

# 代数和初等函数学习指导

许莼舫 编

中国青年出版社

# 代 数 和 初 等 函 数

## 学 习 指 导

許 莼 舫 編

中 国 青 年 出 版 社

---

## 内 容 提 要

本书是供给青年作学习代数和初等函数时的参考或复习用的。取材从“代数式和方程”、“有理数”开始，包括代数和平面三角，另外增加了解析几何的部分内容，按照“以函数为纲、形数结合”的精神，把它们结合成一个整体。编制方面，分章总结要点，扫除疑难，帮助读者明确概念，巩固知识，使他们在学习时少走弯路，省去摸索时间，提高学习效果。

### 代数和初等函数学习指导

许 苑 舫 编

\*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

787 × 1092 1/32 19 3/4印张 400千字

1963年6月北京第1版 1980年2月北京第4次印刷

印数 361,001—761,000册 定价 1.40元

## 重印说明

本书初版于1963年,是根据当时的中学数学课本并参酌各省、市拟订的数学教学改革方案编写的.现在中学数学教学大纲已经修订,新教材也正在统一编写中,本书取材和目前教学要求已不完全适合.但作为青年学习代数和初等函数的参考读物和自学读物,还有一定价值.许多青年读者和中学教师纷纷来信要求重版.由于作者已于文化大革命前夕因病去世,无法再作修订,爰照旧版重印,将上下册合订一册.

中国青年出版社

1978年9月

# 目 次

## 上册

<b>第 一 章 代数式和方程</b> .....	5
一 用字母表示数(5) 二 名詞、符号和运算順序(7) 三 简单运算(10)	
<b>第 二 章 有理数</b> .....	25
一 名詞表解(25) 二 有理数的运算(29)	
<b>第 三 章 整式</b> .....	42
一 名詞表解(42) 二 整式的性質(43) 三 整式的整理(44)	
四 整式的加法(47) 五 整式的減法(51) 六 去括号和添括号(53) 七 整式的乘法(56) 八 整式的除法(65)	
<b>第 四 章 多項式的因式分解</b> .....	75
一 提取公因式的分解(75) 二 分組分解(78) 三 利用公式的分解(79) 四 二次三項式的分解(85)	
<b>第 五 章 分式</b> .....	93
一 分式的基本运算(93) 二 分式的四則运算(99)	
<b>第 六 章 一元一次方程</b> .....	108
一 名詞表解(108) 二 等式的性質(109) 三 解方程的基本运算(110) 四 一元一次方程的解法(114)	
<b>第 七 章 比和比例</b> .....	129
一 比和比例的性質(129) 二 比和比例的問題(132)	
<b>第 八 章 实数·冪和方根</b> .....	136
一 名詞表解(136) 二 冪的性質(139) 三 方根的性質(140)	

四	开平方(145)	五	根式的运算(153)	
<b>第九章</b>	<b>近似计算</b> .....			<b>163</b>
一	名詞表解(163)	二	近似数的运算(168)	
<b>第十章</b>	<b>二次方程和可以化成二次型的方程</b> .....			<b>179</b>
一	名詞表解(179)	二	二次方程的解法(180)	
三	有关二次方程的問題(191)	四	可以化成二次型的方程解法(197)	
<b>第十一章</b>	<b>一次函数·直綫和二元一次方程組</b> .....			<b>203</b>
一	名詞表解(203)	二	一次函数(206)	
三	直綫(212)	四	二元一次方程組(220)	
<b>第十二章</b>	<b>二次函数·圓錐曲綫和二元二次方程組</b> .....			<b>236</b>
一	二次函数(236)	二	圓錐曲綫(244)	
三	二元二次方程組(262)			
<b>第十三章</b>	<b>不等式</b> .....			<b>277</b>
一	名詞表解(277)	二	不等式的性質(278)	
三	不等式的証明(280)	四	不等式的解法(284)	
<b>附录</b>	<b>研究題答案</b> .....			<b>296</b>

## 編者的話

近年以来,我国的教育事业取得了巨大的成就。由于广大师生深入貫徹了党的“教育为无产阶级的政治服务,教育和生产劳动相结合”的方针,思想認識有了很大进步,对教学的目的性更加明确,积极性也不断增长,从而使教学质量显著提高。但是,学生在各科的学习中,困难在所难免。尤其是在中学数学方面,学生一向花在这一科上的时间占得最多,困难更突出一些。为了帮助中学生加深对代数和初等函数教材内容的理解;帮助学生总结要点、分辨异同、明确概念;提供学习注意点,扫除各种疑难;补充多量例题,举了解法步骤和思考过程,培养解决实际问题的能力,并启发他们把知識灵活运用,就编写了这一部書。希望学生通过本書,能够少走弯路,省去摸索的时间,提高学习效果,多快好省地完成学习任务。

本書是根据一般課本,并参酌各省、市拟訂的数学教学改革方案和新教材编写的。目前教学改革虽然还在重点試驗阶段,但是一般中学数学教师已經都能体会到“以函数为綱、形和数相结合”的新体系的精神,把这种經過試驗已获成效的内容貫徹到教学中去。并且,一般学校数学教学进度也比过去加快,原有課本可以提前教完,在中学最后阶段有增加新教材的趋势。因此,本書取材包括了原有初、高中代数和平面三角

两种内容,并且新增了平面解析几何的浅近部分,把它们有机地结合而成一个整体。

原有课本是把代数和平面三角分开的。本书把它们合并编写,这样一方面可以使两者紧密联系,收到相得益彰的效果;另一方面,由于编排上顾到灵活性,读者在必要时也可以把有关三角的部分留下来,在另一阶段阅读,这作为课外读物,大概还不会有多大的不方便。

关于初步的平面解析几何,原来中学里是没有的,现在新增这一材料,实际上非但没有过于加深,相反地,把形和数结合起来,使代数式形象化,读者在直观的帮助下可以得到进一步的理解,并产生不易磨灭的印象。

本书所选例题,为了使读者熟悉各种变化,举了很多特例,因而有个别题目稍嫌繁难,但用作观摩,似乎还是有益处的。

本书在编排和取材方面,可能有不适当的地方,内容也可能有错误的地方,希望读者多多指正。

許燕舫

1961年三月

# 目 次

## 上册

<b>第 一 章</b>	<b>代数式和方程</b> .....	<b>5</b>
	一 用字母表示数(5) 二 名詞、符号和运算順序(7) 三 简单运算(10)	
<b>第 二 章</b>	<b>有理数</b> .....	<b>25</b>
	一 名詞表解(25) 二 有理数的运算(29)	
<b>第 三 章</b>	<b>整式</b> .....	<b>42</b>
	一 名詞表解(42) 二 整式的性質(43) 三 整式的整理(44) 四 整式的加法(47) 五 整式的減法(51) 六 去括号和添括号(53) 七 整式的乘法(56) 八 整式的除法(65)	
<b>第 四 章</b>	<b>多項式的因式分解</b> .....	<b>75</b>
	一 提取公因式的分解(75) 二 分組分解(78) 三 利用公式的分解(79) 四 二次三項式的分解(85)	
<b>第 五 章</b>	<b>分式</b> .....	<b>93</b>
	一 分式的基本运算(93) 二 分式的四則运算(99)	
<b>第 六 章</b>	<b>一元一次方程</b> .....	<b>108</b>
	一 名詞表解(108) 二 等式的性質(109) 三 解方程的基本运算(110) 四 一元一次方程的解法(114)	
<b>第 七 章</b>	<b>比和比例</b> .....	<b>129</b>
	一 比和比例的性質(129) 二 比和比例的問題(132)	
<b>第 八 章</b>	<b>实数·冪和方根</b> .....	<b>136</b>
	一 名詞表解(136) 二 冪的性質(139) 三 方根的性質(140)	

四 开平方(145)	五 根式的运算(153)	
<b>第九章 近似计算</b> .....		163
一 名词表解(163)	二 近似数的运算(168)	
<b>第十章 二次方程和可以化成二次型的方程</b> .....		179
一 名词表解(179)	二 二次方程的解法(180)	三 有关二次方程的问题(191)
四 可以化成二次型的方程解法(197)		
<b>第十一章 一次函数·直线和二元一次方程组</b> .....		203
一 名词表解(203)	二 一次函数(206)	三 直线(212)
四 二元一次方程组(220)		
<b>第十二章 二次函数·圆锥曲线和二元二次方程组</b> .....		236
一 二次函数(236)	二 圆锥曲线(244)	三 二元二次方程组(262)
<b>第十三章 不等式</b> .....		277
一 名词表解(277)	二 不等式的性质(278)	三 不等式的证明(280)
四 不等式的解法(284)		
<b>附录 研究题答案</b> .....		296

# 第一章 代数式和方程

## 一 用字母表示数

我們以前学习的数学,是最浅近的部分,它主要用数字来表示数,并且这些数只限于整数和分数。現在为了要解决生产技术上的更多、更复杂的計算問題,我們把数的范围扩充,并且用許多字母来代表数,这就是現在要繼續学习的代数。

代数上用字母表示数,有下列的三种效用:

**1. 表示数的共同性質** 所有的数除掉表示的数量不同以外,它們之間的某些性質却是相同的。这些任何数所共同具有的性質,如果用字母把它表示出来,就非常簡明。

例 我們从加法和乘法,可以得到下列的許多式子:

$$(1+2) \times 3 = 1 \times 3 + 2 \times 3;$$

$$(2+3) \times 4 = 2 \times 4 + 3 \times 4;$$

$$(3+4) \times 5 = 3 \times 5 + 4 \times 5;$$

.....

这样的每一个式子,只能表示三个特殊数值之間的性質。如果要把任何三个数之間的共同性質总括起来,應該說:“用某数去乘两个数的和,可以用这个数分别去乘这两个数中的每一个数,再把乘得的两个积相加。”但是現在用了字母,就可以簡明地写成:

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c.$$

代数里规定,除掉数字和数字相乘以外,可以略去每两个因数间的乘号,根据这个规定,把上式写得更简单一些,就是

$$(a+b)c=ac+bc.$$

这个式子所表示的,实际就是一条运算定律——乘法的分配定律。代数里所要用的运算定律,和以前学过的完全一样,它们都可以用字母表示出来。

**2. 表达各种运算法则** 在已知的条件下,可以用字母表示出几个数之间的一定关联,利用它来作为运算的法则。

例 某人每小时可以走7里路,他2小时可以走几里路? 3小时呢? 4小时、5小时、……呢?

如果不用字母,要表示出这个人所走的路程,必须用下列的许多式子:

$$2 \text{ 小时所走的里数} = 7 \times 2;$$

$$3 \text{ 小时所走的里数} = 7 \times 3;$$

$$4 \text{ 小时所走的里数} = 7 \times 4;$$

.....

这样的每一个式子,只能表示一个特殊的计算。如果要把这几个数之间的关联概括地表达出来,应该说:“若干小时内共走的路程,等于每小时所走的路程乘以所走的小时数。”但是用了字母,就可以用简明的式子——公式——来代替这一句较长的语言,就是:

设共走的里数是  $s$ , 每小时所走的里数是  $v$ , 所走的小时数是  $t$ , 那末

$$s = vt.$$

**3. 代表语言来叙出算法** 在代数里用字母表示了数,就可以用式子代替语言,把算法的步骤简明地叙述出来。

例 大、小两个数的和是48,大数是小数的5倍,求这两个数。

我们从图1,用语言逐步叙出本题的算法:

(1) 大数既然是小数的5倍,那末大数就等于5个小数。

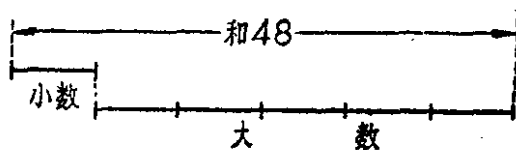


图1.

(2) 和是 48, 就是大数 加上小数等于 48.

(3) 因为大数等于 5 个小数, 所以大数加上小数 等于 5 个小数加上 1 个小数, 就是 5 个 + 1 个 = 6 个小数.

(4) 于是知道 6 个小数等于 48.

(5)  $\therefore$  小数是  $48 \div 6 = 8$ .

(6) 大数是  $8 \times 5 = 40$ .

如果用字母  $x$  表示小数,  $y$  表示大数, 那末上面的解法就可以写成:

(1)  $y = 5x$ .

(2)  $y + x = 48$ .

(3)  $y + x = 5x + x = 6x$ .

(4)  $6x = 48$ .

(5)  $\therefore x = 48 \div 6 = 8$ .

(6)  $y = 5 \times 8 = 40$ .

这样比前面的叙述就简明得多.

## 二 名詞、符号和运算順序

### 代数式

**【意义】** 把表示数的数字和字母用符号(运算号和結合号)連結起来所得的式子, 叫做代数式, 也可以简称做“式”.

**【代数式的值】** 代数式中所含的字母, 分別用它們所表示的数值代入, 依法計算, 所得的結果叫做代数式的值.

例 如  $abc$ ,  $3x + 2y$ ,  $\frac{a}{5}$ ,  $m - (n - p)$  等都是代数式. 又如果  $a = 18$ ,  $b = 5$ , 那末代数式  $a - 3b$  的值是  $18 - 3 \times 5 = 3$ .

**注意一** 单独一个字母或一个数, 例如  $a$ ,  $5$ ,  $\frac{2}{3}$  等, 也可以認作代数式.

**注意二** 代数式里的字母虽然可以表示各种不同的数值, 但是因为除法中的除数等于零是沒有意义的, 所以在代数式  $\frac{b}{a-1}$  中的  $a$  不能取数值 1. 这样, 代数式中的字母所能取的数值, 就是不至于使代数式沒有意义的数值(也就是由

此可以求到代数式的值的),叫做字母的“允许值”。例如  $a-1$  中的  $a$  的允许值是一切数值;  $\frac{b}{a-1}$  中的  $a$  的允许值是除 1 以外的一切数值。

### 两个代数式的关系

**【相等】** 两个代数式的值如果相等,就说这两个代数式相等,用等号把它们连结起来,所成的叫做“等式”。

**【不等】** 两个代数式的值如果不等,就说这两个代数式不等,用不等号把它们连结起来,所成的叫做“不等式”。

**例**  $(a+1)(a-1)=a^2-1$ ,  $6x=48$  等都是等式;  $a^2+b^2>2ab$ ,  $3x<6$  等都是不等式。

### 等式

**【恒等式】** 等式中的字母,如果用任意的数(能使除数成零的除外)代入计算,两边总可以相等,这等式叫做恒等式。

**【方程】** 等式中含有代表未知数的字母,必须用适当的数代这个字母,两边计算出来的结果才能相等,这等式叫做方程。这个适当的数叫做方程的“解”,方程只有一个未知数的,它的解也叫做“根”。求方程的解的手续,叫做“解方程”。

**例**  $(a+1)(a-1)=a^2-1$  是恒等式,  $6x=48$  是方程。  $6x=48$  中的  $x$  必须是 8,两边才能相等,8 是这个方程的解;因为这个方程只有一个未知数,所以这个 8 也叫这个方程的根。

### 因数和系数

**【因数】** 一个代数式是数字和字母的积,那末这个数字和每一个字母都是这个代数式的因数。

**【系数】** 一个代数式是数字和字母的积,那末这个数字所表的因数叫做字母(或几个字母的积)所表的因数的系数。系数常写在字母的前面。

**例** 在代数式  $3ab$  中,  $3$ 、 $a$  和  $b$  都是因数,而  $3$  是  $ab$  的系数。

**注意**  $xy$  可以看作  $1xy$ ,它的系数 1 常略去不写。

## 乘方

【意义】 求相同因数的积的运算,叫做乘方。例如求  $n$  个  $a$  的积,要用乘方来计算,可以写成  $a^n$ 。

【次数】 相同因数的个数,叫做乘方的次数。例如  $a^n$  是  $a$  的  $n$  次乘方,简称  $a$  的  $n$  次方或  $n$  方。二次乘方又叫平方,三次乘方又叫立方。

【乘方运算的三种数】

〔底数〕 上例中的相同因数  $a$ ,叫做底数。

〔指数〕 乘方的次数  $n$ ,叫做指数。

〔幂〕 乘方的结果  $a^n$  叫做幂。 $a^2$  是  $a$  的二次幂, $a^3$  是  $a$  的三次幂,……, $a^n$  是  $a$  的  $n$  次幂①。

## 代数运算

【第一级】 在  $a+b=c$  中,已知  $a$  和  $b$  而求  $c$  是加法,已知  $c$  和  $a$  (或  $b$ ) 而求  $b$  (或  $a$ ) 是减法。

【第二级】 在  $ab=c$  中,已知  $a$  和  $b$  而求  $c$  是乘法,已知  $c$  和  $a$  (或  $b$ ) 而求  $b$  (或  $a$ ) 是除法。

【第三级】 在  $a^b=c$  中,已知  $a$  和  $b$  而求  $c$  是乘方,已知  $c$  和  $b$  而求  $a$  是开方(开方要到第八章里讲)。

## 代数上所用的符号

【1】 加、减两种运算号,括号(就是结合号)、等号和不等号,都和以前学过的相同。

【2】 乘号“ $\times$ ”或“ $\cdot$ ”在数字和数字之间必须用到,别处可以省略。

【3】 除号“ $\div$ ”不常用,一般都用分数表示,例如  $\frac{a}{b}$  表示  $a \div b$ 。

注意 分数线不仅表示相除,还兼有括号的作用。例如  $(a+b) \div (a-b)$  可以写成  $\frac{a+b}{a-b}$ ,两个括号都省去了。

---

① 严格地说, $a^n$  有两种不同的读法:当它表示把  $a$  做  $n$  次的乘方的时候,读作“ $a$  的  $n$  次方”,当它表示乘方的结果的时候,读作“ $a$  的  $n$  次幂”。但是,通常为简便起见,往往混通地读作“ $a$  的  $n$  方”,例如  $a^2$ 、 $a^3$ 、 $a^4$  等是  $a$  的“二方”、“三方”、“四方”等。

运算顺序**【无括号的】**

〔只有同一级运算〕 从左到右依次计算。

〔有两或三级运算〕 先算第三级，再算第二级，最后算第一级。

**【有括号的】**

〔一层〕 先把括号内的数算好，丢掉括号后照上法算。

〔多层〕 先把最里面一层括号内的数计算，然后向外依次逐层计算。

### 三 简单运算

**1. 求代数式的值** 如果知道代数式中各个字母所代替的数值，那末用这些数值代入，依规定的运算顺序，可以算出这个代数式的值。

**例题 1.** 设  $a=7, b=2, c=4, d=3$ ，求下式的值：

$$3a^2b - \frac{b^3}{c} + d.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad 3a^2b - \frac{b^3}{c} + d &= 3 \times 7^2 \times 2 - \frac{2^3}{4} + 3 && \text{(代替)} \\ &= 3 \times 49 \times 2 - \frac{8}{4} + 3 && \text{(先算第三级)} \\ &= 294 - 2 + 3 && \text{(再算第二级)} \\ &= 295. && \text{(后算第一级)} \end{aligned}$$

**例题 2.** 设  $a=20, b=8$ ，求  $(a+b)a-b$  的值。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (a+b)a-b &= (20+8) \times 20 - 8 && \text{(代替)} \\ &= 28 \times 20 - 8 && \text{(括号内先算)} \\ &= 560 - 8 && \text{(再算乘法)} \\ &= 552. && \text{(后算减法)} \end{aligned}$$

**例题 3.** 设  $a=6, b=5, c=2$ ，求下式的值：

$$5\{4a - 2[2b + 2(a-c) - 3(b-c)]\}.$$

解 用已知的数代入后,从最里面的括号起,依次向外逐步计算如下:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 5\{4 \times 6 - 2[2 \times 5 + 2(6 - 2) - 3(5 - 2)]\} \\
 &= 5\{4 \times 6 - 2[2 \times 5 + 2 \times 4 - 3 \times 3]\} \\
 &= 5\{4 \times 6 - 2[10 + 8 - 9]\} \\
 &= 5\{4 \times 6 - 2 \times 9\} \\
 &= 5\{24 - 18\} \\
 &= 5 \times 6 \\
 &= 30.
 \end{aligned}$$

**2. 利用系数的运算** 因为系数所表示的数,就是指字母所表的因数同样许多个相加的个数,所以利用系数可以把含有相同字母的许多代数式相加,也可以把系数不是1的代数式化做系数都是1.

**例題 4.** 化簡  $x + x + y + y + y$ .

解 
$$x + x + y + y + y = 2x + 3y.$$

**例題 5.** 把  $4ab - \frac{3}{5}c$  化做不含 1 以外的系数的式子.

解 
$$\begin{aligned}
 4ab - \frac{3}{5}c &= 4ab - \frac{3c}{5} \\
 &= ab + ab + ab + ab - \frac{c + c + c}{5}.
 \end{aligned}$$

**例題 6.** 化簡  $3x + 5x - 2x$ .

解 
$$\begin{aligned}
 3x + 5x - 2x &= x + x + x + x + x + x + x - x - x \\
 &= x + x + x + x + x + x \\
 &= 6x.
 \end{aligned}$$

**注意一** 这个例题实际就是上面两个例题中的方法的連用,就是先把原式化做不含 1 以外的系数,然后把含有相同字母的代数式化簡.

**注意二** 在上例中,加上一个  $x$  和減去一个  $x$  恰相抵消,所以从 8 个  $x$  的和里減去 2 个  $x$ , 还剩 6 个  $x$ .