科書中，以此等作圖公法列為三項：

第一. 自任意一點得引直線至他點；

第二. 有限直線得任意延長之；

第三. 以任意一點為中心，任意之長為半徑，得畫一圓。

此第三項與前舉之第二項同，第一及第二兩項包含於前之第一項中，余所著新撰幾何學教科書，亦係如此。

如此規定，實予吾人以一種之束縛，所謂不能作圖

之問題，乃在此限制下不能作圖之謂。若一旦取消限制，則不能者無不能矣。即任意角之三等分，亦甚易事也。且應用此種公法，亦非可適用至無限次數；因次數至於無限，則解釋失其精密，作圖仍未見其可能也。

此後本書所謂能否作圖，悉從此限制以立論。故若漠視此限制而漫然主張作圖之可能，其立足點已大異乎吾人，固可不必置辯。即於此限制下，凡已經證明不能作圖之問題，猶欲強索其解答，且不能指摘吾人不能作圖之證明為非者，實亦可笑之至也。

第二章

幾何學之作用與代數學之運算

(3) 茲先揭一題，以示用代數的方法解釋幾何問題之例。

例題。延長已知直線，自 A 向 B ，於其上作 M 點。

令 $BM^2 = AM \cdot AB$ 。

假定 M 已經求得，以 x 表 BM ，以 a 表 AB ，則 x 必滿足於次方程式

$$x^2 = (a+x)a, \text{ 即 } x^2 - ax - a^2 = 0.$$

解之得 $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ 。

根號前之負號，將使 x 為負數，故可棄而不用。

依此表明 x 之值之代數式，得為 BM 之幾何的作圖如次：

自 A 引 $AC \perp AB$ ，令 AC 等於 AB 之半，聯結 BC ，則

$$BC = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

(4)

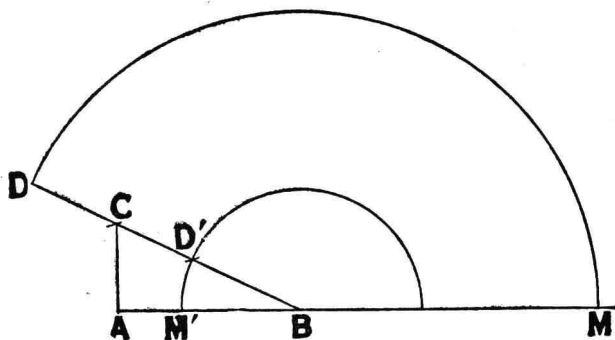


圖 1

延長 BC ，於其上求 D 點，使 $CD = \frac{a}{2}$ ，則 $BD = x$ 為所求之長，故以 B 為中心，以 BD 為半徑作圓，與直線 AB 交於 B 側之點，即所求之 M 也。

(注意) 設取複符號中之負號，則 M 當落於 B 之他側，其法當於 CD 線上 C 之他側求 D' ，令 $CD' = CD$ ，然後以 B 為中心， BD' 為半徑作圓，與 AB 相交，則於 BA 之間得 M' 點。由此得定理如下：

定理 於一般二次方程式

$$x^2 - ax \pm b^2 = 0$$

中， a, b 及 x 皆表明線分之長，且 $\frac{a^2}{4} \mp b^2 \geq 0$ ，則適合於此

方程式之 x ，即 $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \mp b^2}$ 可以作圖

(4) 一切幾何學上所處理之量，不外線、面及體三種；即不外線分之長、面積及體積三種。廣濶之面，既由若干面單位所積成，而所謂面單位者，實即以線單位為一邊之正方形耳；故線為一次元，面為二次元。同理知體為三次元，而於幾何的量與量之間所有代數的關係，皆可作線分之長之代數的關係觀。

以代數式表明線分之長之關係時，其各項之元數即以組成各項之線單位之數而定；例如 a, b 及 c 皆表線分之長，則 a^3 及 ab^2 皆為三次元，而 $\frac{a^2b}{c}$ 則為二次元。若代數式中有 $\frac{a^5b^3}{c^6}$ 項，分母子分別言之，毫不含有幾何的意味；然論其全體，則大有意味存焉。如 $\frac{a^3}{c^3} \cdot \frac{b^3}{c^3} \cdot a^2$ 項中，前二因子所表僅為 a^3 與 c^3 或 b^3 與 c^3 之比，可作一種單純之數論，而 a^2 則表明面積；故 $\frac{a^3}{c^3} \cdot \frac{b^3}{c^3} \cdot a^2$ 為二次元。總之，代數式所有各項不必一一皆含有幾何的意義；但注意其項為若干線單位組合而成，則該項為某次元自可確定。於是揭之重要定理：

定理 線分之長之關係，苟具有代數式之形，式中各項若不皆為同次元，則此代數式不含有幾何學的

意味。

此定理本身已甚明瞭，毋庸另行證明。

例如方程式 $x^2 - ax + b^2 = 0$ 中，所有文字 a, b 及 x 所表皆為線分之長，其各項皆為二次，故此式具有幾何的意義；但方程式若為 $x^2 - ax + b = 0$ ，則 a, b 及 x 雖所表皆為線分之長，其式則毫無意義之可言也。

代數式為同次各項所組成，其式即謂之同次式；如 $\frac{a^2}{4} - b^2$ 之兩項，同為二次元，故其式為二次式。

(注意) 計算某項為某次元時，於不名數不生關係。於是復有次述之定理，

定理。由一個或二個以上已知線分之長，依幾何的方法所可求得之量，即由作圖所可求得之量，以線分之長，面積及體積為限。

即除二次元及三次元外，一切皆不能作圖也。

所謂求作一線分之長 x 適合於二次方程式者，設 a 為 n 次，則 b 必為 $n+1$ 次， c 必為 $n+2$ 次，因必滿足此條件， $\frac{b}{a}$ 始可為一次元， $\frac{c}{a}$ 始可為二次元。由此

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

始得備具幾何的意味，故又得定理如次：

定理. 設 $\frac{b}{a}$ 爲一次元, $\frac{c}{a}$ 爲二次元, 而均得以其他一個或二個以上已知線分之長作成者, 則適合於二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之 x , 亦得以最初所知一個或二個以上線分之長作出.

(注意) a, b 及 c 三者雖不能個別作圖, 但求 $\frac{b}{a}$ 及 $\frac{c}{a}$ 能作圖即得.

幾何學問題僅由幾何學的狀態移轉於代數學的狀態而未受代數學的變化時, 各項固必同次, 且不可高至四次以上, 因四次以上之項全無幾何的意味也.

但自幾何的狀態移轉於代數的狀態後, 因欲去分母或根號而施行代數的變化時, 常發生四次以上之項, 蓋因受非幾何的代數變化不得不然. 然無論如何變化, 其式既由同次項所組成, 結果必仍爲同次, 雖高至四次以上, 所表仍不失幾何的意味也.

(5) 解一切作圖問題時, 欲決定所求之圖形, 須求得適合於此圖形之點, 而點之位置, 則由線分之長所決定者.

例如三等分 AOB 角時, 但求得分線中一點, C 與 OA 之距離 CM 及 C 點與 A 之距離即得. 故由幾何的狀態

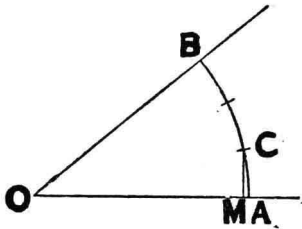


圖 2

變為代數的狀態時,其中未知數所表明者即用以決定此點之線分之長;而以幾何的方法決定某點云云者,即決定此點必需之線分之長已經決定之謂也。

吾人今後決定作圖問題之能否,恆着眼於以決定某點所要線分之長為根之代數方程式;因以幾何的方法解各種作圖問題時,從無一般之法則,故欲以幾何的手段決定作圖之能不能,目的實難達到,而一經變為代數的狀態之後,則研究之方便自較普通也。

如前所述幾何的作圖,不外以引直線及畫圓決定某點,故第一可以研究者,以此項幾何的作用變為代數的狀態時究屬如何;換言之,由若干直線與圓決定某點時所必要之線分之長與既知之線分之長,究有若何關係,為亟須研究者也。

(6) 今假設一直線以代數的方法表明其位置時,則得方程式如次

$$Ax + By + C = 0, \dots\dots(1)$$

x 及 y 為直線上任意之點之坐標。