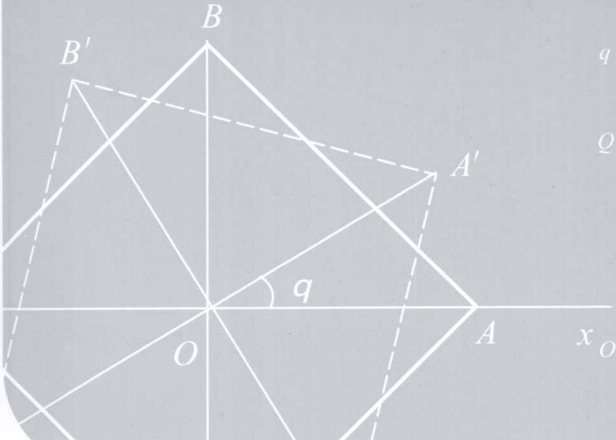
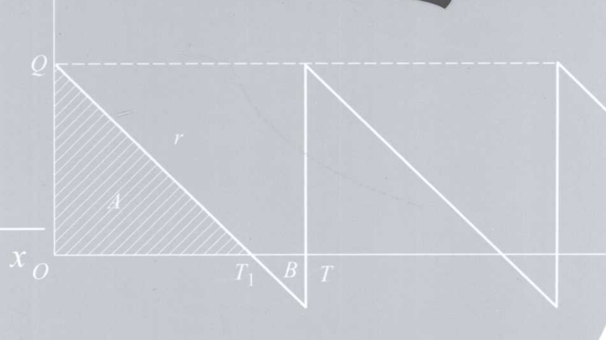
SHUXUE JIANMO JICHU ANLI

数学建模基础案例

杜建卫　王若鹏　主编　　　姜启源　审





化学工业出版社

数学建模基础案例

杜建卫　王若鹏　主编
姜启源　审

化学工业出版社
·北京·

数学建模这门课程在数学及其在各个领域的应用之间架起了一座桥梁。本书介绍了整个建模过程的原理，以数学建模案例为实体，以激发大学生学习数学积极性和主动性为目的，结合高等数学、线性代数、概率论与数理统计的教学实践，通过大量案例，介绍应用数学解决实际问题的基本思路和方法。

本书适合作为高等院校相关专业的数学建模教材和参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模基础案例/杜建卫，王若鹏主编. —北京：化学工业出版社，2009.7
ISBN 978-7-122-05475-3

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①杜…②王… Ⅲ. 数学模型-案例-汇编 Ⅳ. O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 082226 号

责任编辑：曾照华　　装帧设计：王晓宇
责任校对：战河红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：三河市延风印装厂
720mm×1000mm　1/16　印张 8¾　字数 144 千字　2009 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：23.00 元　

前　言

我国高等教育已进入大众化教育阶段，部分地区如北京、上海等地已逐步进入普及化教育阶段。面对高等教育的新形势，高等学校的数学教育应作如何适应性调整，从教学理念、教学基本要求到教学内容、教学方法，应如何改进，是高校数学教育工作者在教学实践中面临的重要任务。

在高等教育的绝大部分专业中，数学是不可或缺的课程。在大学生已经历的小学、中学基础教育阶段，数学是自始至终贯穿其内的课程。然而，大部分的学生对于数学的学习，仅仅停留在以高考应试为目的的初级阶段，这样到了大学学习数学的动力难以持久，而且学习数学的方法，学生也未尽掌握。因此，到了大学进入自主学习阶段，不少学生数学成绩下滑的局面屡屡出现。给学生的大学数学学习继续注入新的动力、给大学生的数学学习以及时必要的指导，不仅是摆在大学数学教育工作者面前义不容辞的责任，也是在教学过程中可以起到事半功倍作用的一项基础工作。给大学生的数学学习注入新的动力，应从让学生进一步了解数学的特点与功能为先导，并在引导学生学习数学的过程中，逐步使学生领略数学的意义和魅力，逐步掌握学习数学的思路和方法。本书正是针对初入高等学校学习的大学生所面对的多门大学数学课程的学习，通过介绍数学的特点和功能，以简单的数学模型为导引，给学生以指导性的意见和建议。本书的目的有三：第一，启发学生明确大学数学学习的目的；第二，指导大学数学的学习方法；第三，结合大学三门基础数学课程——高等数学、线性代数、概率论与数理统计的教学实践，通过大量案例，介绍应用数学解决实际问题的基本思路和方法，从而引发学生进一步学习数学的动力和兴趣。

事实上，教师在其教学过程中，都不同程度地对学生进行过本门课程学习目的和方法的教育，这种渗透到教学环节中的引导仍是不可缺少的。专门写一本以数学建模案例为实体、旨在激发大学生学习数学积极性和主动性为目的的学习指导书，是我们将这种关于学习目的及方法的教育规范化、模式化的一种尝试，也是我们在新形势下，坚持“以学生为主体，以教师为主导”教学理念的一种改革实践。本书不同于一般的数学建模入门教材，它紧紧依附高校三门基础数学课程的教学，紧紧扣住引发学生学习数学的动力与激情这一出发点，并作为一种辅助教材来编写，是在查阅大量文献的基础上

形成的。这样在不增加学时的前提下，可以实践我们旨在更新教学理念的改革尝试，充分发挥本书的作用。

参与本书编写的教师有邢铁麟、王若鹏、章联生、吴国民、杜建卫、师钦贤、阎欣华、刘新红等。吴春霞老师审阅了概率部分。感谢所有老师为此书付出的努力。清华大学姜启源教授全篇审阅了本书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于水平有限，书中难免有不足之处，敬请批评指正，以便我们修订。

编者

2009 年 5 月

目　录

1　数学与大学生的素质 …… 1
1.1　数学修养 …… 1
1.1.1　素质与素质教育 …… 1
1.1.2　数学与数学修养 …… 2
1.1.3　关于大学数学的教与学 …… 3
1.2　数学的功能 …… 4
1.2.1　数学的益智功能 …… 4
1.2.2　数学的思维功能 …… 5
1.2.3　数学的教育功能 …… 6
1.2.4　数学的科学功能 …… 8
1.2.5　数学的社会功能 …… 10
参考文献 …… 11
2　高等数学建模案例 …… 12
2.1　一元函数微积分 …… 12
案例 1　反复学习及效率 …… 12
案例 2　旅游方案的最优选择 …… 13
案例 3　星级宾馆的定价 …… 14
案例 4　高速问题 …… 15
案例 5　最短路径问题 …… 16
案例 6　网球比赛的场次 …… 18
案例 7　硬币游戏中的数学对称 …… 18
案例 8　椅子能在不同地面放稳吗? …… 19
2.2　多元函数微积分 …… 20
案例 1　竞争性产品生产中的利润最大化 …… 21
案例 2　石油转运公司 …… 22
案例 3　航天飞机的水箱 …… 24
案例 4　绿地喷浇设施的节水构想 …… 25
案例 5　平均利润 …… 26
案例 6　允许缺货的存贮模型 …… 27

案例 7　血管分支 …… 28
案例 8　消费者的选择 …… 31
案例 9　价格和收入变化对需求的影响 …… 34
案例 10　经济增长模型 …… 37
案例 11　城市人口 …… 39
2.3　微分方程 …… 40
案例 1　发射登月体的模型 …… 40
案例 2　人口数量增长的预测模型 …… 42
案例 3　放射性废物处理的模型 …… 48
案例 4　战争胜负的数学模型 …… 50
案例 5　名画伪造案的侦破问题 …… 54
案例 6　“饮酒驾车”问题 …… 56
案例 7　长沙马王堆一号墓墓葬的年代问题 …… 57
案例 8　商品价格如何随着供求关系变化 …… 59
参考文献 …… 60
3　线性代数建模案例 …… 61
3.1　行列式与矩阵 …… 61
案例 1　过定点的多项式方程的行列式 …… 61
案例 2　土地用途变更模型 …… 62
案例 3　文献检索模型 …… 63
案例 4　运动会成绩记录模型 …… 64
案例 5　不同城市之间的交通模型 …… 67
案例 6　循环比赛名次模型 …… 68
案例 7　一种矩阵密码问题 …… 69
案例 8　城市出租汽车相互流动后的数量稳态分析 …… 70
案例 9　动物数量的按年龄段预测问题 …… 71
3.2　线性方程组 …… 72
案例 1　卫星定位问题 …… 73
案例 2　化学方程式的平衡问题 …… 74
案例 3　工资问题 …… 75
案例 4　交通流量问题 …… 77
案例 5　最佳食谱（不定方程组的非负解） …… 78
案例 6　点兵问题（不定方程组的整数解） …… 80
案例 7　投入产出模型 …… 81

案例 8　选课策略（线性规划问题） …………………………… 82
案例 9　调整气象站观测问题 ………………………………… 84
案例 10　调味品配制问题 ……………………………………… 85
3.3　特征值与特征向量 ……………………………………………… 87
案例 1　污染与工业发展关系问题 …………………………… 87
案例 2　快乐的假期旅游 ……………………………………… 89
案例 3　受教育程度的依赖性 ………………………………… 93
案例 4　捕食者-食饵离散动力系统 ………………………… 97
案例 5　小行星的轨道问题 …………………………………… 98
案例 6　电路中电压的确定 …………………………………… 99
参考文献 ……………………………………………………………… 100
4　概率论与数理统计部分建模 ……………………………… 102
4.1　概率基础模型 …………………………………………………… 102
案例 1　特异功能 ……………………………………………… 102
案例 2　有趣的蒙特莫特问题 ………………………………… 103
案例 3　人口问题 ……………………………………………… 104
案例 4　传染病的感染 ………………………………………… 106
案例 5　考试成绩的标准分 …………………………………… 108
案例 6　这样找庄家公平吗 …………………………………… 109
案例 7　投资决策 ……………………………………………… 111
案例 8　报童的诀窍 …………………………………………… 112
案例 9　保险问题 ……………………………………………… 114
案例 10　电瓶的寿命 ………………………………………… 115
案例 11　电话外线总数的设定 ……………………………… 116
4.2　统计基础模型 …………………………………………………… 117
案例 1　大学生的平均每月生活费 …………………………… 117
案例 2　捕鱼问题 ……………………………………………… 118
案例 3　吸烟对血压的影响 …………………………………… 120
案例 4　刀具寿命的“正态拟合” …………………………… 121
案例 5　身高与体重 …………………………………………… 123
案例 6　论钓鱼问题 …………………………………………… 124
案例 7　投诉问题 ……………………………………………… 127
参考文献 ……………………………………………………………… 128

1 数学与大学生的素质

本章的主要目的是诠释数学教育，特别是大学数学教育在培养和造就合格的大学生中的功能与作用。

1.1 数学修养

1.1.1 素质与素质教育

人的素质，是人在其先天生理条件的基础上，经过后天的家庭、社会的影响及所受的教育，由知识的内化与升华，逐渐形成的相对稳定的心理品质。

从素质的内涵不难看出：人的素质并非与生俱来，它固然与人的肌体特别是大脑的先天条件有关，但主要是后天形成的。在后天诸因素中，包括家庭的影响、周围环境的影响、社会的影响以及接受系统的基础教育与专业教育，后者又是重要的因素；素质并不等同于知识本身，它是知识的内化与升华以后所形成的人的心理品质，它在人的一生中，是相对稳定、并且长期发挥作用的。所以人们常说：素质是做人的底蕴、做事的基础。

大学生的素质，按通常的说法应包括思想道德素质、文化素质、业务或专业素质、身体素质和心理素质。对于培养高素质专门人才的高等教育来说，在以上诸方面使受教育者得到高水平的全面发展，是教育的根本任务，同时也是每一个受教育者的一生追求。

如上所述，人的素质的形成有一个教化和接受教化的过程。在大学教育阶段，特别强调受教育者为了自己成才，要有强烈的接受教化的愿望，要以较高的标准、较主动的态度和较高的效率，积极为提高自身的综合素质而不懈地努力。

素质教育的过程，应是人的一生从小到大的终身教育过程。大学阶段，是人从向社会索取到服务于社会的转型阶段。这是青年人的人生观、世界观和价值观形成的最重要时期，同时也是人的精力最充沛、吸纳知识能力最强、对外来事物最为敏感的关键时期。因此，大学阶段对培养人的素质将起到非常重要的作用。

1.1.2 数学与数学修养

回顾人们学习数学的过程，大抵从孩提时代就开始了。首先是父母在教孩子1,2,3,4,5,…识数，然后是幼儿园两门主课之一的算术课教学，这是数学教育的启蒙阶段；接下来是在小学、中学的基础教育阶段和大学的专业教育阶段的循序渐进系统地学习数学。为什么数学，也只有数学的学习要贯穿到人的一生教育这么长的过程呢？这主要是因为数学不仅是一种不可或缺的科学工具，而且它在开启人的智力、形成人的科学的思维方式、建立人有效地观察、理解、分析和解决问题的正确方法等方面，将会起到重要的、难以替代的作用。循序渐进地接受系统的数学教育，使人所形成的稳定心理品格——数学修养，或叫数学素质，对于高素质专门人才是必不可少的。从某种意义上讲，数学修养在高素质专门人才的综合素质中占有极其重要的地位。无怪乎诺贝尔物理奖的首位得主、著名德国物理学家伦琴（1845～1923年）在回答“科学家需要什么样的素质?”这个问题时，意味深长地说:“第一是数学，第二是数学，第三还是数学。”

恩格斯在其巨著《自然辩证法》中指出：“数学是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学。”近代数学告诉人们，只要是定义了某种运算的集合，皆是数学研究的领域。随着人类社会的进步、科学的发展和经济的腾飞，各门科学技术愈加数量化、数学愈加社会化。这不仅使得数学的研究领域进一步拓展，同时也使得数学的思维方法无孔不入地渗透到社会生活的各个领域。即使是恩格斯在《自然辩证法》中所说的“数学在生物学中的应用几乎为零”，如今也与时俱进地产生了方兴未艾的生物数学。当今，数学已广泛应用于理、工、农、林、医学、生物、军事、国防、经济、管理以及人文社科的各个领域。

美国国家研究委员会分别于1984年、1989年和1990年连续提出振兴美国数学教育的计划。在这一计划的综合报告中指出：“对所有学生进行优质的数学教育，是兴旺发达的经济所必需的。”在20世纪末，世界上掀起了一个数学教育的新浪潮。我国教育部于1998年10月在北京香山召开专门会议，研讨数学教育在大学教育中的作用。此次会议纪要中明确指出：“数学是学生掌握数学工具的主要课程，是学生培养理性思维的主要载体，是学生接受美的熏陶的一种途径。”学习数学，不仅仅只是在于学到了数学知识、掌握了一门科学的工具并准备去应用它，更主要是在于通过领略数学独有的严密逻辑思维体系，逐步掌握数学的思维方法，并会应用到其它领域。这种数学修养的提高，从某种意义上讲，比所学到的数学内容本身更重要。学到的数学理论和方法，仅能用于一时一事，而数学素质的提高将会终生受用。

正如爱因斯坦（1879～1955年）所说：“世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个体系如此精密地一步一步推进，以致它的每一个命题都是不容置疑的——推理的这种可赞叹的胜利，使人们获得了取得以后成就所必需的信心。”这正是数学将会发生超乎数学以外的重要作用之所在。

1.1.3 关于大学数学的教与学

大学教育，不仅作为专业教育在教学的内容、层次和方法上与作为基础教育的中小学教育有着很大的区别，而且从教育对象的显著变化上看，也存在着很大区别。大学生的重要特点，在于他们有着越来越主动的学习积极性。随着他们思想的日渐成熟，随着他们走向社会的日渐迫近，随着来自周围大量信息量的刺激，随着社会对于人才需求竞争的日益激烈，当代大学生越来越清楚，今日的学习与不久的将来参与社会激烈竞争之间的密切关系。因此，教育者首先要激发和调动大学生的这一积极性和主动性。而每个大学生也应该并且完全能够以大学的学习为载体，努力在提高自身的素质上狠下工夫，使个人的知识、能力和素质有较为全面的提高。

关于培养自身的数学素质，应注意从以下几方面努力。

第一，在学习高等数学以及其它数学系列课程的基本理论和方法的过程中，深入体会和学习数学严密的逻辑思维体系和高度抽象的思维方法，从中逐渐领悟科学的思维方式及数学严密思辨系统的真谛，逐步达到“祛其浮气，练其精心”的境界。

第二，在学习、解决每一个数学问题的过程中，体会、总结人们观察、分析、论证和解决问题的一般思路与途径，以达到“资其定法，发其巧思”之目的，并且在解决问题的过程中，逐步增强自身克服困难的勇气和信心，锻炼良好的心理品质。

第三，通过学习数学的基本理论和方法，体会和领悟数学中常用思维模式及其作用，并结合数学史上的发明创造，初步掌握创造性思维的常用方法，为逐步培养自身的创新能力打下必要的基础。

第四，深入体味和领略数学的文化性，体会数学的深刻哲理以及哲学诸范畴在数学中的生动体现。通过学习数学来提高自身的数学修养、文化品位和审美意识，以达到从总体上提高自身综合素质的目的，使学习数学“不止增才，亦德基也”。

第五，在学习数学的整个过程中，在教师的指导下努力学会读书、自学这一使人终生受益的学习方法，真正实现“能精此书者，无一事不可精；好

学此书者，无一事不可学”的先辈预言。

当然，不能脱离学习数学这一载体侈谈提高数学修养。很难设想，连数学的基本理论都搞不清楚、连数学的基本方法都没有掌握的人，能有较高的数学修养。让我们在教与学的过程中，在传承数学文化的同时，共同为提高自身的数学修养和综合素质而努力。

1.2 数学的功能

了解数学的功能，对于全面地认识数学、建立科学的数学观，对于了解数学在培养人的综合素质中的作用，对于进一步提高学习数学的积极性，都是不无裨益的。

1.2.1 数学的益智功能

人类从结绳计数的远古时代开始，随着社会生产力和人智力的发展，数学活动逐渐进入人类生活的各个领域。与此同时，人类独有的数学思维方式也逐步形成，这是人类思维王国的宝贵精髓。随着人类的进化和人类对于数学认识的深化以及人类对于知识的一代一代的传承，人类对于数字认识的能力，几乎成为了人类的遗传基因，这是任何其它动物不可企及的。因此，一个发育正常的幼儿稍加教育便可以识数，并逐步步入数学王国。人类的智力随着数学的发展得到进一步的开发，数学科学也在人类传承过程中得以发展。这就决定了人们循序渐进学习数学的过程，正是开启和发展人类智力的过程。这正是人们从小学、中学到大学乃至人的一生，可以由浅入深领悟数学的道理。尽管人们并不企望自己的孩子都成为数学家，但他们都毫无例外地自觉承担起对子女数学启蒙的责任，其原因就在于数学的益智功能。

古今中外的许多仁人志士、名人贤达都以数学作为他们并非主业的爱好，这也正是出于他们对于数学益智功能的深刻理解。马克思有他传世的著名《数学手稿》；恩格斯在其《自然辩证法》和《反杜林论》中对数学的精辟见解常常被人称道；列宁在其《唯物主义与经验批判主义》第五章中有对微分方程哲学价值的独特见解；在鲁迅博物馆中赫然陈列着鲁迅本人用工整毛笔小楷所做的几何习题；在战场里指挥若定的一代枭雄拿破仑，在紧张的战事之余，以做数学题为趣，并在战壕里发现并证明了关于“拿破仑（内、外）三角形”的著名定理。这些人正是以数学作为开启自己智力的手段。有报道说，当代英国所有持执照的律师，必须接受系统严格的高等数学教育，以培养其缜密的逻辑推理能力、形成其坚定不移而又客观公正的心理品格。

无独有偶，著名的培养高级军事将领的美国西点军校，设置了许多高深的数学课程，以使学生在日后将其思维的特殊活力与快速的反应能力结合起来，能在复杂多变的军事行动中，将自己精确、严密的分析与迅速、敏锐的判断发挥到极致。

我国上海有一名幼儿教育工作者，在幼儿教育中利用不同颜色的几何图形，如正方形、三角形、圆形进行教学。她先让孩子们找出其中的圆形，然后让孩子们找出其中的红色图形，最后让孩子们找出其中的红色圆形。她不仅完成了对孩子识别几何形状、辨别颜色的教育，而且还成功地对孩子进行了集合中交集的启蒙教育，这是一般的幼儿教师所不及的。原来，她是一位1962年毕业于复旦大学数学系出色的幼教工作者。

1.2.2 数学的思维功能

严密的逻辑推理是数学的重要特点之一。著名的社会活动家加里宁说："数学是锻炼思维的体操。"如做好每一道几何证明题的过程：从该题的已知条件出发，利用与该题相关联的定义、公理和定理，在分析、判断的基础上，逐步向所要得到的结论层层推进，直到用缜密的逻辑推理得出结果。每解决一道数学问题，使人们不仅得到一次成功的喜悦，而且得到一次数学思维方式的锻炼。这种一次次并且逐步由浅入深的锻炼，逐渐引起了所学知识与方法在人们头脑的内化，形成了人们相对稳定的一种思维模式。这就逐渐形成了严谨而富于逻辑的数学修养的升华。这正是数学思维功能之所在。

恩格斯在《自然辩证法》中指出："思维是宇宙中物质运动基本形式之一，是地球上最美丽的花朵。"思维是人独有的高级心理过程，是一种十分复杂的心理现象。它是人类认识世界、改造世界的主观能源。数学思维，一方面，它表现为人们认识数学以及将数学用于其它领域过程中的辩证思维；另一方面，它又有着其自身独有的显著特点——其严密的推理仅仅从其自身的定义、公理、定理出发，而绝不依赖别的什么。这是任何其它学科都难以比拟的。所以，爱因斯坦说："只有数学中的推理才是无懈可击的。"请看以下两个例子。

例1 如果命题"若A，则B。"与命题"若B，则C。"同时成立，则命题"若A，则C。"一定成立。

例2 命题"若A，则B。"成立，当且仅当命题"非B，则非A。"成立。

以上两例不仅说明数学中的推理无懈可击，而且还可以看出，数学中的

推理是以数学特有的语言形式来描述的。学习和掌握数学的形式化语言系统是学好数学的前提与基础。

1.2.3 数学的教育功能

大学教育，要使每个受教育者在德育、智育、美育和体育诸方面都得到全面的发展。数学教育在这些方面都有所作为，当然，数学在体育方面的作用主要体现在人的心理素质教育上。

(1) 数学有利于人的科学世界观的形成

德国数学家克莱因（1849～1925 年）说："在最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞和驱使人类的思维得以运用到最完善的程度，也正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答有关人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻和最完美的内涵。"数学这种理性精神为人类提供了科学地观察、了解、分析和认识整个世界、整个宇宙的基本观点和方法。数学中大量存在的哲学中辩证统一世界观的成功范例，如变量与常量、否定与肯定、偶然与必然、抽象与形象、无限与有限、未知与已知等，都使人们无时不受到极为生动的辩证唯物主义世界观和方法论的教育。

(2) 数学有利于培养人严谨的科学态度

在数学题的解题过程中培养了人们一切从尊重事实出发（从已知条件出发），运用已有的科学论断（应用相关的定义、公理和定理），经过认真地调查研究（通过分析找出解决问题的途径），进行合乎逻辑的判断（缜密的论证推理），最终使问题得以解决（得出结论）。这种解决问题的一般途径与思路，是人们在解出每一道数学题的过程中，逐步规范人们的思维方式后升华而形成的。这种严谨科学态度的形成也正是数学的魅力所在。

(3) 数学有利于人良好心理素质的培养

数学赋予人以理性的精神、严谨的态度和科学的方法。解决数学问题，有一个逐步由必然王国走向自由王国的历程。也正是在走向自由王国的过程中，人们会感到一种难以言表的喜悦。这是一种经过了一步一步的努力、战胜了困难以后的成功喜悦。这无疑对于人们培养良好的心理素质大有益处。在遇到的困难面前，不会畏缩不前、束手无策，而会以认真的分析、缜密的思考、成功的判断和层层的化解，绕过暗礁驶向成功的彼岸。这种克服困难的勇气和信心的增强，正是爱因斯坦所说的"获得了取得以后成就所必需的信心"。

(4) 数学是人们不可或缺的科学工具

数学的另一特点是它的应用广泛性。随着科学的飞速发展，数学已成为自然科学、社会科学中越来越广泛众多学科从理论到应用不可缺少的科学工具，在这里仅举一例。

银行存款的本息总和 M 与最初存入的本金 M_0 有关，同时也与银行的年利率 α 有关，存入 n 年以后，本息合计为

$$M=M_0(1+\alpha)^n$$

在人口理论中，如果一地区人口的年自然增长率 $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$ 相对稳定，这里 α_2 是出生率，α_1 是死亡率，如果现在人口总量为 P_0，n 年后的人口总量为

$$P=P_0(1+\alpha)^n$$

放射性同位素衰变规律与它的现存量 N_0 有关，与其年衰变系数 α 有关，n 年后的质量

$$N=N_0(1-\alpha)^n$$

三个截然不同领域的问题，竟然用同一个数学表达式描述。这一数学表达式，其实仅仅限于计算经过整年以后的存量。对于连续变化的情形，有

$$Y=Y_0\mathrm{e}^{\alpha t}$$

注意：对同位素问题是 $Y=Y_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$。为了统一，应设年衰变系数 α 为负值，也可表示为

$$N=N_0(1+\alpha)^n$$

这一结果，在将要学习的高等数学中会很容易推得。这一结论不仅适用于上述本金的计算、人口理论的数学模型和放射性同位素的衰变规律，同时，也用于描述化学上的一级反应、电学上的一阶电路等。由此可见，数学是一种普遍适用的科学工具。

(5) 数学给人以美的熏陶

杨振宁博士以发现弱相互作用下的宇称不守恒，进而导致他关于基本粒子理论的重大发现，因此他与李政道共同获得了 1957 年诺贝尔物理学奖。杨振宁不仅有深厚的数学功底，而且对数学的美育功能情有独钟。他说："自然几乎不能不对数学的美抱有偏爱。"1993 年 11 月 11 日，美国哲学学会授予杨振宁博士以该学会最高奖——本·富兰克林奖。主持人哥茨泰因在颁奖大会上说："杨振宁教授对数学美的鉴赏力，照亮着他所有的工作。"数学中的美俯拾皆是。它具有统一的美、简洁的美、和谐的美、韵律的美、对称的美、神秘的美……这里仅举几个大家熟悉的例子。

牛顿（1642～1727 年）在剑桥大学三一学院读书时发现的二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-2}a^2b^{n-2}+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

中，其系数犹如一支美妙的乐曲，而又因 $C_n^k=C_n^{n-k}$，其对称之美赫然在目。

前面介绍的关于存款本息、人口理论、同位素衰变以及一级化学反应、一阶电路等，这些变量的变化过程都有着一个共同的特点：变量变化的速度与它的现存量成正比。写作数学表达式为

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\alpha y$$

用将要学到的微分学的观点，上式可以进一步精确表达为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha y$$

这个方程称为微分方程。它将描述不同领域现象的变量关系统一在同一个方程之中。这是一种统一的美、简洁的美。正如列宁所说："自然界统一性，显示在关于各种现象领域的微分方程式的惊人类似中。"

1.2.4 数学的科学功能

框图 1-1 大体上说明了数学对于科学发展的意义，其中关于数学的形式化的符号语言系统、数学的推理功能、抽象思维方法以及数学作为科学计算工具的意义，前面已经论及。这里只谈谈建立数学模型的方法和数学的预测功能在科学研究中的意义。

图 1-1 数学对于科学发展的意义

模型是人们对于所研究的客观事物有关属性的一种模拟。数学模型则是为了某种目的，用数学的方法，即用字母、数字及其它数学符号建立的等式、不等式、图表、图形、框图等，来描述客观事物特征及其内在关系的数学结构。建立数学模型的过程，是对客观事物及其变化过程的一种模拟、简化与抽象，但这种简化与抽象要保留其数量关系及空间形式中最本质的东西。建立数学模型的步骤如图 1-2 所示。

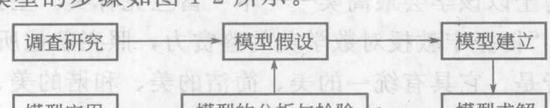


图 1-2 建立数学模型的步骤

现在，以上面提到的人口模型为例，讨论一下建立模型的过程。

[调查研究]——研究的目的是寻求某一地区人口总量 P 随时间变化的规律 $P=P(t)$。已知该地区近年来人口的死亡率 α_1 与人口的出生率 α_2 相对稳定，并且知道当前的人口总量是 P_0。

[模型假设]——人口的变化率随着人口总量的增加而增加，假设人口的变化率与人口总量成正比。

[模型建立]——$\dfrac{\Delta P}{\Delta t}=(\alpha_2-\alpha_1)P$。

[模型求解]——根据高等数学的知识，这一方程可以进一步表示为

$$\frac{dP}{dt}=(\alpha_2-\alpha_1)P_0$$

利用微分方程知识，可以解得 $P=P_0e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}$。

[模型分析]——从人口模型的解可以看出：

第一，人口总量随时间的变化规律是一个指数函数关系；

第二，当人口的自然增长率大于零时，人口呈指数增长关系；当人口的自然增长率小于零时，人口呈指数减少关系；

第三，该模型的解是在该地区近年来人口的死亡率 α_1 与人口的出生率 α_2 相对稳定的情况下得到的，如果 $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$ 不稳定，该模型应进行修改。

[模型应用]——在公式

$$P=P_0e^{\alpha t}\quad（这里，人口的自然增长率 \alpha=\alpha_2-\alpha_1）$$

中，设我国现有人口为 13 亿，人口的自然增长率为 8‰，可以算得 20 年后，我国人口为 15.26 亿；如果人口的自然增长率为 10‰，这一数字将是 20.92 亿！由此可见，人口的自然增长率只要因失控而增加两个千分点，20 年后我国人口将多增加 5.66 亿人。因此，可以看出控制人口增长的重要性。利用这一公式，还可以在人口的自然增长率固定的情况下，例如为 8‰，计算出我国人口翻一番所用的时间。这由

$$2P_0=P_0e^{\alpha t}$$

得 $t=\dfrac{\ln 2}{\alpha}$，代入 $\alpha=0.008$ 得到 1986 年人口翻一番；而代入 $\alpha=0.01$ 得到 1969 年人口翻一番，整整提前了 17 年。

这个例子不仅介绍了建立数学模型方法的意义，而且也可以显示数学的预测功能。人类科学史上显示数学预测功能的一个经典例子，是海王星的发现。1846 年，法国年轻的数学家勒维列分析了天王星的运行轨道的不规律性，根据引力法则计算出在天王星附近应有另一颗行星的存在。通过他周密的计算，得出这颗未知行星的准确轨道位置，并通知了德国天文台。事实像