

高等数学

立体图册

高等学校教学参考书

高等数学立体图册

刘光旭 李荫国

高等教育出版社

《高等数学立体图册》内容提要

这是一本应用体视投影原理编绘的高等数学图册。当您用本书末所附的体视镜观看书中的彩色图时，眼前就会呈现出突出纸面的空间立体形象，尤如实物模型。这种图具有较强的空间立体感，对于培养空间想像能力，提供了一种较好的手段。

本图册以樊映川等编《高等数学讲义》（1964年第二版）及其配套的《高等数学习题集》（1965年修订本）作为选题的基本依据。以高等数学的比较重要的概念，定理和空间图象中较为典型而又复杂的题目为主，而重点放在空间矢量代数、二次曲面、多元函数微分法和重积分等内容上。每个题目都给出分析表达式，平面图和相应的立体图，使本图册可以配合多种教材使用。

本图册可作为高等工业院校配合高等数学教学的参考书，也可供其他各类院校学习高等数学的师生和自学高等数学的同志参考。

高等学校教学参考书

高等数学立体图册

刘光旭 李荫国

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

天津人民印刷厂印刷

*

开本787×10921/16 印张8.5字数196,000

1982年10月第1版 1983年8月第1次印刷

书号：13010·0814 定价：2.45元

前 言

在学习高等数学的过程中，往往因缺乏对空间形体的想象能力，而感到学习困难。怎样才能加强这种能力的训练和培养，并且使典型空间形式的图象成为自己头脑中的一种常识，确实是一个很值得研究、解决的问题。

体视投影图为我们解决这个问题提供了一个较好的手段。因为体视投影图（通称立体图）有较强的立体感，对于较复杂的空间几何关系，它能够明确、清晰地用立体形象表达出来。读者将会看到，当我们透过体视镜（本书附有一付），按照一定的方法观看本图，眼前就会呈现出突出纸面的空间立体形象，其感受有如观看实物模型一样。因此，本书将不仅可以部分地起到代替几何模型的作用，而且会引起读者对数学的学习兴趣，有利于自学。我们希望读者能从空间几何图形的分析表达式、平面图、立体图三者关系的反复联想琢磨中，得到对空间几何图形想象力的锻炼，进一步加深对抽象概念的理解，并能提高解题的速度。

观看彩色立体图时，要将图册平放，右手持体视镜，左红右兰，视线与图面成 $42^{\circ}\sim 45^{\circ}$ 角，于距离图面约420mm处，两眼同时观看，即可看到突出纸面的浅黄色立体图象（通常调节角度和距离的方法是先看Z轴是否已垂直纸面），如果将图面平行移动，还会看到图象的多种变化，研究这种图形的变化，将会引导我们对问题的深入分析和理解。

本图册中各图的选题，以高等数学中比较重要的概念、定理和空间图象较为典型而又复杂的题目为主，而重点放在空

间矢量代数、二次曲面、多元函数微分法和重积分等内容上。在每个标题下，都给出相应的立体图、分析表达式和平面图（即轴测投影图）。在内容编排上，鉴于目前我国工科院校多以樊映川等编《高等数学讲义》及其配套的《高等数学习题集》（同济大学数学教研室编）（以下分别简称为《教材》和《习题集》）作为学习高等数学的教材或主要参考书。因此，为方便广大读者，本书内容除按《教材》内容顺序编排外，在目录中还标出了各图与《教材》或《习题集》相关内容的页码或题号（《教材》以一九六四年七月第二版、《习题集》以一九六五年修订本为准），以供读者对照查阅。在表现手法上，本书中所有平面图，其画法均遵守有关画法规则。而立体图则不然，为了能够清楚地表现图中各几何元素间的相互关系，多数立体图中的几何体是按“透明体”处理的，少数立体图，如二次曲面的交线等，则有意按“不透明”处理，其目的是为了突出该图的“主题”。两种情况，读者在看图时将容易区别。

在编绘本图的过程中，承蒙天津大学高等数学教研室、北京钢铁学院数学教研室的同志们提出许多宝贵的意见和建议，天津大学张敬如教授也给予了热心的指导和鼓励，在此一并致以衷心地感谢。

由于笔者学识浅薄，水平有限，对本书中的错误和不足之处，切望读者不吝指教。

作者

一九八二年五月 于天津

目 录

(table of contents)		
一、圆锥曲线 (Conic Sections) (F. 上.57)*		
1 椭圆 (Ellipse)	2	
2 双曲线 (Hyperbola)	4	
3 抛物线 (Parabola)	6	
二、空间直角坐标与矢量代数 (Rectangular Coordinates in 3-Space; Vector Algebra)		
4 直角坐标系的八个卦限 (Eight Octants of Rectangular Coordinate System) (F. 上. 103)	8	
5 矢量在轴上的投影 (Projection of Vector on Axis) (F. 上.115)	10	
6 矢量在平面上的投影 (Projection of Vector on Plane)	12	
7 矢量积的分配律 (Distributive Law of Vector Product) (F. 上.129)	14	
8 欧拉角 (Euler's Angles)	16	
三、二次柱面 (Quadric Cylinders)		
9 双曲柱面 (Hyperbolic Cylinder) (F. 上.139)	18	
10 抛物柱面 (Parabolic Cylinder) (F. 上.139)	20	
四、空间曲线、曲面的参数方程 (Parametric Equations of Space Curves and Surfaces)		
11 螺旋线 (Circular Helix) (F. 上.141)	22	
12 正螺面 (Right helicoid)	24	
五、二次曲面 (Quadric Surfaces)		
13 旋转曲面 (Surface of Revolution) (F. 上.165) = (T. 22.97)**	26	

* (F. 上.57) 表示参看樊映川等编《高等数学讲义》上册第57页。

** (T. 22.97) 表示参看同济大学数学教研室编《高等数学学习题集》中习题22.97。

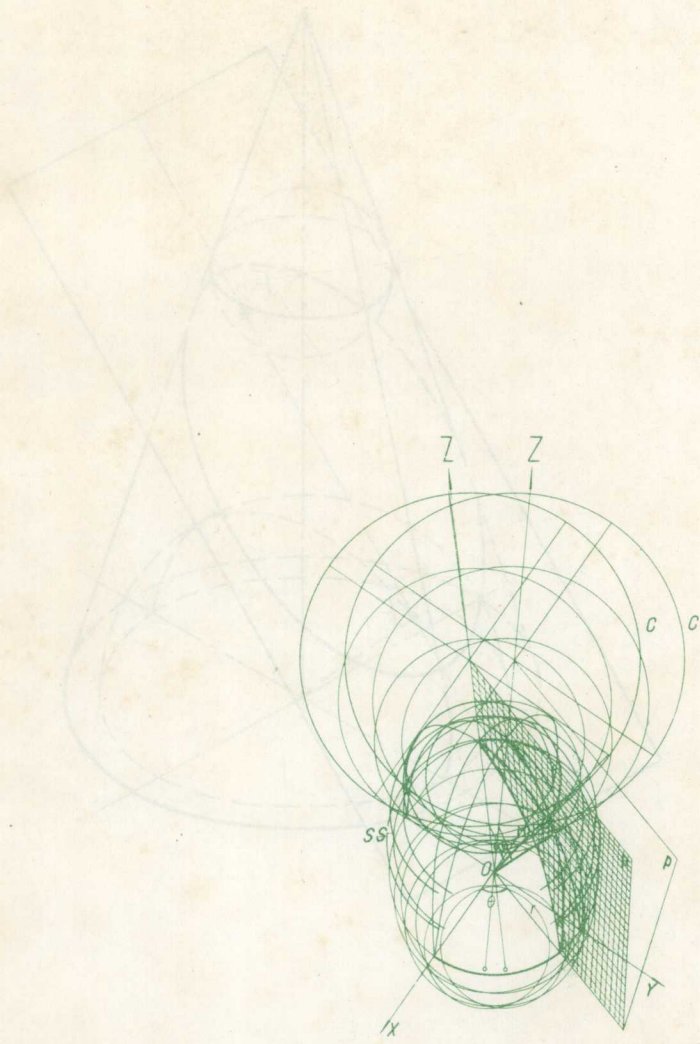
14	椭球面 (Ellipsoid) (F. 上.167)	28
15	单叶双曲面 (Hyperboloid of One Sheet) (F. 上.169)	30
16	单叶双曲面是直纹曲面 (Hyperboloid of One Sheet is a Ruled Surface) (F. 上.169)	32
17	双叶双曲面 (Hyperboloid of Two Sheets) (F. 上.171)	34
18	椭圆抛物面 (Elliptic Paraboloid) (F. 上.173)	36
19	双曲抛物面 (Hyperbolic Paraboloid) (F. 上.174)	38
20	双曲抛物面是直纹曲面 (Hyperbolic Paraboloid is a Ruled Surface)	40
六、多元函数的微分法 (The Derivatives of a Function of Several Variables)		
21	二元函数的极限 (A) (Definition of Limit for Functions of Two Variables) (F. 下.73)	42
22	二元函数的极限 (B) (Definition of Limit for Functions of Two Variables) (F. 下.74)	44
23	二元函数偏导数的几何意义 (Geometrical Representation of Partial Derivative for Functions of Two Variables) (F. 下.78)	46
24	全微分的几何意义 (Geometric Significance of Total Differential) (F. 下.83)	48
25	方向导数 (Directional Derivative) (F. 下.85)	50
26	多元函数的极值 (Extreme Value of Function of Several Variables) (F. 下.103)	52
七、重积分 (Multiple Integrals)		
27	平面 $x=a$, $y=a$, $z=a$, $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 在第一卦限所围区域 (Solid in the First octant Bounded by the Planes $x=a$, $y=a$, $z=a$, and $x+y+z=\frac{3}{2}a$)	54
28	$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+y^2) dy$ 的积分区域 (Integral Region of $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+y^2) dy$)	56
29	$\begin{cases} 2y^2+z^2+4x=4z \\ y^2+3z^2-8x=12 \end{cases}$ (T. 7.35), (F. 上.143)	58

- 30 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 与平面 $x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$ 所围区域
(The Solid Bounded by the Paraboloid of Revolution
 $z = x^2 + y^2 + 1$ and Planes $x = 0, x = 4, y = 0,$ and $y = 4$) (T.22.61) 60
- 31 抛物面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 与平面 $x + y = 4$ 及三个坐标平面所围区域 (The
Solid Bounded by the Paraboloid $z = x^2 + y^2 + 1$ and the Planes
 $x + y = 4, x = 0, y = 0,$ and $z = 0$) (T. 9.13(g)) 也可供T.9.13(c),
T.22.62参考) 62
- 32 抛物柱面 $z = 4 - x^2$, 平面 $2x + y = 4$ 与三个坐标平面所围区域 (The
Solid Bounded by the Parabolic Cylinder $z = 4 - x^2$, the
Coordinate Planes, and Plane $2x + y = 4$) (T. 9.13(e),
T.22.63) 64
- 33 抛物柱面 $2y^2 = x$, 平面 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ 与平面 $z = 0$ 所围区域 (The
Solid Bounded by the Parabolic Cylinder $2y^2 = x$ and the
Planes $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ and $z = 0$) (T.22.64) 66
- 34 圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与圆柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围区域 (The Solid
Bounded by the Cylinders $x^2 + y^2 = R^2$ and $x^2 + z^2 = R^2$) (T.9.13(j);
T.22.65; T.22.93) 68
- 35 抛物柱面 $y = \sqrt{x}$ 与平面 $y = 0, z = 0, x + z = \frac{\pi}{2}$ 所围区域 (The Solid
Bounded by the Parabolic Cylinder $y = \sqrt{x}$ and the Planes
 $y = 0, z = 0,$ and $x + z = \frac{\pi}{2}$) (T. 22.70) 70
- 36 双曲抛物面 $z = xy$ 与平面 $x + y = 1, z = 0$ 所围区域 (The Solid
Bounded by the Hyperbolic Paraboloid $z = xy$ and the Planes
 $x + y = 1$ and $z = 0$) (T. 22.71) 72
- 37 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 抛物柱面 $y = x^2$ 与平面 $y = 1, z = 0$ 所围区域
(The Solid Bounded by the Paraboloid of Revolution $z = x^2 + y^2$,
the Parabolic Cylinder $y = x^2$, and Planes $y = 1, z = 0$)
(T. 22.72) 74
- 38 双曲抛物面 $cz = xy (c > 0)$, 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与平面 $z = 0$ 围在第一卦
限的区域 (The Solid in the First octant Bounded by the
Hyperbolic Paraboloid $cz = xy (c > 0)$, the Elliptic Cylinder

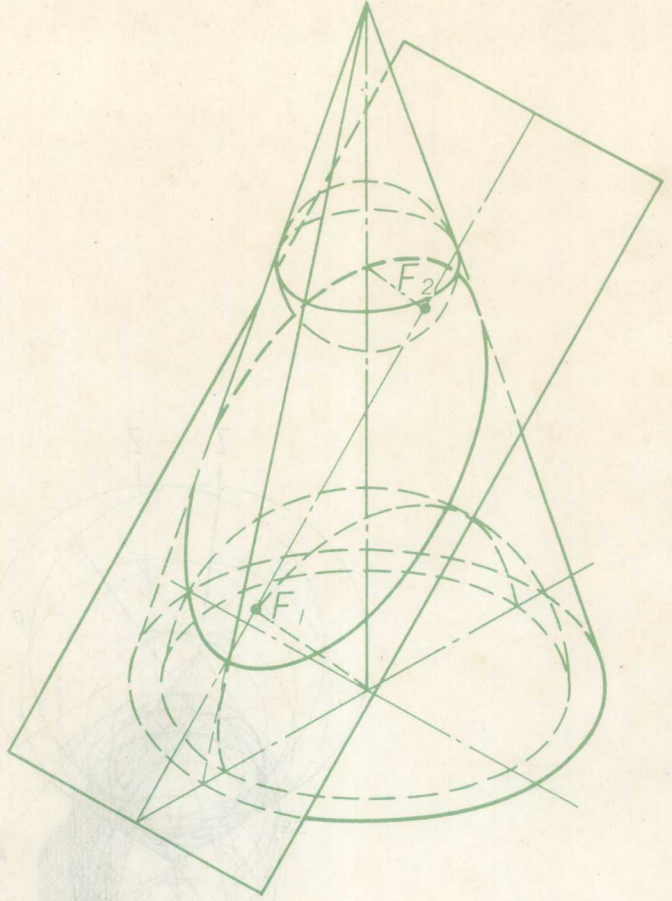
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, and the Plane $z = 0$) (T. 22.73)	76
39	椭圆抛物面 $3x^2 + y^2 = z$ 与抛物柱面 $z = 1 - x^2$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Elliptic Paraboloid $3x^2 + y^2 = z$ and the Parabolic Cylinder $z = 1 - x^2$) (T.22.74)	78
40	球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 围在第一卦限的区域 (The Solid in the First Octant Bounded by the Sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Planes $x = 0$, $y = 0$, and $z = 0$) (T. 22.77)	80
41	平面 $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Planes $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, and $x + y + z = 6$) (T.22.83)	82
42	锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与抛物柱面 $z^2 = 2x$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ and the Parabolic Cylinder $z^2 = 2x$) (T. 22.90)	83
43	锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ and the Cylinder $x^2 + y^2 = 2x$) (T.23.84)	84
43	双曲抛物面 $z = \frac{xy}{a}$, 圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 与平面 $z = 0$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Hyperbolic Paraboloid $z = \frac{xy}{a}$, the Cylinder $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$), and the Plane $z = 0$) (T.9.13(i) T.22.85)	86
44	圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$, 旋转抛物面 $az = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 0$ 所围区域, 其中 $a > 0$ (The Solid Bounded by the Cylinder $x^2 + y^2 = 2ax$, the Paraboloid of Revolution $az = x^2 + y^2$ ($a > 0$), and the Plane $z = 0$) (T.22.87)	88
45	旋转抛物面 $x^2 + y^2 = az$ 与圆锥面 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$) 所围区域 (The Solid Bounded by the Paraboloid of Revolution $x^2 + y^2 = az$ and the Circular Cone $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$)) (T.22.88)	90
46	半球面 $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 所围立体之表面积, 其中 $a > 0$ (Surface Area of the Solid Bounded by The	

	Semi-Sphere $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ and the Paraboloid of Revolution $x^2 + y^2 = 2az, a > 0$) (T.22.92)	92
47	球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and the Cylinder $x^2 + y^2 = ax, a > 0$) (T.22.66; T.22.95)	94
48	抛物柱面 $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ 与平面 $z = 0, z + x = 6$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Parabolic Cylinders $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ and the Planes $z = 0, z + x = 6$) (T.9.13(d); T.22.119)	96
49	双纽线柱面 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, 旋转抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 0$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Lemniscate Cylinder $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, the Paraboloid of Revolution $2z = x^2 + y^2$, and the Plane $z = 0$)	98
50	旋转抛物面 $x = \sqrt{y - z^2}$, 抛物柱面 $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ 与平面 $y = 1$ 所围区域 (The Solid Bounded by the Paraboloid of Revolution $x = \sqrt{y - z^2}$, the Parabolic Cylinder $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$, and the Plane $y = 1$)	100
51	柱面坐标 (Cylindrical Coordinates) (F.下.131)	102
52	柱面坐标下的体积元素 (Cylindrical Element of Volume) (F.下.132)	104
53	球面坐标 (Spherical Coordinates) (F.下.133)	106
54	球面坐标下的体积元素 (Spherical Element of Volume) (F.下.134)	108
55	曲面的面积 (Area of Surface) (F.下.135)	110
八、其它 (Miscellaneous)		
56	球极射影 (Spherical Polar Projection)	112
57	单叶旋转双曲面的平行曲面作为圆柱族的内包络面 (The Parallel Surface of the Rotating Hyperboloid of One Sheet As the Interior Envelope of the Family of Cylinders)	114
58	环面 (Torus)	116
59	环面的三角剖分 (A Triangulation of Torus)	118

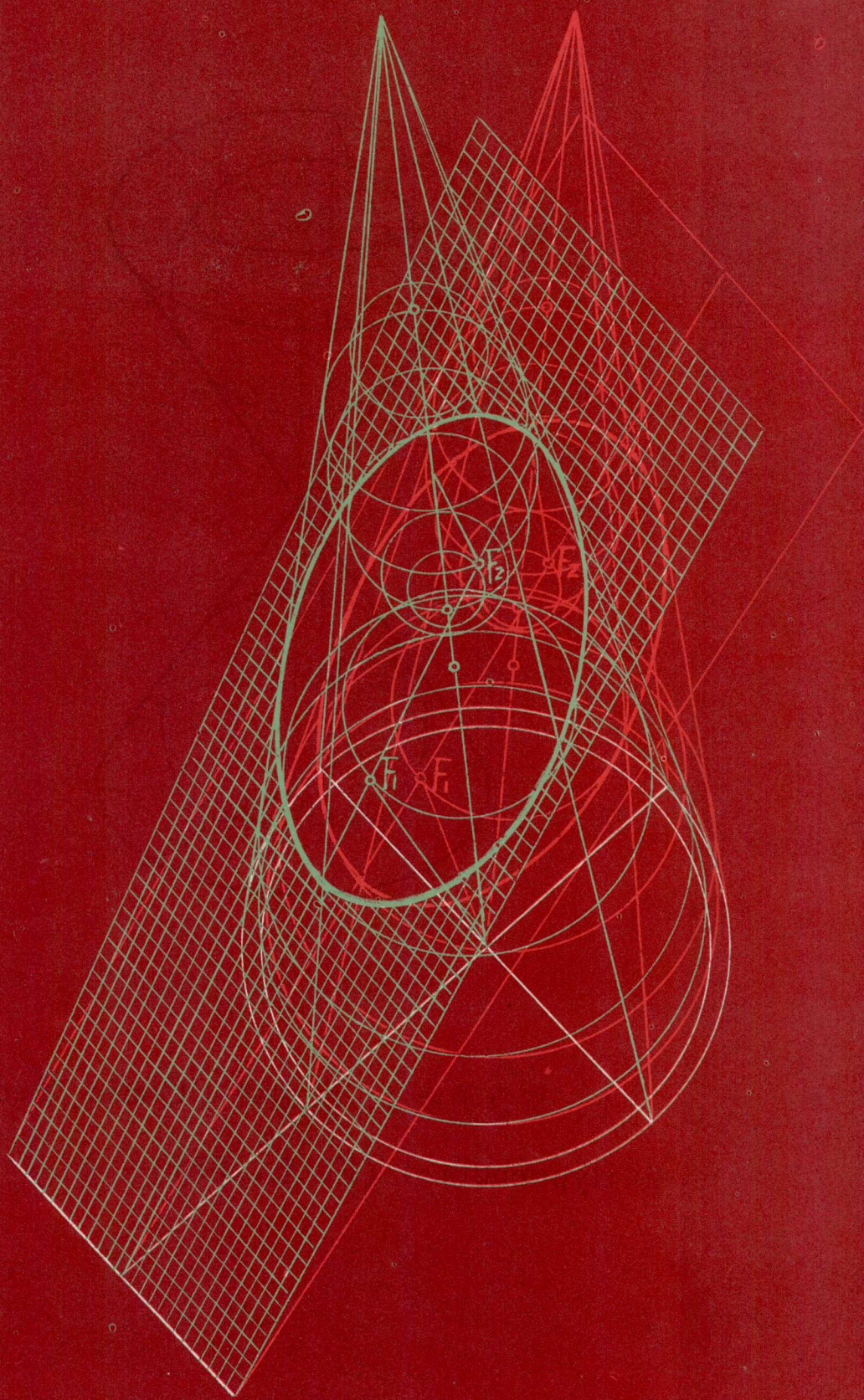
60	环面与圆柱面相交 (The Intersection of a Torus and a Cylinder)	120
61	二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 的图形 (The Graph of Function of Two Variables)	122
62	猴鞍面 (Monkey Saddle) $z = x^3 - 3xy^2$	124

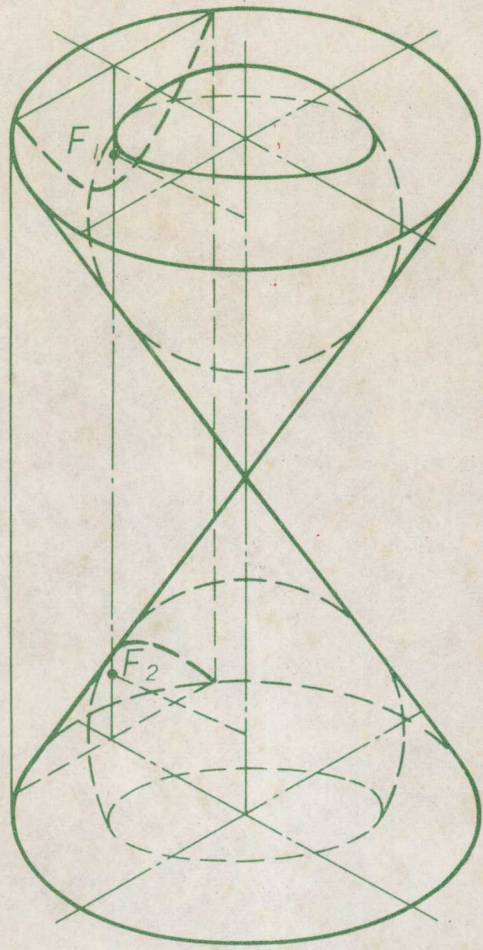


1. 圖說球以圓錐圖 (Conic Section I)
Ellipse) (F. L. 37)

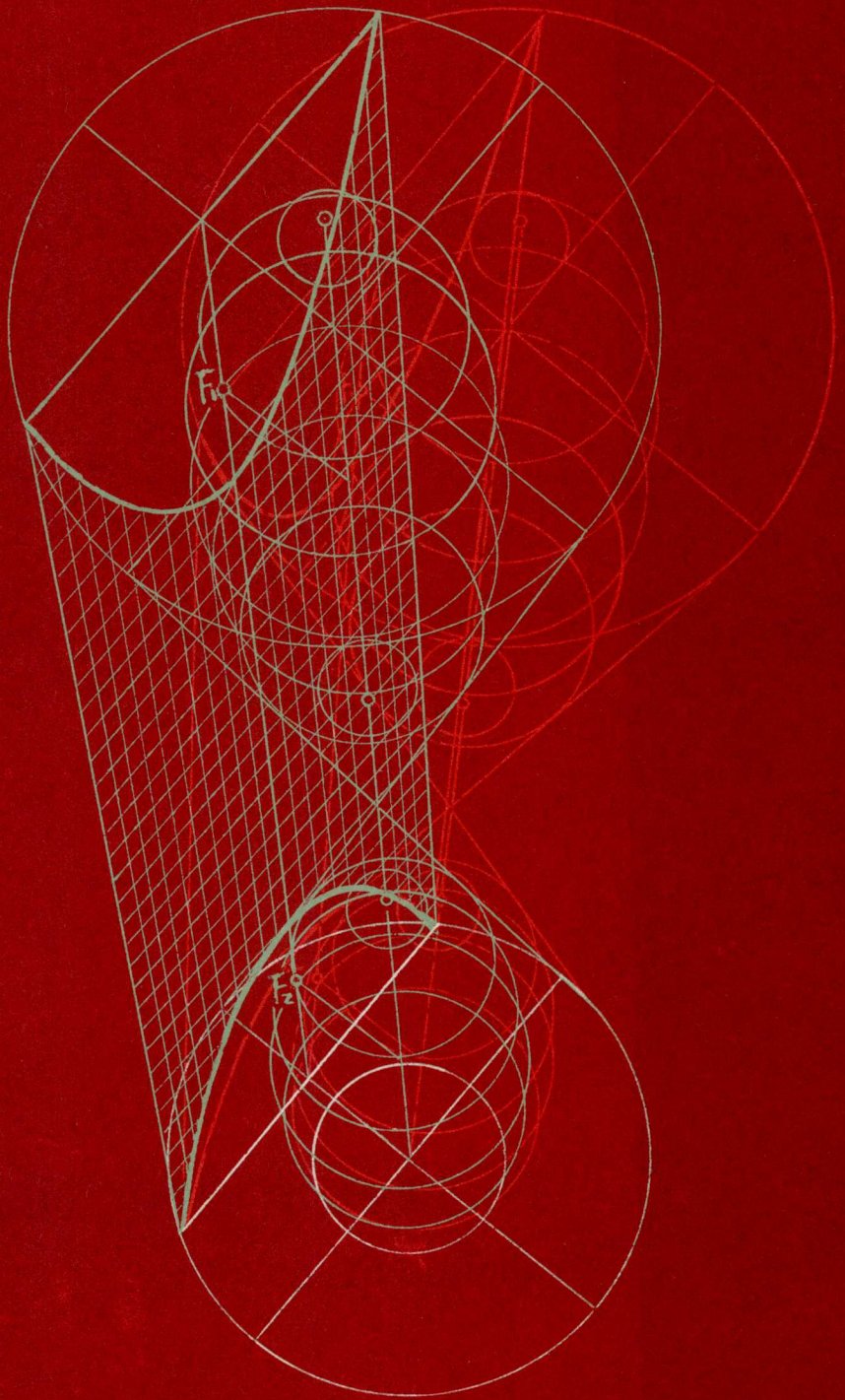


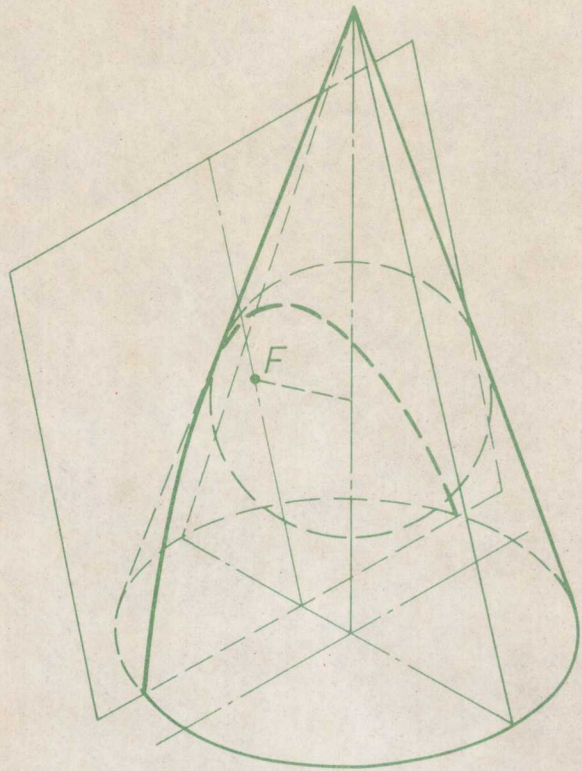
1. 圆锥曲线 1: 椭圆 (Conic Section 1: Ellipse) (F.上.57)。





2. 圆锥曲线 2: 双曲线 (Conic Section
2: Hyperbola) (F. 上. 57)。





3. 圆锥曲线 3: 抛物线 (Conic Section 3: Parabola)(F. 上. 57)。