2003年考研必备

新编硕士研究生数学入学考试复习指导

（经济类）

徐　兵　刘长乃
肖马成　章　德　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书内容丰富、新颖，以讲、练和题目分析、说明的形式，把经济类数学考研所要求的基本概念和基本内容条理清晰地予以阐明，使读者通过使用本书即可掌握考研大纲所要求的内容。本书复习与提高并重。共分三篇17章及两个附录。第一篇为高等数学，包括：函数、极限、连续性；一元函数微分学；一元函数积分学；多元函数微积分学；无穷级数；常微分方程与差分方程，共6章。第二篇为线性代数，包括：行列式；矩阵；向量；线性方程组；矩阵的特征值和特征向量；二次型，共6章。第三篇为概率论与数理统计，包括：随机事件和概率；随机变量及其概率分布；随机变量的数字特征；大数定律和中心极限定理；数理统计初步，共5章。附录为2002年数学(三)参考解答和2002年数学(四)参考解答。

本书是专为经济类考硕士研究生而编写的指导性的必读书，也可以作为高等院校经济类在校学生的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

新编硕士研究生数学入学考试复习指导．经济类：2003/徐兵等编著．一北京：北京航空航天大学出版社，2002．3

ISBN 7-81077-157-4

Ⅰ．新…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第005339号

新编硕士研究生入学考试
数学复习指导
（经济类）
徐　兵　刘长乃　肖马成　章　德　编著
责任编辑　郑忠妹
责任校对　陈　坤
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市学院路37号　邮编：100083　发行部电话：(010)82317024
http://www.buaapress.com.cn
E-mail:pressell@publica.bj.cninfo.net
北京市宏文印刷厂印装　各地书店经销
开本：787×1092　1/16　印张：30.5　字数：878千字
2002年3月第1版　2002年3月第1次印刷　印数：8 000册
ISBN 7-81077-157-4/O·011　　定价：39.00元

前　言

近年来参加硕士研究生入学考试的考生不断增加。1996年国家教委对《考试大纲》进行了重大修订,对试卷分类和考试内容的广度、深度作了较大调整。2001年教育部对《考试大纲》加以局部修订。这些变化对考生提出了更高的要求,考生们需要一本适应现状又适宜自学复习的辅导书。

本书作者从事教学教育实践均已30多年,参加过多种层次的考试命题,多年来一直参加研究生的考试辅导工作。作者曾逐年对数学《教学大纲》、《考试大纲》进行对照研究,对历年研究生入学考试数学试题进行分析。基于对研究生入学考试的性质、命题指导思想的认识、对试题题型与内容及难度关系的研究,针对考生中出现的普遍问题及学生学习数学中的常见问题,依据《考试大纲》编写此书。作者认为有必要提请考生明确以下四个问题,以此作为复习中的方向。

全国硕士研究生入学考试具有两个功能:一是选拔功能;二是从考试的测量功能上看,它又是水平考试,用来测量考生是否达到一定的水平。因此,命题不以《教学大纲》或某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据。考试大纲规定的考试内容和考试要求与教学大纲不完全相同。教学大纲中规定的有些内容并不作考查,而考试大纲中的某些考试要求略高于教学要求。这是考生应明确的第一个问题。

全国硕士研究生入学考试的命题指导思想是坚持两个"有利于",即:一是有利于国家对高层次人才的选拔;二是有利于数学教学质量的提高。因此,要求数学考试试题的编制能综合高等学校的教学实际,考试水平既能反映教学的实际水平,也能指导研究生新生明确应当具备的知识和能力。同时,正确利用这根"指挥棒"引导高校教学向培养学生应用数学能力的方向发展,使得学生学而有用、学而会用,对促进教学质量的提高起到积极促进作用。这是考生应明确的第二个问题。

硕士研究生入学考试的数学试题以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主,并在这个基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想像力和综合所学知识解决实际问题能力的考查。

试题从知识内容来说有覆盖面较大的特点;从其题型与难度来说有以下特点:

- **填空题**用于考查"三基"及数学重要性质。一般来说,不出成省去解答过程的大计算题,以中等难度的试题为主。

- **选择题**主要是考查考生对数学概念、数学性质的理解,并能进行简单推理、判定和比较。一般不出纯粹的计算题。

- **综合题**考查的是知识之间的有机的结合。

● **应用题**一般结合与考生专业相关的背景知识，避免出现不公平性。

以上是考生应明确的第三个问题。

命题有明确的共性，即保持历年试题难度的稳定性。这是考生应明确的第四个问题。

基于对上述四个问题的认识，作者历经多年研磨成此书。

此书力图突出以下特色：

1. 书中融入了近十年全国研究生入学数学(三)、(四)考试试题(包括2002年入学考试数学试题)及命题的基本演变思想。

2. 注意基本概念的要素、基本性质的特点。为了使读者在每个题目中获取更多的知识信息，选择题中有些为多选题，题目中对选择题逐一给出分析，引导读者学会分析方法。

3. 突出计算方法的基本思想。这是衡量一个人功力的重要因素。注意计算方法的条理化，并针对计算中应注意的问题给出较多的思考题，以期引导读者明确方法的条件及要点，以利于其学会用方法的基本思想解决更广泛的问题。

4. 对综合性问题进行了较多的分析解说，以期提高考生将所学知识综合运用的能力。

5. 各章给出了内容概要及典型例题分析。各章节内容都不涉及后面的内容，而后面的内容尽量包括前面内容的综合运用，以利于读者复习。

本书完整地把2002年研究生入学考试题解答(仅在格式及标点符号上为了全书的基本一致有所更动)作为全书的附录放在最后，供广大读者自我测试之用，以便通过它了解2002年数学试题的关键点。

本书第一篇高等数学第一章至第三章由首都经济贸易大学刘长乃教授编写；第四章至第六章由北京航空航天大学徐兵教授编写；第二篇线性代数由南开大学肖马成教授编写；第三篇概率论与数理统计由南京大学章德教授编写。全书由徐兵教授主编。

书中纰漏难免，恳请读者指正。

作　者

于北京航空航天大学

2002年3月

说　明

1. 作者提请读者注意：本书适用于参加全国硕士研究生入学考试数学（三）、数学（四）的辅导。为了有利于考生能有针对性地阅读本书，请读者注意数学（三）、数学（四）各部分内容分布的统计表。

内容	分值									
	数学（三）					数学（四）				
	1998年	1999年	2000年	2001年	2002年	1998年	1999年	2000年	2001年	2002年
函数、极限、连续	6	6	3	5	3	12	6	6	6	3
一元函数微分学	15	10	10	17	6	15	12	16	22	13
一元函数积分学	7	15	9	9	21	12	12	9	9	20
多元函数微积分学	10	10	15	8	10	11	19	18	6	14
无穷级数	2	3	6	4	8					
常微分方程与差分方程	10	6	6	6	2					
线性代数	25	25	26	26	25	25	25	26	26	25
概率论与数理统计	25	25	25	25	25	25	26	25	25	25

2. 书中题目前若标有(99303)、(00406)，前者表示题目为1999年数学（三）中的试题，其分值为3分；后者表示题目为2000年数学（四）中的试题，其分值为6分。

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

附录　2002年全国硕士研究生数学入学考试试题与参考解答

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续性

§1.1　函　数

一、基本知识概要

（一）函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 与 y，对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按照某种确定的规则总有相应的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$。

常称 x 为自变量，y 为函数。而把 f 理解为对应规则。使得函数有定义的自变量 x 的取值的全体称为函数的定义域，对应的函数 y 的取值的全体称为函数的值域。

给定的两个函数，当且仅当它们的定义域和对应规则完全相同时，才认为它们是同一函数，因此我们常把定义域和对应规则，称为函数的两个要素。

1．求函数的定义域

对于用解析式子表达的函数，求定义域时只需考虑具体的计算法则。而对于实际问题则还要保证其符合实际问题的条件。

2．函数符号的运用

在同一问题中，当出现不同的函数关系时，必须采用不同的记号，如 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 等以示其对应规则之不同。同样，在同一问题中，$y=f(x)$ 与 $y=f(u)$ 有着相同的对应规则，只是自变量的记法不同。

（二）函数的性质

1．单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调增加的（或单调减少的）。

如果函数在其定义域内单调增加，如 $y=2^x$，我们就说“$y=2^x$ 是一个单调增函数”，而不用指明其区间。单调增加与单调减少统称为单调。

判定单调的方法一般有两种，一是利用定义，在区间内任取两点 $x_1<x_2$，来判断不等式 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）或 $f(x_2)-f(x_1)>0$（或 $f(x_2)-f(x_1)<0$）成立与否。另一种方法是利用导数的符号来判定函数的单调性，这将在第二章中详加介绍。

2．奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 定义于对称区间 D 上，若对于 D 内任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点。

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；

(2) 偶（奇）函数与偶（奇）函数的乘积为偶函数；

(3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数。

3．周期性

定义 4　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使得对于任一 $x\in D$ 当 $(x\pm T)\in D$ 时，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 是周期函数。通常把满足关系式的最小正数，称为函数 $f(x)$ 的周期。

若 T 为 $f(x)$ 的周期，则函数 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$。并非每个周期函数都存在周期。

4. 有界性

定义 5　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义。若存在 $M>0$，使得对于一切 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界。

如果 $f(x)$ 在其定义域内有界，则可简称 $f(x)$ 为有界函数，如 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 就是有界函数。

由于函数的有界性主要是指函数值是否满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，所以可以用求函数值域的方法来判定函数的有界性。对于比较简单的函数也可由图象来确定。对于连续函数可以利用其在闭区间上的性质来判定。见 §1.3。

(三) 初等函数

1. 反函数

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的值域为 D_y，如果对于 D_y 中任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定惟一的 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。它称为函数 $y=f(x)$ 的反函数。习惯上常将 x 作为自变量，y 作为因变量，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$。

函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象对称于直线 $y=x$。

求反函数时，首先从 $y=f(x)$ 中解出 x，得到 x 用 y 表示的表达式，然后再将 x 与 y 对换就得到了函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$。

2. 基本初等函数

幂函数　　$y=x^{\mu}$(μ 为实数)；

指数函数　$y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$；

对数函数　$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$；

三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$。

上述五类函数统称为基本初等函数。

3. 复合函数

定义 7　若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 E，其中 $D\supseteq E$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中：x 称为自变量，u 称为中间变量，y 称为函数。

并不是任何两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都能复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的。例如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能复合成复合函数。因为对任意 x 值，恒有 $u=x^2+2\geqslant 2$，但是对于使 $y=\arcsin u$ 有意义的 u 值必须是 $|u|\leqslant 1$，因此可知 $y=\arcsin(x^2+2)$ 是无意义的。

4. 初等函数

定义 8　由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成的，并能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数。

(四) 分段函数

定义 9　如果一个函数在其定义域内，对应于 x 的不同取值区间，对应规则 f 有着不同的表达形式，则该函数称为分段函数。

二、典型例题分析

例 1　求函数 $y=\arcsin\frac{1-x}{2}+\frac{\sqrt{4x-x^2}}{\lg(3x+1)}$ 的定义域。

分析　函数 y 的表达式是由三个复合函数构成，因此 y 的定义域应该是三个复合函数定义域的交集。在求每个复合函数的定义域时，通常将其由外向里分解为简单函数。

由于

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1-x}{2}\right| \leqslant 1 \\ 4x - x^2 \geqslant 0 \\ 3x+1 > 0 \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ x > -\dfrac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

故函数的定义域为 $(0,3]$。

例 2　设函数 $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$，$g(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$。

分析　这是一个求复合函数的问题，已知 $y = f(u)$，$u = g(x)$，只需将 u 代入可得 $f[g(x)]$。但要注意 $g(x)$ 是分段函数，故应分段讨论。

解法 1　因 $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$，得 $f[g(x)] = \dfrac{g(x)+|g(x)|}{2}$。当 $x<0$ 时，$g(x) = x < 0$，$|g(x)| = -x$，故 $f(x) = 0$；当 $x \geqslant 0$ 时，$g(x) = x^2 \geqslant 0$，$|g(x)| = x^2$，故 $f(x) = x^2$，于是

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

解法 2　先将 $f(x)$ 化成分段函数。由于 $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases}$，可得 $f[g(x)] = \begin{cases} 0 & g(x)<0 \\ g(x) & g(x) \geqslant 0 \end{cases}$，再将 $g(x)$ 代入，得

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

例 3　已知函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$，求函数 $f(x)$ 的表达式。

分析　一般已知 $f[\varphi(x)]$，求 $f(x)$ 的表达式时，常常设 $u = \varphi(x)$，解出 $x = \varphi^{-1}(u)$。于是得到函数 $f(u)$，改写 u 为 x，得到 $f(x)$ 的表达式。当由 $u = \varphi(x)$ 解出 $x = \varphi^{-1}(u)$ 比较困难时，可将 $f[\varphi(x)]$ 的表达式凑成 $\varphi(x)$ 的函数关系式，从而得到 $f(u)$。

由于 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$，得 $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$。于是 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$，设 $u = x + \dfrac{1}{x}$，得 $f(u) = u^2 - 2$。所求函数 $f(x)$ 的表达式为 $f(x) = x^2 - 2$。

例 4　若 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)] = 1 - x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，试求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域。

分析　由 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)] = \mathrm{e}^{\varphi^2(x)}$。又 $f[\varphi(x)] = 1 - x$，因此 $\mathrm{e}^{\varphi^2(x)} = 1 - x$，$\varphi^2(x) = \ln(1-x)$。注意到 $\varphi(x) \geqslant 0$，可得

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$$

由 $\begin{cases} \ln(1-x) \geqslant 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ x < 1 \end{cases}$。所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$。

例 5　判别函数 $y = F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1} + \dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性。其中常数 $a>0$ 且 $a \neq 1$，而 $F(x)$ 对任何 x, y 恒有 $F(x+y) = F(x) + F(y)$。

分析　函数 y 的表达式是由两项的乘积构成，因此只需分别判别它们的奇偶性即可。如果设 $\varphi(x) = \dfrac{1}{a^x-1} + \dfrac{1}{2}$，那么 $\varphi(x)$ 的奇偶性可由定义而确定。由于函数 $F(x)$ 为抽象函数，考虑到已知条件 $F(x+y) = F(x) + F(y)$，令 $y = -x$，可得 $F(0) = F(x) + F(-x)$。于是

求出 $F(0)$ 的值就成为关键。

设 $\varphi(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^x+1}{2(a^x-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}}}{a^{\frac{x}{2}}-a^{-\frac{x}{2}}}$，于是 $\varphi(-x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^{-\frac{x}{2}}+a^{\frac{x}{2}}}{a^{-\frac{x}{2}}-a^{\frac{x}{2}}}=-\varphi(x)$。所以 $\varphi(x)$ 是奇函数。

由 $F(x+y)=F(x)+F(y)$，令 $y=0$ 代入，$F(x)=F(x)+F(0)$，可得 $F(0)=0$。

再设 $y=-x$，$F(x)+F(-x)=F(0)=0$，即 $F(-x)=-F(x)$，$F(x)$ 也是奇函数。所以，所求函数 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 为偶函数。

例 6　定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数 $y=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 为

A. 奇函数；　　B. 偶函数；

C. 无界函数；　　D. 有界函数。

分析　对于这个选择题，可以很容易地利用奇偶函数的运算性质将 A，B 排除。这是因为函数的分母是偶函数，而分子是非奇非偶函数，所以函数 y 也一定非奇非偶。

判断函数 y 是否有界，有不同的方法。

解法 1　因为 $y=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\geqslant 0$，　所以 $|y|=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}=1+\dfrac{2x}{1+x^2}$。根据不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$1+x^2\geqslant 2x$，即 $\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant 1$。于是

$$|y|=1+\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 2$$

所以函数 y 为有界函数，选 D。

解法 2　也可用函数的极限、连续性理论来判断函数 y 的有界性。由初等函数的连续性可知 $y=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，因此对任意的 $N>0$，$f(x)$ 在闭区间 $[-N,N]$ 上连续，可知 y 在 $[-N,N]$ 上有界。又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}=1$$

可知函数 y 是有界函数(其原理在 §1.2，§1.3 介绍)。

练　习　题

1. 设 $f(x)=\dfrac{x+8}{\lg(2-x)}+\sqrt{64-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域及 $f[f(-8)]$。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，求函数 $f[f(x)]$ 的表达式。

3. 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求函数 $f[f[f[f(x)]]]$ 及其定义域。

4. 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，求 $f(x)$。

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2+x & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$。

6. 求函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数。

7. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上为偶函数，已知当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=2x^2+x$，那么当 $x\in[0,2]$ 时表达式为

A. $2x^2+x$；　　B. $2x^2-x$；

C. $-2x^2+x$；　　D. $-2x^2-x$。

8. 设函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$，$-\infty<x<+\infty$。那么函数 $f(x)$ 是

A. 有界函数；　　B. 单调函数；

C. 周期函数；　　D. 偶函数。

9. 设函数 $f(x)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\dfrac{x}{n}$（其中 n 是确定的自然数），则 $f(x)$ 是

A. 无界函数；　　B. 有界但非周期函数；

C. 单调函数；　　D. 以 $2n\pi$ 为周期的函数。

练习题参考解答

1. 解不等式组 $\begin{cases}2-x>0\\2-x\neq 1\\64-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 得定义域 $[-8,1)\cup(1,2)$。$f(-8)=0$，$f[f(-8)]=8\left(\dfrac{1}{\lg 2}+1\right)$。

2. 因为 $f[f(x)]=\begin{cases}1 & |f(x)|\leqslant 1\\0 & |f(x)|>1\end{cases}$，但 $|f(x)|\leqslant 1$，故 $f[f(x)]=1$。

3. $f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\dfrac{x-1}{x+1}+1}=-\dfrac{1}{x}$。$f[f[f(x)]]=\dfrac{-\dfrac{1}{x}-1}{-\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{1+x}{1-x}$。$f[f[f[f(x)]]]$

$=\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-1}{\dfrac{1+x}{1-x}+1}=x\quad(x\neq -1,x\neq 0,x\neq 1)$。

4. 设 $u=x^2-1$，则 $x^2=1+u$，于是 $f(u)=\ln\dfrac{1+u}{u-1}$。所以 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{x-1}$。

5. 首先确定 $f[g(x)]=\begin{cases}e^{g(x)} & g(x)<1\\g(x) & g(x)\geqslant 1\end{cases}$。然后分别考虑 $g(x)<1$ 与 $g(x)\geqslant 1$。

$g(x)<1$：当 $x<0$ 时，$g(x)=2+x$，由 $2+x<1$ 得 $x<-1$；当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2-1$，由 $x^2-1<1$ 得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，但已确定 $x\geqslant 0$，所以取 $0\leqslant x<\sqrt{2}$。即当 $x<-1$ 或 $0\leqslant x<\sqrt{2}$ 时，$g(x)<1$；而 $x<-1$ 时，$g(x)=2+x$，故 $e^{g(x)}=e^{2+x}$。同理 $0\leqslant x<\sqrt{2}$ 时，$e^{g(x)}=e^{x^2-1}$。

$g(x)\geqslant 1$：当 $x<0$ 时，$g(x)=2+x$，由 $2+x\geqslant 1$ 得 $x\geqslant -1$，所以 $-1\leqslant x<0$；当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2-1$，由 $x^2-1\geqslant 1$ 得 $x\leqslant -\sqrt{2}$ 或 $x\geqslant\sqrt{2}$，但 $x\geqslant 0$，所以取 $x\geqslant\sqrt{2}$。即当 $-1\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant\sqrt{2}$ 时，$g(x)\geqslant 1$；而 $-1\leqslant x<0$ 时，$g(x)=2+x$，$x\geqslant\sqrt{2}$ 时，$g(x)=x^2-1$。

综上所述，可得

$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{2+x} & x<-1\\2+x & -1\leqslant x<0\\e^{x^2-1} & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\x^2-1 & \sqrt{2}\leqslant x\end{cases}$$

6. 设 $e^x=u$，则有 $u^2-2yu-1=0$，$u=y\pm\sqrt{1+y^2}$。由于 $u=e^x>0$，取 $u=y+\sqrt{1+y^2}$，因此 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$。所以得反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

7. 应选 B。因为 $f(x)=2x^2+x$，$-2\leqslant x\leqslant 0$，所以 $f(-x)=2x^2-x$，$-2\leqslant -x\leqslant 0$，即 $f(-x)=2x^2-x$，$0\leqslant x\leqslant 2$。而已知 $f(x)$ 为偶函数，必有 $f(x)=f(-x)$。因此当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=2x^2-x$。

8. 选 D。$\cos x$ 是偶函数，于是 $e^{\cos x}$ 也是偶函数。x 与 $\sin x$ 都是奇函数，乘积为偶函数。$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 是两个偶函数相乘，必为偶函数。

注意，选 A，C 都不对。虽然 $\sin x$，$\cos x$ 都是有界的周期函数，但 $x\sin x$ 就不再是有界函数，也非周期函数。

9．选 D。这里需要指出的是，在 $f(x)$ 表达式中 n 是常数，是一个确定的值，只影响 $\sin\frac{x}{n}$ 的正负。

§1.2 极 限

一、基本知识概要

（一）极限的概念与性质

1．数列的极限

定义 1 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的极限。记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A(n\to\infty)$$

2．函数的极限

定义 2 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限。记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

定义 3 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 M，使得当一切 $|x|>M$ 时，

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限。记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

这里应注意 $x\to\infty$ 与 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 的不同。只有当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 时，才有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$。若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在。

3．左、右极限

定义 4 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0-0) = A$$

定义 5 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个函数 δ，使当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0+0) = A$$

当我们求区间端点处的函数的极限时，对于左端点需求右极限，而右端点需求左极限。而对于分段函数，求分段点处的极限时，当函数表达式在分段点两侧不同的时候，也必须求左、右极限，左极限和右极限统称为单侧极限。

4．极限的性质

性质 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

性质 2　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$(或$A < 0$),则总存在一个正数$\delta$,使当$0 < |x - x_0| < \delta$时,$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$)。

性质 3　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,且$f(x) \geqslant 0$(或$f(x) \leqslant 0$),则$A \geqslant 0$(或$A \leqslant 0$)。

性质 4　若$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时函数$f(x)$的极限存在,则必有$\delta > 0$(或$R > 0$),使得函数$f(x)$在x_0的邻域$N(x_0,\delta)$内(或$N(0,R)$之外)有界。

常用性质 4 来判断函数的有界性。

(二) 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 6　以零为极限的变量,称为无穷小量。

2. 无穷大量

定义 7　当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时,函数的绝对值$|f(x)|$无限增大,则称当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时$f(x)$为无穷大量。

3. 无穷小量与无穷大量的关系

在x的相同变化过程中,$f(x)$为无穷大量时,它的倒数$\dfrac{1}{f(x)}$必为无穷小量。同理,任一不为零的无穷小量的倒数是无穷大量。

4. 无穷小量的性质

性质 1　有限个无穷小量之和仍为无穷小量。

性质 2　有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

性质 3　有限个无穷小量之积仍为无穷小量。

性质 4　极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$存在的充分必要条件是$f(x) = A + \alpha$,其中$\alpha$当$x \to x_0$时为无穷小量。

5. 无穷小量阶的比较

设$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0, \lim\limits_{x\to x_0} \beta = 0$。

若$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$,则称当$x \to x_0$时,$\alpha$是较$\beta$高阶的无穷小量,常记为$\alpha = o(\beta)$;

若$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \quad (A \neq 0)$,则称当$x \to x_0$时,$\alpha$与$\beta$为同阶无穷小量,记为$\alpha = O(\beta)$;

若$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$,则称当$x \to x_0$时,$\alpha$与$\beta$为等价无穷小量,记为$\alpha \sim \beta$;

若$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$,则称当$x \to x_0$时,$\alpha$是较$\beta$低阶的无穷小量。

上述极限的变化过程中,将$x \to x_0$换成$x \to \infty$时也成立。

6. 等价无穷小量代换

若当$\begin{matrix} x \to x_0 \\ (x \to \infty) \end{matrix}$时,$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

在极限运算中,经常会遇到$\dfrac{0}{0}$型的极限,这时利用等价无穷小量代换常可使计算简化。使用时可以是分子、分母都换,也可以只换一部分。但要注意只能在极限的乘除运算中使用,不能在极限的加减运算中使用。为了使用的方便,下面给出几个常用的等价无穷小量,当$x \to 0$时:

$\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

（三）极限的四则运算

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$。

性质 1　$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$。

请注意这个性质成立的条件，必须是当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限都存在．若不存在（如趋于无穷大时），则不能用此性质。

性质 2　$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$。

推论 1　若 c 为常数，则$\lim\limits_{x \to x_0}[cf(x)] = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = cA$。

推论 2　若 n 为自然数，则$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n = A^n$。

性质 3　若 $B \neq 0$，则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

上述性质与推论当 $x \to \infty$ 时也成立。

（四）极限存在的准则　两个重要极限

准则 1　夹逼定理。

若 x 在 x_0 的某去心邻域内（或 $|x| > M$ 时），有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$。

准则 2　单调有界数列必有极限。

由以上两个准则可推得如下两个重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

这个公式应用十分广泛，通常若$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$，则有$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1$。

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

通常也有

$$\lim_{f(x) \to \infty}\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

（五）求极限小结

现将本章求极限的问题总结如下：

1. 利用极限的四则运算法则求极限。
2. 利用两个重要极限求极限。
3. 利用无穷小量性质求极限。
4. 利用公式

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

求极限。

5. 利用极限存在的准则求极限。
6. 求分段函数在分段点处的极限时，当函数在分段点两侧表达式不同时，需利用左极限与右极限。