MOSHIGUAN
YU SHUXUE FANGFALUN

模式观与数学方法论

钟志华 著

化学工业出版社

MOSHIGUAN
YU SHUXUE FANGFALUN

模式观与数学方法论

■ 钟志华 著

化学工业出版社
·北京·

本书在充分吸收现代数学、现代哲学、认知心理学等学科最新研究成果的基础上，按照从认识论到方法论的逻辑研究顺序，主要介绍了数学知识及其特点、模式观与模式识别、模式解构方法、模式建构方法、模式转换方法等内容，同时对各种数学思想方法进行了重新梳理和分类。

本书适合数学与数学教育专业的教师及学生阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

模式观与数学方法论/钟志华著．—北京：化学工业出版社，2011.1

ISBN 978-7-122-10200-3

Ⅰ．模…　Ⅱ．钟…　Ⅲ．数学方法-方法论　Ⅳ．01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 253709 号

责任编辑：曾照华　　文字编辑：冯国庆

责任校对：宋　夏　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京永鑫印刷有限责任公司

装　　订：三河市万龙印装有限公司

710mm×1000mm　1/16　印张 12¾　字数 260 千字　2010 年 12 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：42.00 元

前言

数学思想方法是数学的灵魂，它不仅是数学知识的重要组成部分，而且是数学发展的源泉与动力。

中外数学家、数学教育家历来十分重视数学思想方法的研究。从古希腊的毕达哥拉斯、欧几里德到近代的笛卡尔、牛顿、莱布尼兹，再到现代的克莱因、希尔伯特、A. N. 怀特海等都对数学方法论进行过非常深入的研究。可以说数学方法论的研究一直伴随着数学的发展而发展，但数学方法论真正作为一门学科进行研究却是20世纪50～60年代的事。著名数学家、数学教育家G·波利亚通过对数学思想方法的发展历史和数学问题解决过程的深入研究，提出了交轨模式、笛卡尔模式、递归模式和叠加模式等数学思想方法，并在此基础上创建了数学方法论这一新兴学科。

数学方法论自创建以来一直受到数学界和数学教育界的广泛重视。日本著名数学教育家米山国藏通过研究发现："学生们在初、高中所学的数学知识因毕业进入社会以后几乎没有什么机会应用这种作为知识的数学，所以通常在走出校门后不到一两年很快就忘记了。然而不论他们从事什么业务工作，深深铭刻于头脑中的数学精神、数学思维方法、研究方法、推理方法和着眼点（若培养了这方面的素质的话）却随时随地发生作用，使他们终身受益。"我国著名数学教育学家徐利治教授、郑毓信教授等对数学方法论进行了深入的具有开创性的研究，通过研究提出了抽象度分析法、关系映射反演方法等重要数学思想方法并指出数学模式观就是要用模式的观点去分析模式、应用模式、建立模式和鉴赏模式；徐沥泉教授通过20余年的实验研究将数学方法论成功应用于数学教学并创造了"MM教育方式"，这种教育方式已经在全国各地生根、开花、结果。现在数学方法论的研究已经不再仅仅局限于数学和数学教育领域，数学方法论在应用数学甚至在工程、技术等领域也受到了广泛的重视，可以说数学方法论已经不再是一种单纯的数学方法，而是成为一种集研究方法培养和思维能力训练于一体的科学思维方法。

现在，数学方法论已经发展成为一门涉及数学、哲学、思维科学、认知心理学、人工智能等众多学科的交叉学科。其研究视角和研究方法都较过去发生了非常深刻的变化，数学方法论的研究已经不仅仅局限于过去的经验总结和解题研究层面，数学方法论的研究在全面吸收了现代数学、现代哲学、认知心理学、人工智能等学科的最新研究成果的基础上已经迅速发展成为一门具有较高理论水平和广泛应用前景的新兴学科。

本书作者在多年的数学教学实践和研究的基础上，充分吸收现代哲学，特别是认知心理学、人工智能的最新研究成果，按照从认识论到方法论的逻辑研究顺序，

从数学是模式这一逻辑起点出发，按照模式识别、模式解构、模式建构和模式转换这一线索对各种数学思想方法进行了重新梳理和分类，希望能对数学方法论的研究和发展有所促进。

本书的主要特点如下。

① 从认识论出发，运用认知心理学的最新成果——模式理论对各种数学思想方法进行了重新分类，为数学方法论的研究开辟了一个全新的视角。

② 知识的创造只是创造的结果，思想方法的创造才是创造的不竭源泉。本书改变了过去单纯从解题视角来研究数学方法论和“方法＋例子”的传统模式，转而从数学思想方法的发展历史中去考察其演变过程，努力将学生的视野从知识的创造引到思想方法的创造上来。

③ 突出数学思想方法在探索、发现中的作用。把数学思想方法不仅看作是解题的方法，更把它作为探索和发现的重要方法。

④ 加强了数学方法论与数学新课程标准之间的联系，使数学方法论能起到更好地促进学生的数学学习和数学发现的作用。

本书在写作过程中参考了一些数学方法论及其他方面著作和文献，因此，在某种意义上来说，本书也是从事数学方法论等领域研究的诸多同仁共同智慧的结晶，在此谨向被引用文献的各位作者表示崇高的敬意。本书为南通大学学术著作出版基金资助出版。

由于数学方法论是一门新兴学科，本身需要不断发展和完善，加之作者水平有限、成书仓促，故在写作过程中肯定会出现许多不当之处，敬请各位专家、读者批评指正，以便进一步修改、完善。

钟志华

2010 年 12 月

目录

第一章 绪 论

数学思想方法与一般意义上的科学研究方法之间有着内在的联系，追溯数学发展历史可以发现，很多数学家本身也是哲学家和科学方法论专家。古代的如首先提出证明方法的泰勒斯、首先提出逻辑推理的排中律和矛盾律的亚里士多德、首先用公理化思想构建了严密几何学体系的欧几里德等；变量数学时期的笛卡尔、牛顿、莱布尼兹等不仅是伟大的数学家，同时也是伟大的哲学家和科学方法论专家，笛卡尔的《谈谈方法》、牛顿的《自然哲学的数学原理》以及莱布尼兹的《莱布尼兹与克拉克论战书信集》等都是非常经典的科学方法论著作；近现代的如大家非常熟悉的M·克莱因、冯·诺伊曼、罗素、H·庞加莱、A.N. 怀特海、G·波利亚、拉卡托斯等不仅是著名的数学家，而且也是数学方法论专家，同时对科学方法论也有非常深入的研究。

第一节 科学方法论的产生与发展

在西方，史学家们把古代希腊的自然哲学作为西方科学的发端。东方的科学兴起则早于古希腊，像古代埃及、巴比伦、印度和中国是率先进入奴隶社会的国家，在古天文学、数学、医学等方面作出了突出贡献，被称为古代文明的发祥地。然后，古希腊有别于其他国家的是从一开始就注重自然，始终以探求自然界的“本原”为目标，而不是偏重于人事伦理。他们在研究自然的同时非常重视对科学知识的理性反思，通过对知识理论问题的研究，“为科学引入了其不可或缺的要素——方法论，从而奠定了科学赖以发展的坚实基础。”

古希腊丰富的哲学思想包含着近代乃至现代各种科学方法论观点的胚芽。可以说，古希腊自然哲学不仅是西方科学的发端，还是科学方法论的摇篮。

下面我们就来考察科学兴起时期即从古希腊到近代科学产生以前的时期科学研究方法的产生及发展。

一、探求自然的最初模式

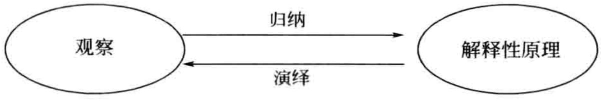
在西方，自然知识的证明解释程序与哲学一起发源于公元前6～5世纪的古希

腊，古希腊第一位自然哲学家泰勒斯是米利都学派的创始人，他第一个研究了世界万物的本原，并把抽象和演绎推理作为认识世界的手段，提出万物的本原是“水”的主张。

继泰勒斯之后，古希腊早期哲学家对万物的本原展开了一系列讨论，产生了各种不同的观点，出现了各种不同学派。虽然各派观点各异，但都继承了泰勒斯的研究系统，在观察的基础上获得万物本原之解，从而摆脱了人类早期认识自然的拟人化方式和神秘色彩，走上了自然原因说明世界的正确道路，在对自然进行研究的同时，他们还提出唯物主义的世界观，认为世界是物质的，是不断运动和发展的。赫拉克利特认为这种变化和发展遵循着普遍的、必然的客观规律，他把这种普遍的，必然的客观规律叫做逻各斯（Logos），认为这个逻各斯永恒地存在着，万物都根据这个逻各斯而产生。

另外，古希腊早期自然哲学家不仅通过观察认识自然，而且在观察基础上运用抽象、概括和推理作为获取自然知识的手段。在他们对万物本原的认识中已包含了从个别到一般，从现象到本质的思维进程。这表明，古希腊早期自然哲学家在探索世界本原过程中已经遵循了一定的论证和解释程序，上述这些自然哲学家的着眼点在于回答世界的本原问题，并没有明确提出一般的方法论模式。第一个明确提出论证自然知识和解释自然现象一般模式的是亚里士多德。

亚里士多德是古希腊最伟大的思想家、哲学家、学术的集大成者，他第一个全面、系统地研究了前人的方法论思想，确立了逻辑思维的基本规律，建立了比较完整的古典逻辑体系，成为形式逻辑的创始人，亚里士多德的逻辑体系的建立，标志着逻辑方法的产生，它对于以后科学的研究和发展有着极为重要的意义。亚里士多德认为，科学的任务在于探明原因，获得关于事物原因的一般知识。知识来源于观察而形成的感觉经验，但感觉经验提供的只是个别事物的知识，而不能提供关于事物原因的一般知识，只有在有关个别事物的知识基础上进行理论思维的加工，才能获得关于事物的一般知识。亚里士多德认为科学研究是在观察基础上运用归纳上升到一般原理，然后通过演绎推理回到观察的过程。这就是他所提出的著名的归纳-演绎程序，可表示如下：



亚里士多德认为要获得解释性原理，必须运用归纳方法。他特别强调简单枚举归纳法和直觉归纳法在获得解释性原理中的作用。不过他更加重视的是从解释性原理推出需要解释的现象的演绎程序。他认为科学的目的在于解释，并以巴巴拉式三段论作为演绎推论的形式，所谓巴巴拉式三段论是指推理的大前提、小前提和结论均是全称的肯定命题。例如：

大前提：凡生物必死

小前提：凡人是生物

结论：凡人必死

亚里士多德将其巴巴拉式三段论看作科学解释中演绎法的范例，认为由这种演绎法建立的科学解释或科学证明是可靠的。

二、数学方法的形成

数学是专门研究量的科学，它撇开了客观对象的其他一切特性，只研究量的规律性。对事物量的研究逐渐形成了在量之间进行推导和演算的各种方法，数学也因此成为从量的方面把握自然规律的有效工具。

毕达哥拉斯是一位数学家和哲学家，在哲学上他把数当作万物的本原，揭示了世界万物都具有量的规定，提出了用数学解释万物，从量去把握自然的思想，从而开创了数学方法。毕达哥拉斯从音乐的和谐与数学的关系中得出自然界是和谐的、有秩序的思想，而数即反映了自然界的和谐和规律性。这一思想成为精确科学知识的发端，并深刻地影响着后来的科学家用数学描述自然规律，使科学由定性描述进入了定量描述。

据说有一次他走过一个铁匠工场，打铁时发出一种和谐的声音引起了他的注意，后来，他比较了发出谐音的几个铁锤的重量，并在琴弦上进行试验，发现了音乐的和谐总是以与数学成比例的对应关系而存在。如 2∶1 的弦长对应八音度，3∶2 的弦长对应五音度。

之后，柏拉图继承了毕达哥拉斯的思想，但将数的概念进行了新的解释，认为数是脱离具体事物而独立存在的概念。尽管柏拉图的理念学说从根本上是错误的，但它标志着西方理论思维的重大进步。因为“它第一次揭示了概念是科学认识的形式和工具”，并且认为科学认识就在于用数学概念的体系去把握自然。继柏拉图把数学应用天文学之后，阿基米德进一步将数学应用于力学，使数学方法日益成熟。

三、公理化方法

数学的应用不仅在于它是计算的工具，更主要的则是它是证明的工具。柏拉图明确指出，洞见理论而获得的知识必须加以证明，而这种证明应以某些概念作为出发点。柏拉图提出从自明的假设出发而最后达到他们所要求的结论，并进一步指出通过演绎证明的方法达到结论的思想是对数学方法的又一重大发现。后来亚里士多德从知识前提的不可证明性出发，提出了公理化方法。亚里士多德设想，一个完整的科学理论体系应该是一种演绎系统的结构，科学知识都是从初始原理中演绎出来的结构。100 多年后，欧几里德成功地应用公理化方法建立了第一个演绎系统化的几何学体系，实现了自泰勒斯以来追求科学知识体系理论化的理想。公理化方法就是从尽可能少的不加定义的原始概念和一组不加证明的原始命题（公理、公论）出发，运用逻辑规则推导出其余的命题和定理，以致建立整个理论体系的一种方法。

亚里士多德提出公理化方法的基本思想是：从不可证明的必然前提出发，运用

巴巴拉式三段论，推出所有定理。虽然，亚里士多德没有运用公理化方法推出定理，也没有构造公理化的知识体系，但他从上述基本思想出发，制定了必然前提的四个逻辑规则：

① 前提必须是真的；

② 前提必须是无法证明的；

③ 前提必须比结论更易解释；

④ 前提必须是结论的原因。

这些逻辑规则为后来欧几里德系统地加工整理几何学知识提供了必要前提。

欧几里德运用公理化方法创造性地整理出《几何原本》。

《几何原本》的基础是由原始的概念以及公理、公设组成的。原始概念是描述性的定义，公理和公设是一些不加数学证明而直接采用的命题，然后以此为出发点，应用亚里士多德的逻辑推理规则以及数学计算方法，演绎出大量的定理和命题。欧几里德的公理化方法包括三个方面：

① 公理本身是不证自明的真理；

② 公理与定理有演绎关系；

③ 定理与观察结果相一致。

即一个完备的科学理论系统，应该是一个演绎陈述系统，其逻辑起点是不证自明的公理，从公理可演绎出定理，定理能从观察中得到验证。

继欧几里德以后，阿基米德用公理化方法推演力学的结论，开创了物理学理论结构严谨的传统，在《论浮体》中，他提出了两条公设，并以此为出发点演绎出浮力定律及其他定理。在《论平面的平衡》中，他提出了七条公设，从这七条公设出发，演绎出了杠杆定律和其他定理。由于公理化方法的运用，使力学成为一个逻辑结构严密的公理化系统。

但由于时代的局限，欧几里德在《几何原本》中所运用的公理化方法带有很大的直观性。为了弥补欧氏几何的不足，现代数学家希尔伯特把公理化系统形式化，把原有公理系统中的概念、命题、推理分别代之以符号、公式、符号变换，把全部数学命题变成数学符号和逻辑符号按一定规则排列的公式的集合，从而发展了形式公理化方法，使公理化方法进一步完善。现在，公理化方法已成为建立科学理论体系的一种重要方法。

公理化方法对数学教育的启示：在数学教学中，不能仅仅要求学生满足于学会论证、理解一些数学结构，而应该着眼于寻找根据，弄清所依据的原理、法则，以获得可靠的知识，并在此基础上进行发展性的、创造性的学习。古希腊根据原子论的观点，在检验命题的真实性之后，还对命题的要素进行分析，把“分析要素”作为证明的目的，“分析要素”支配着论证的思想，欧几里德的《几何原本》就是在分析几何命题的要素的基础上，说明各命题的构成的。构成证明的要素有两种：一种是证明所需要的图形要素（条件）；另一种是公理、定义、定理这类要素。在开始教授论证方法时都会遇到这样的问题，学生觉得要论证的问题真实性太显然，没

有证明的必要。倘若从“寻找根据”这一思路出发，那么尽管问题非常显然，学生也会认识到证明的必要性和证明的意义。如果对证明的目的，除了表达某个命题为真之外，还要分析要素，即强调寻找根据，那么在证明某个命题的真实性以后，便会回过头来检验保证其真实性的要素和命题之间的关系，于是证明更严格化，命题更一般化，达到弄清问题的本质，并会在此基础上去思考、发现新的问题，获得新的知识，也就是进行了发展性的学习。在东方，数学仅仅停留于“术”的水平上，直到已经接纳了西方数学的今天，这种精神依然根深蒂固地存在于人们的数学观和数学教育观之中。在我们的教学中表现为以解说事物、要求记住更多的知识为目的。至于数学学习的目的，则让学生记住计算的方法、处理的办法，寄希望于通过练习来达到熟练的程度。教师的态度也必然把功夫下到解难题上，认为只有通过解题的训练，在解题的过程中，以心传心，才能抓住本质。由此可见，数学教育改革的本质不在于升学考试制度，而在于改变人们对数学的观点和根本精神。公理化方法对于弥补东方人在思维方法上的缺陷，对于发展包括数学思维方法在内的思维能力，对于脚踏实地进行创造性、发展性的学习指导都是很有价值的。

四、归纳法的萌芽

归纳法是从个别中推导出一般原理的方法，它是在考察某类事物部分对象的基础上抽取其共性并推广到该类事物的全体，从而形成关于该类事物的一般性认识的一种方法。归纳法是获取知识的一种重要方法。

在人类的思想史上，最早把归纳法作为一种思维方法进行讨论的是苏格拉底。他的归纳法不是在研究自然，而是在讨论伦理道德问题中提出的。他的归纳法是通过分析个别的伦理行为的事实来确定伦理概念的方法，是为伦理概念找定义的方法。苏格拉底认为，伦理知识的获得首先在于对某一道德行为提出初始的定义，然后引进一系列事例，当初始定义应用到这些事例上去出现矛盾时，便推翻初始定义而提出新的定义，如此继续下去，直到得出一个令人满意的、能够揭示某一道德行为本质的定义为止。这种对一系列个别的伦理行为进行分析，从而寻找伦理概念的普遍定义的方法就是苏格拉底的归纳法。

之后，柏拉图进一步发展了苏格拉底的归纳法并提出概念是按辩证法去获得知识的，认为辩证法包括两个环节。

(1) 上升法，即在众多个别中发现一般，由此形成概念，也就是在多中求一般，从而使灵魂得以认识理念。

(2) 下降法，即由原理下降，由属降到种或划属为种，也就是对概念作逻辑划分。

其中上升法是对苏格拉底归纳法的发展，柏拉图把上升法看作是获取知识的重要手段。

对归纳法进行系统研究，并把它确立为获取科学知识的一种基本逻辑方法的是亚里士多德。亚里士多德认为解释性原理是从对自然的观察中归纳出来的，正是由

于归纳，才从感觉经验中得出有关形式的概括，他通过对归纳的研究，提出了三类归纳法。

第一类是完全归纳法，亚里士多德称之为归纳三段论。其具体逻辑模式为：

C 是 A

C 是 B

所以 B 是 A

其实例为：

人、马、骡都是长寿的

人、马、骡都是无胆汁的动物

所以，无胆汁的动物都是长寿的

第二类是简单枚举归纳法，它是简单枚举某类事物中部分对象都是有此种属性的一种归纳方法。其模式如下：

a_1 具有性质 p

a_2 具有性质 p

……

所以，所有的 a 都具有性质 p

第三类是直觉归纳法，它是凭借科学洞察力对隐藏在感觉材料背后的本质所进行的直觉推论，如一个科学家在各种情况下都注意到月球明亮的一面总是朝向太阳，他由此直觉到月球发光的原因是日光的反射。

亚里士多德认为，完全归纳法只是一种就事论事的方法，它所获得的只是局限于有限的经验范围之内的经验知识，而不是解释性原理，它多半用作证明手段，是特殊的三段论；简单枚举归纳法和直觉归纳法能从个别上升为一般，它们才是获得解释性原理的重要手段。但是，简单枚举归纳法和直觉归纳法的前提是个别事实，其推理是或然的，因此不能给出必然的知识，那么用于证明前提的必然性又是怎么来的呢？亚里士多德认为，感性知觉本身就具有从个别事实把握一般的能力，正是这一能力保证了简单枚举归纳法和直觉归纳法所依赖的证明前提的必然性。由于亚里士多德对归纳法的系统研究，从而把归纳法确立为与演绎并列的科学认识逻辑方法。

科学归纳法的思想源于伊壁鸠鲁，他非常重视归纳法，提出了萌芽状态的科学归纳法。科学归纳不同于亚里士多德的归纳法，亚里士多德归纳法只是简单地枚举事实作为前提，这样得出的结论带有很大或然性。科学归纳法有两个主要特点：“首先，在归纳过程中始终以一定的理论知识为指导，对前提和结论作理论考察；其次是在归纳过程中渗入了演绎。伊壁鸠鲁的科学归纳法强调用类比、分析和综合对前提作理论分析，提高了归纳结论的可靠性，弥补了简单归纳的不足，以致有的现代逻辑学家认为伊壁鸠鲁的归纳法是后来弗兰西斯·培根和穆勒创立科学归纳法的先驱。”

五、中世纪的科学方法论

在黑暗的中世纪，科学方法论的发展受到了很大的影响，这一时期的主要成就如下。

大阿尔伯特提出把逻辑看作一切科学的研究方法，认为逻辑能教给人们如何从已知推及未知，这一思想对逻辑方法的确认与发展有着积极的意义。R·格罗斯泰斯特把归纳阶段看成是现象分解为组成要素的“分解”过程，把演绎阶段看成是要素的重新组合过程，使亚里士多德的方法更加具体化。

文艺复兴时代后期著名天文学家开普勒在探究行星运动的规律时，把数学方法作为解开宇宙奥秘的钥匙。这一切给予数学发展以巨大的推动，成为促使 17 世纪中后期数学思想变革的精神力量。最著名的艺术家达·芬奇主张科学家应以经验为依据，采取实验的方法研究自然。他认为在科学研究中要重视寻找数量之间的关系，他特别强调数学的重要性。他说：“一个人如果怀疑数学的极端可靠性就是陷入混乱……，因为人们的探讨不能称为是科学的，除非通过数学上的说明和论证。”他认为大自然是按照数学规律运转的，自然界的力和运动必须通过对数学的研究来探讨。只有紧紧地依靠数学，才能穿透那不可捉摸的思想迷雾。

欧洲人于是相信自然界是合理的，是按照数学方式设计的，并且这个设计是非常简单且和谐的。从此以后，把数和数学关系作为现实世界的精华的思想在学术界逐渐占据统治地位。

哥白尼认为，在理性思考的过程中，数学计算和数学推理有着特别重要的意义，数学方法是从观测结果到一般定律的必要手段。他坚持科学的研究方法，以长期不懈的观察和实验为依据，不盲从权威，独立思考得出科学结论。近代实验方法的倡导者和科学归纳法的奠基人弗兰西斯·培根指出，实验是认识的基础，感觉是一切知识的源泉。而经院哲学家的那些毫无实际效果的空洞的争辩，是由于误用了亚里士多德的三段论而引起的。他说，实际上人们的一切知识不是靠空洞的三段论推理所获得的，只能从经验中获得。他决心在这种经验的基础上提供一种不同于亚里士多德的认识方法，即归纳方法。培根提倡的实验方法、归纳法和为实际应用服务的方向，对于一向习惯于演绎推理的数学家们是一个很好的启发。从此以后，归纳法和演绎法成为两种基本的数学思想方法。

另外，中世纪后期还出现了探求因果联系的逻辑方法，如邓·司各脱研究了求同归纳法，奥卡姆研究了差异法，R·格罗斯泰斯特研究了求同和差异归纳法。

在中世纪哲学家中最有影响的是罗吉尔·培根，他在科学方法论上的最大功绩在于提出了实验科学思想，成为实验方法的先驱。他认为：实验是一切科学认识自然的手段和基础，坚信真理来于实验，是实验的推论。他还进一步提出了实验科学的三个特征。

第一，实验科学通过对归纳结论的实验检验达到完全的确实性。

第二，实验科学增加现象知识。培根认为归纳成功的关键在于精确与广泛的知

识，要获得精确与广泛的知识必须利用主动实验来增加现象知识，以达到正确归纳的目的。

第三，运用实验来积极主动地验证演绎的结论和预言，以弥补被动观察的不足。

培根对实验科学的倡导，使实验活动逐渐在物理学、生物学以及其他领域内开展起来。

第二节 数学方法论概述

早在近代科学的黎明时期，德国数学家莱布尼茨就指出：数学的本质不在于它的对象，而在于它的方法。

在数学的发展过程中，人们逐渐认识到对数学方法本身进行理论研究的重要性。特别是进入近现代数学时期，关于数学方法的理论研究专著大量涌现，自 20 世纪 80 年代开始，我国开始形成该领域的研究热潮，时至今日，数学方法论作为一个独立的学科已得到一定发展。

本节将对数学方法论的研究对象、历史沿革、基本特点、意义及研究方法作一般概述。

一、数学方法论及其研究对象

1. 方法及数学方法论

"方法"这一概念在战国时代就已经使用，《墨子·天志》中这样说道："中吾矩者，谓之方，不中吾矩者，谓之不方。是以方与不方，皆可得而知之。此其故何？则方法明也。"在这里方法所指的是度量之法。而在唐代韩愈的《昌黎集》中也提到方法，"为之奔走经营，相原隰之宜。指授方法。"在这里方法又指处理事情的办法。而在西方，方法一词"Method"（英文）、"Mèthod"（法文）、"Méthod"（德文）均源于由希腊文 μετά（沿）和 òdòS（途）组成的 μετάòδòS，为"遵循某种道路"之义，意指"道路"或"途径"。

数学中的化归、关系映射反演方法，特殊化与一般化等都属途径之列；而诸如观察、分析、综合、抽象、概括等则属手段之列。

数学方法论，通俗地说，就是把数学的研究方法作为讨论和研究对象的一门学问。而严格地说，数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创造等法则的一门学问（徐利治语）。

2. 数学方法论的研究对象

关于数学方法论的研究对象，目前有各种各样的分类方法。比如有人按照数学方法的适用范围将数学方法论的研究对象分为以下几类。

（1）数学发展中产生的一些重要方法

如：欧几里德等创立的几何公理化方法，笛卡尔、费马在创立解析几何的过程

产生的形数结合思想方法，刘徽在《九章算术注》中提出的割圆术及在基础上创立的极限思想方法等。

（2）数学家的数学活动方法

如：笛卡尔在其著作《指导思维的法则》中讨论了对解题有用的思考方法，后来被G·波利亚称为"笛卡尔模式"。

第一，将任何种类的问题划归为数学问题。

第二，将任何种类的数学问题划归为代数问题。

第三，将任何代数问题划归为方程的求解问题。

又如：伽罗华在解决一元五次以上方程的求解问题时提出的群论方法、变换的思想方法对代数学甚至几何学都产生了非常深远的影响。

（3）数学教学中的数学方法

如：归纳方法、构造方法、换元法、配方法、待定系数法等。

本书则按照模式研究的顺序将数学方法论的研究对象分成以下几类。

（1）模式解构方法。如分析方法、分解方法、分类方法等。

（2）模式建构方法。如归纳方法、抽象方法、联想方法、数学模型方法等。

（3）模式转换方法。如视角转换、结构转换、数学语言转换等。

（4）模式鉴赏方法。如数学美方法等。

当然，这样的分类仅仅只是从模式观这一研究立场出发所进行的分类，并不可能对数学法论的研究对象进行绝对严格的划分。事实上，各种数学方法之间本身就存在千丝万缕的联系，往往呈现"你中有我、我中有你"的状态，因此，这样的划分只是提供一种研究的视角，目的是对数学方法论的研究能够提供一定的参考价值。

二、数学方法论的形成与发展

从数学的发展史来看，数学的产生和发展总包含着数学方法的产生、积累和发展，而人们在研究数学本身的同时，也就开始了数学方法的研究，可以说，数学发生发展的历史，也就是数学方法论的产生、演进的历史。

1. 数学方法论的萌芽（远古～公元前6世纪）

这一时期的数学方法主要是一些简单的计数方法和测量方法。

2. 常量数学时期与数学方法论的产生（公元前6世纪～17世纪中叶）

常量数学时期，数学方法论得到了迅速发展，产生了很多重要的数学思想方法如观察、实验、归纳、演绎等，这些数学思想方法奠定了数学方法论的理论基础，对数学方法论的进一步发展产生了非常深远的影响。其中最有影响的有：刘徽通过研究割圆术，创立了极限的思想方法；亚里士多德在《工具论》中创立了形式逻辑，论述了归纳法和演绎法；欧几里德等人在《几何原本》中运用的公理化思想方法；英国数学家纳皮尔发明的对数方法；英国哲学家弗兰西斯·培根在其名著《新工具》中提出的实验方法与归纳方法等。