

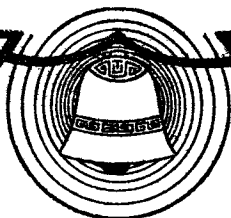
大學用書  
統計應用數學

李銳夫 編著

正中書局印行

大學用書  
統計應用數學  
李銳夫編著

正中書局印行



版權所有  
翻印必究

中華民國三十七年一月初版

統計應用數學

全一册 定價國幣壹拾貳元叁角

(精裝本定價另加五元)

(外埠酌加運費匯費)

編	著	者	李	銳	夫
發	行	人	吳	秉	常
印	刷	所	正	中	書
發	行	所	正	中	書

(1977)

校整  
：：：  
向壽

滬·本

3/1

## 序

本書爲民國二十八年以來，作者先後在中央政治學校經濟系與國立重慶大學統系及統計專修科授統計應用數學時之講演稿；目的在供給研習數理統計者所必需之數學知識，而非爲數理統計。

全書分二十章。第一與第二兩章略述幾何量之解析，爲本書之預篇；如讀者已有良好之解析幾何基礎，可以略去。第三章至第十二章爲微積分，對於函數之極限，導微函數及積分之基本觀念，以極經濟之方法敘述，而又不失理論之嚴正。凡初等微積分範圍內之定理及公式該述無遺。此外並隨時插入爲統計學所特別需要之材料，如求近似積分法，戴勞級數，求函數之近似值等。第十三章至第十五章爲微分方程式，所論僅限於常微分方程式；至於偏微分方程式，在目前雖作高深之統計研究，亦無須用此，故未列入。第十六章論有限差式，插補法，第十七與第十八兩章論幾率，幾率積分及最小二乘方，皆爲治統計者所不可或缺之工具。第十九與第二十兩章論線積分，特殊函數及富里哀級數，亦爲研究數理統計所必需。此外行列式，二項定理等，統計學中應用甚廣；但本書爲供大學學生閱讀，此項代數知識已在高級中學習過，無須重複也。

中央政治學校統計教授褚一飛先生對本書之取材，多所指示；國立重慶大學數學教授周伯平先生曾校閱全稿，試教數次，並完成

插補法一章之初稿，謹此誌謝。前國立重慶大學商學院院長馬寅初先生與統計專修科主任倪亮先生對作者不斷鼓勵，尤所心感。數學書籍，排印繁複；正中書局在此印刷極度困難之際，接受本書出版，其提倡文化之精神，至為可佩。

民國三十三年七月

作者於重慶

# 目 次

第一章	幾何量之解析	1
	1. 向量與軸 2. 射影 3. 直角坐標 4. 極坐標 5. 線分之長 6. 斜度 7. 三角形之面積 8. 共線點 9. 分點 10. 幾何圖形與代數方程式 11. 直線之一般方程式 12. 直線方程式之各種形式 13. 直線至一點之距離 14. 二直線之交點	
第二章	圓錐曲線	13
	1. 圓之一般方程式 2. 圓之切線 3. 拋物線 4. 拋物線機械作法 5. 橢圓 6. 橢圓之繪法 7. 輔圓 8. 雙曲線 9. 雙曲線之漸近線 10. 共軛雙曲線 11. 坐標軸之平移 12. 坐標軸之旋轉 13. 一般二次方程式	
第三章	函數, 導微函數	28
	1. 變數, 函數 2. 極限 3. 連續函數 4. 導微函數 5. 改變率 6. 無窮小之級 7. 微分	
第四章	代數函數	38
	1. 有理整函數 2. 有理函數 3. 代數函數 4. 導微函數 5. 隱函數之導微函數 6. 高級導微函數 7. 重根 8. 切線與法線 9. 次切線與次法線 10. 圓錐曲線之切線與法線之性質 11. 升函數與降函數 12. 極大, 極小 13. 彎曲性, 反曲點 14. 導微曲線 15. 反函數 16. 參數方程式	
第五章	曲線製法	58
	1. 對稱 2. 截距 3. 彎曲性與界限 4. 異點 5. 原點切線 6. 漸近線 7. 求漸近線另法 8. 曲線無窮遠枝之情形 9. 製曲線之例	

## 10. 縱坐標之相加

## 第六章 圓函數, 反圓函數 ... .. 74

1. 弧度法 2. 圓函數 3. 圓函數之導微函數 4. 圓函數之圖形
5. 反圓函數 6. 反圓函數之導微函數

## 第七章 指數函數, 對數函數 ... .. 85

1. 指數函數 2. 二項定理 3. 數  $e$  4. 對數函數 5. 導微函數
6. 對數之微分法

## 第八章 中值定理, 不定式 ... .. 93

1. 中值定理 2. 不定式  $0/0, \infty/\infty$  3. 不定式  $0 \cdot \infty, \infty - \infty$ .

## 第九章 積分法 ... .. 97

1. 積分 2. 代換積分法 3. 求積分公式 4. 三角函數之積分 5. 被積函數具二次分母者 6. 部分積分法 7. 三角函數代換法 8. 部分分式 9. 求有理分式之積分

## 第十章 定積分 ... .. 113

1. 基本定理 2. 定積分 3. 積分中值定理 4. 代換 5. 面積 6. 積分之限為無窮大者 7. 被積函數在限內為無窮大者 8. 弧之長 9. 含二變數之連續函數 10. 二重積分 11. 極坐標之變換 12. 積分  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  13. 近似積分法——梯形法則 14. 近似積分法——辛伯孫法則 15. 平均值

## 第十一章 偏導微函數 ... .. 142

1. 偏導微函數 2. 全微分 3. 隱函數之導微函數 4. 高級偏導微函數 5. 齊次函數 6. 包線

## 第十二章 無窮級數 ... .. 151

1. 定義 2. 正項級數 3. 幾何級數 4. 積分檢驗法 5. 比值檢驗法 6. 含正負項之級數 7. 冪級數 8. 冪級數所定之函數 9. 級數之積分法與微分法 10. 對數級數 11. 二項級數 12. 戴勞定理 13. 戴勞級數 14. 級數之運算 15. 函數之近似值 16. 函數增量

之近似值 17. 比例部分法

### 第十三章 一級微分方程式... ..175

1. 微分方程式 2. 微分方程式之解

#### I. 一級一次微分方程式 ... ..178

3. 變數可以分離者 4. 齊次方程式 5. 可化為齊次型之方程式 6. 積分因式 7. 微分方程式為恰當之條件 8. 恰當微分方程式之解法 9. 一級線性微分方程式 10. 應用

#### II. 一級高次微分方程式 ... ..189

11. 方程式可就  $p$  解出者 12. 方程式可就  $y$  解出者 13. 方程式可就  $x$  解出者 14. 克雷勞方程式 15. 異解

### 第十四章 高級線性微分方程式... ..197

#### I. 常係數線性微分方程式 ... ..197

1. 線性方程式 2. 常係數方程式  $f(D)=0$  3. 求  $f(D)y=X$  之特解 4. 參數度變法

#### II. 解高級微分方程式雜法 ... ..207

5. 方程式不含  $y$  者 6. 方程式不含  $x$  者 7. 歐西線性方程式 8. 存在定理 9. 級數解

### 第十五章 全微分方程式, 微分方程式組 ... ..217

1. 可積分全微分方程式 2. 不可積分全微分方程式 3. 一級方程式組 4. 全微分方程式組 5. 線性方程式組

### 第十六章 有限差式, 插補法 ... ..226

#### I. 等差自變數之插補法 ... ..226

1. 差數表 2. 符號算子 3. 多項式之差數 4.  $x(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)$  之差數 5. 以階乘表多項式 6. 格里哥來與牛頓之插補公式

#### II. 非等差自變數之插補法 ... ..239

7. 除差數 8. 關於除差數之定理 9. 對非等差自變數之牛頓公式

10. 拉果蘭諾之插補公式

### 第十七章 幾率, 幾率積分 ... .. 248

1. 幾率之定義 2. 互斥事件 3. 獨立事件 4. 誤差 5. 頻率分配

6. 幾率曲線 7. 幾率積分

### 第十八章 最小二乘方原理及其應用 ... .. 262

I. 最小二乘方之原理 ... .. 262

1. 觀測之權 2. 最小二乘方之原理 3. 可能誤差

II. 單一事物之直接測值 ... .. 265

4. 等權測值 5. 算術平均數之可能誤差 6. 不等權測值 7. 帶權平均數之可能誤差

III. 一羣事物之間接觀測 ... .. 270

8. 觀測方程式 9. 法方程式 10. 間接觀測之可能誤差 11. 函數之近似表示法

### 第十九章 線積分 ... .. 280

1. 積分號下求導微函數 2. 線積分 3. 變數代換公式 4. 閉曲線

所圍之面積 5. 格林定理 6. 積分  $F(x, y) = \int_{a,b}^{x,y} P dx + Q dy$

### 第二十章 特殊函數, 富里哀級數 ... .. 291

1. 甘馬函數 2. 皮塔函數 3. 甘馬函數與皮塔函數之關係 4. 拔勞里數 5. 超幾何函數 6.  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  之表為積分 7. 倍塞爾函數 8.  $J_n(x)$  表為積分 9.  $\pi$  之瓦利斯公式 10. 斯得林公式 11.

富里哀級數 12. 積分  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} dx$  13. 杜里克來脫積分

14. 富里哀定理

# 第一章 幾何量之解析

§ 1. 向量與軸 凡一直線有二相異之方向，任取其一為正向 (positive direction)，則其他為負向 (negative direction)。正向取定之直線曰軸 (axis)。

二點  $A, B$  所定之線分曰向量 (vector)；此二點因作用之不同，其一曰起點 (initial point)，其他曰終點 (terminal point)。自起點至終點之方向表向量之方向，自起點至終點之距離表向量之長度。

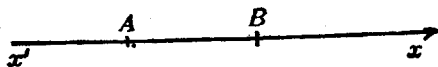


圖 1.

設  $x'x$  軸上有一向量  $AB$ ， $AB$  之方向為與軸之方向同。如以自  $x'$  至  $x$  為正，則  $AB$  為正， $BA$  為負；故

$$AB = -BA. \quad (1)$$

設  $A, B, C$  為軸上之任意三點，則無論其排列之次序如何，恆有關係：

$$AC = AB + BC. \quad (2)$$

依此推廣，設  $A, B, C, \dots, H, K, L$  為一軸上之任意  $n$  點，則恆有

$$AL = AB + BC + \dots + HK + KL. \quad (3)$$

在軸上任取一點  $O$  為原點 (origin)。若  $A$  為軸上之任一點，並

知  $OA$  之代數值，則此點在軸上之位置得以確定；而此代數值曰  $A$  點之坐標 (coordinate)。

設  $A, B$  為軸上之二點，其坐標分別為  $a, b$ 。由 (2) 式，

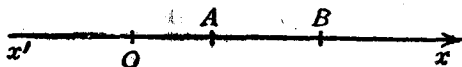


圖 2.

$$OB = OA + AB,$$

則 
$$AB = OB - OA = b - a, \quad (4)$$

此即表示向量之代數值等於其終點坐標與起點坐標之差。

(4) 式為溝通向量式與坐標式之基本公式。

§ 2. 射影 設  $P$  為  $x'x$  軸外之一點，自  $P$  作  $x'x$  之垂線，命  $M$  為其垂足，則  $M$  曰  $P$  點在  $x'x$  上

之射影 (projection)。設  $Q$  點在  $x'x$  上之射影為  $N$ ，則  $MN$  曰  $PQ$

向量在  $x'x$  上之射影，表以符號

$$MN = (PQ)_x.$$

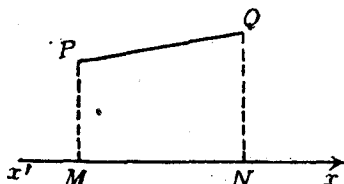


圖 3.

設  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  為平面上之任意  $n$  點，則由 § 1, (3) 式，

$$(A_0A_1)_x + (A_1A_2)_x + \dots + (A_{n-1}A_n)_x = (A_0A_n)_x. \quad (5)$$

§ 3. 直角坐標 取  $x'x$  與  $y'y$  二軸正交於原點  $O$ ，命  $Ox, Oy$  為正向， $Ox', Oy'$  為負向，此二軸定一平面。設平面有一點  $P$ ，其在  $x'x$  上之射影為  $M$ ，其在  $y'y$  上之射影為  $N$ ，則  $OM$  曰  $P$  點之橫坐標 (abscissa)， $ON$  曰  $P$  點之縱坐標 (ordinate)。命  $x = OM, y = ON; x, y$

曰  $P$  點在  $xy$  平面上之坐標 (coordinates), 以符號  $P(x, y)$  表之。

此種坐標曰直角坐標 (rectangular coordinates), 爲笛卡兒 (Descartes) 所初創。

應用此種坐標, 平面上任意一點定二實數; 反之, 任意二實數定平面上之一點。

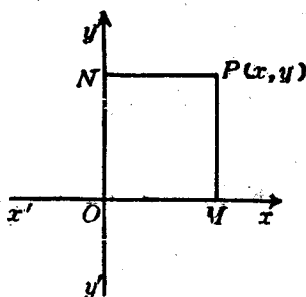


圖 4.

§ 4. 極坐標 在平面上取  $Ox$  爲軸,  $O$  爲極 (pole). 則平面上一點  $P$  之位置, 可用  $OP$  旋轉之角  $\theta$  與  $OP$  之長  $\rho$  以定之. 合  $\theta$  與  $\rho$  曰  $P$  點之極坐標 (polar coordinates), 以符號  $P(\rho, \theta)$  表之。

依向量之定義, 一點  $P'(-\rho, \theta)$  爲在  $OP$  向後之延長線上,  $OP'$  之絕對值爲  $\rho$ 。

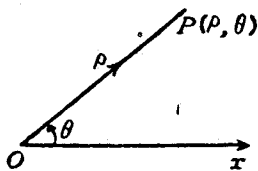


圖 5.

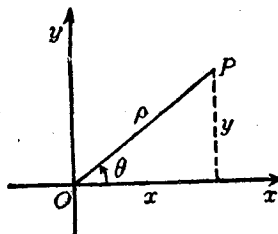


圖 6.

設一點  $P$  之直角坐標爲  $(x, y)$ , 極坐標爲  $(\rho, \theta)$ , 則由圖 6, 直角坐標與極坐標之變換式爲

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

§5. 線分之長 設  $P \equiv (x_1, y_1), Q \equiv (x_2, y_2)$ , 由圖 7, 因  $\overline{PQ}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KQ}^2$ , 故得

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (7)$$

§6. 斜度 由圖 7, 若  $PQ$  之延長線與  $Ox$  相交成  $\alpha$  之角, 則  $\alpha$  謂之  $PQ$  直線之方位角 (directional angle),  $\tan \alpha$  謂之  $PQ$  直線之斜度 (slope).

因  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , 故  $-\infty \leq \tan \alpha \leq \infty$ . 再因  $\tan \alpha = KQ/PK$ , 故

$$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \quad (8)$$

設  $l_1$  與  $l_2$  二直線之方位角分別為  $\alpha_1, \alpha_2$ , 此處  $\alpha_2 > \alpha_1$ , 並設  $\omega$  為  $l_1$  與  $l_2$  之交角, 則因

$$\tan \omega = \tan(\alpha_2 - \alpha_1),$$

展開右端, 並令  $m_1, m_2$  為  $l_1, l_2$  之斜度, 則

$$\tan \omega = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}. \quad (9)$$

由(9)式得知  $l_1 \parallel l_2$  之條件為  $m_1 = m_2$ ;  $l_1 \perp l_2$  之條件為  $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$ , 即  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ .

§7. 三角形之面積 設  $P, Q$  之直角坐標為  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 極坐標為  $(\rho_1, \theta_1), (\rho_2, \theta_2)$ , 則就面積而言,

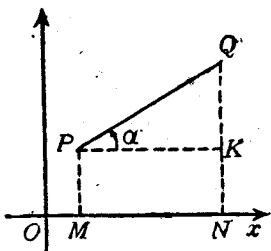


圖 7.

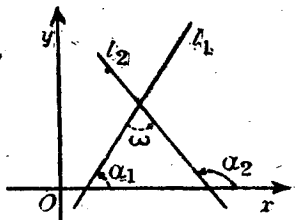


圖 8.

$$\begin{aligned}\Delta OPQ &= \frac{1}{2} \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \frac{1}{2} \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_1) \\ &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1), \quad \text{【由(6)式】}\end{aligned}$$

$$\therefore \Delta OPQ = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

在此，若三角形三邊之順序取為  $OQP$  向，則面積為負；蓋此時  $\theta_2 - \theta_1$  為順時針之方向，其正弦為負也。故三角形之三邊若取逆時針之方向，所得之面積為正；順時針之方向，其面積為負。

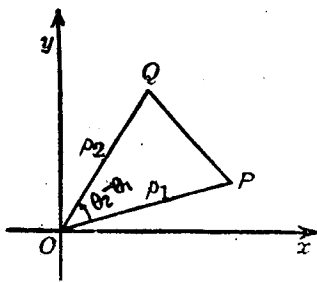


圖 9.

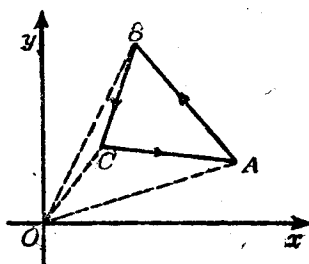


圖 10.

茲推廣之，若  $A \equiv (x_1, y_1)$ ,  $B \equiv (x_2, y_2)$ ,  $C \equiv (x_3, y_3)$ ；注意面積之正負， $\Delta ABC = \Delta OAB + \Delta OBC + \Delta OCA$ ，由(10)式，得

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

§8. 共線點 三點  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  共線之條件爲

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

蓋若三點爲共線，其所成三角形之面積爲零也 (§7)。

§9. 分點 設  $P_1 \equiv (x_1, y_1), P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ；求一點  $P(x, y)$ ，使分  $P_1P_2$  線分爲二段，而

$$P_1P : PP_2 = l : m.$$

由圖 11,

$$LN : NM = P_1P : PP_2,$$

即  $(x - x_1) : (x_2 - x) = l : m.$

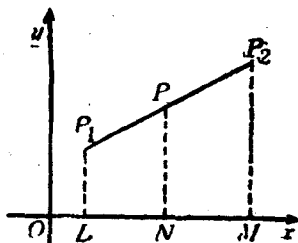


圖 11.

故

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{lx_2 + mx_1}{l + m} \\ y &= \frac{ly_2 + my_1}{l + m} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$l : m$  曰位比 (position ratio). 若  $P$  居  $P_1P_2$  之內，位比爲正；若  $P$  居  $P_1P_2$  之外，位比爲負。當  $P \rightarrow P_1, l : m \rightarrow 0$ ；當  $P \rightarrow P_2, l : m \rightarrow \infty$ 。

又因

$$\frac{l}{m} = \frac{P_2P}{PP_2} = \frac{P_1P_2 + P_2P}{PP_2} = \frac{P_1P_2}{PP_2} - 1,$$

當  $PP_2 \rightarrow \infty, l : m \rightarrow -1$ . 茲以圖 12 表之如次：

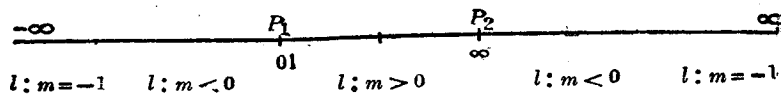


圖 12.

特例，若  $P$  為  $P_1P_2$  之中點，則  $l:m=1$ ，由(13)式，

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

## 習 題 一

1. 試證以上公式(3).
2. 設  $A, B, C, D$  為軸上之任意四點，試證

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

3. 試證平行向量在同軸上之射影之比等於其向量之比。
4. 設  $P \equiv (-2, 3), Q \equiv (4, -1)$ ；求  $PQ$  之長。
5. 試求三角形  $(-2, 3), (-7, 5), (3, -5)$  之面積。
6. 試求四邊形  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$  之面積。
7. 試求三角形  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  之重心。
8. 試證  $(6, 2), (-2, -2), (12, 5)$  為共線，並求其位比。

§ 10. 幾何圖形與代數方程式 凡曲線(直線為曲線之特例)可視為無窮數之點所構成。若一點  $P$  之坐標常適合於一定方程式，則此點常在一軌跡(locus)或曲線(curve)之上，此方程式謂之軌跡之方程式，而軌跡曰方程式之軌跡。

例如在  $x$  軸上所有點之縱坐標皆為 0, 而在  $xy$  平面上僅有  $x$  軸上之點如此, 故  $x$  軸之方程式為  $y=0$ ; 同樣  $y$  軸之方程式為  $x=0$ .

又如有方程式

$$x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0,$$

在圖 13 圓周上所有點之坐標皆適合於此方程式, 故此方程式之軌跡為圓。

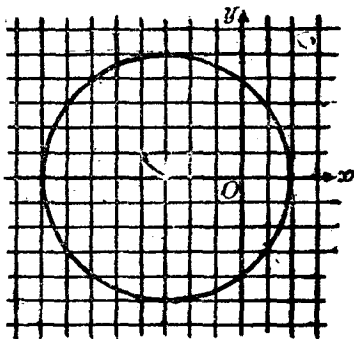


圖 13.

有方程式皆可作其圖形; 反之, 有圖形亦可求其方程式。

§ 11. 直線之一般方程式  $x, y$  之一般一次方程式為

$$Ax + By + C = 0. \quad (15)$$

定理. 直線之方程式為  $x, y$  之一次方程式。

蓋設直線通過  $A(a, b), P(x, y)$  兩點, 並設其斜度為  $m$ , 則由 (8) 式,

$$y - b = m(x - a).$$

命  $m = A, -1 = B, b - am = C$ , 則上式化為 (15) 式。

逆定理.  $x, y$  之一次方程式之軌跡為直線。

蓋設  $A(a, b)$  為在 (15) 式之軌跡上, 則  $Aa + Bb + C = 0$ . 與 (15) 式相減,

$$A(x - a) + B(y - b) = 0.$$

故 斜度 =  $(y - b) / (x - a) = -A/B$  (常數)。

因斜度為常數, 故為直線。