大學用書

統計應用數學

李銳夫　編著

正中書局印行

大學用書

統計應用數學

李銳夫 編著

正中書局印行

中華民國三十七年一月初版

統計應用數學

全一冊　定價國幣壹拾貳元叁角
（精裝本定價另加五元）
（外埠酌加運費匯費）

編著者　李銳夫
發行人　吳秉常
印刷所　正中書局
發行所　正中書局

(1977)

整：鄒
校：向

滬·本　3/1

序

本書爲民國二十八年以來，作者先後在中央政治學校經濟系與國立重慶大學會統系及統計專修科授統計應用數學時之講演稿；目的在供給研習數理統計者所必需之數學知識，而非爲數理統計.

全書分二十章. 第一與第二兩章略述幾何量之解析，爲本書之預篇；如讀者已有良好之解析幾何基礎，可以略去. 第三章至第十二章爲微積分，對於函數之極限，導微函數及積分之基本觀念，以極經濟之方法敍述，而又不失理論之嚴正. 凡初等微積分範圍內之定理及公式該述無遺. 此外並隨時插入爲統計學所特別需要之材料，如求近似積分法，戴勞級數，求函數之近似值等. 第十三章至第十五章爲微分方程式，所論僅限於常微分方程式；至於偏微分方程式，在目前雖作高深之統計研究，亦無須用此，故未列入. 第十六章論有限差式，插補法，第十七與第十八兩章論幾率，幾率積分及最小二乘方，皆爲治統計者所不可或缺之工具. 第十九與第二十兩章論線積分，特殊函數及富里哀級數，亦爲研究數理統計所必需. 此外行列式，二項定理等，統計學中應用甚廣；但本書爲供大學學生閱讀，此項代數知識已在高級中學習過，無須重複也.

中央政治學校統計教授褚一飛先生對本書之取材，多所指示；國立重慶大學數學教授周伯平先生曾校閱全稿，試教數次，並完成

插補法一章之初稿，謹此誌謝．前國立重慶大學商學院院長馬寅初先生與統計專修科主任倪亮先生對作者不斷鼓勵，尤所心感．數學書籍，排印繁複；正中書局在此印刷極度困難之際，接受本書出版，其提倡文化之精神，至爲可佩．

民國三十三年七月

作者於重慶

目 次

第一章　幾何量之解析

§1. 向量與軸　凡一直線有二相異之方向，任取其一爲**正向**(positive direction)，則其他爲**負向**(negative direction)。正向取定之直線曰**軸**(axis)。

二點 A, B 所定之線分曰**向量**(vector)；此二點因作用之不同，其一曰**起點**(initial point)，其他曰**終點**(terminal point)。自起點至終點之方向表向量之方向，自起點至終點之距離表向量之長度。

圖 1.

設 $x'x$ 軸上有一向量 AB, AB 之方向爲與軸之方向同。如以自 x' 至 x 爲正，則 AB 爲正，BA 爲負；故

$$AB = -BA. \tag{1}$$

設 A, B, C 爲軸上之任意三點，則無論其排列之次序如何，恆有關係：

$$AC = AB + BC. \tag{2}$$

依此推廣，設 $A, B, C, \cdots\cdots, H, K, L$ 爲一軸上之任意 n 點，則恆有

$$AL = AB + BC + \cdots\cdots + HK + KL. \tag{3}$$

在軸上任取一點 O 爲原點(origin)。若 A 爲軸上之任一點，並

知OA之代數值，則此點在軸上之位置得以確定；而此代數值曰A點之坐標(coördinate).

設A, B爲軸上之二點，其坐標分別爲a, b. 由(2)式，

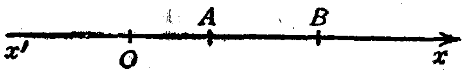

圖 2.

$$OB=OA+AB,$$

則
$$AB=OB-OA=b-a, \tag{4}$$

此卽表示向量之代數值等於其終點坐標與起點坐標之差.

(4)式爲溝通向量式與坐標式之基本公式.

§2. 射影 設P爲$x'x$軸外之一點，自P作$x'x$之垂線，命M爲其垂足，則M曰P點在$x'x$上之射影(projection). 設Q點在$x'x$上之射影爲N，則MN曰PQ向量在$x'x$上之射影，表以符號

$$MN=(PQ)_x.$$

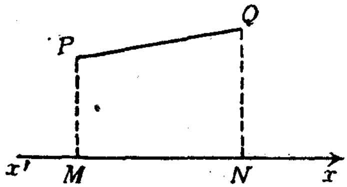

圖 3.

設$A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n-1}, A_n$爲平面上之任意$n$點，則由§1,(3)式，

$$(A_0A_1)_x+(A_1A_2)_x+\cdots\cdots+(A_{n-1}A_n)_x=(A_0A_n)_x. \tag{5}$$

§3. 直角坐標 取$x'x$與$y'y$二軸正交於原點O，命Ox, Oy爲正向，Ox', Oy'爲負向，此二軸定一平面. 設平面有一點P，其在$x'x$上之射影爲M，其在$y'y$上之射影爲N，則OM曰P點之橫坐標(abscissa)，ON曰P點之縱坐標(ordinate). 命$x=OM$, $y=ON$; x, y

曰 P 點在 xy 平面上之坐標(coördinates),以符號 $P(x,y)$ 表之.

此種坐標曰直角坐標(rectangular coördinates),爲笛卡兒(Descartes)所初創.

應用此種坐標,平面上任意一點定二實數;反之,任意二實數定平面上之一點.

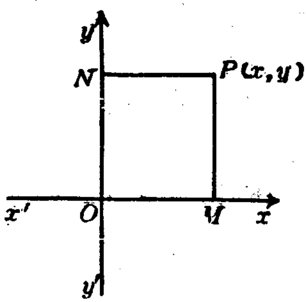

圖 4.

§4. **極坐標** 在平面上取 Ox 爲軸,O 爲極(pole).則平面上一點 P 之位置,可用 OP 旋轉之角 θ 與 OP 之長 ρ 以定之.合 θ 與 ρ 曰 P 點之極坐標(polar coördinates),以符號 $P(\rho,\theta)$ 表之.

依向量之定義,一點 $P'(-\rho,\theta)$ 爲在 OP 向後之延長線上,OP' 之絕對值爲 ρ.

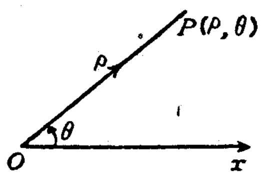

圖 5.

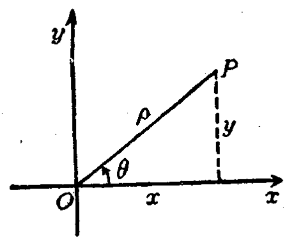

圖 6.

設一點 P 之直角坐標爲(x,y),極坐標爲(ρ,θ),則由圖 6,直角坐標與極坐標之變換式爲

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta \\ y&=\rho\sin\theta \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

§5. 線分之長 設 $P\equiv(x_1,y_1)$，$Q\equiv(x_2,y_2)$，由圖 7，因 $\overline{PQ}^2=\overline{PK}^2+\overline{KQ}^2$，故得

$$PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \qquad (7)$$

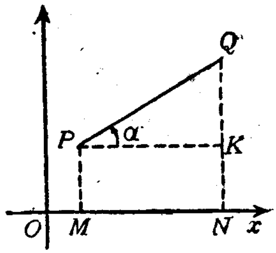

圖 7.

§6. 斜度 由圖 7，若 PQ 之延長線與 Ox 相交成 α 之角，則 α 謂之 PQ 直線之**方位角**(directional angle)，$\tan\alpha$ 謂之 PQ 直線之**斜度**(slope).

因 $0\leqq\alpha\leqq\pi$，故 $-\infty\leqq\tan\alpha\leqq\infty$. 再因 $\tan\alpha=KQ/PK$，故

$$\tan\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}. \qquad (8)$$

設 l_1 與 l_2 二直線之方位角分別爲 α_1,α_2，此處 $\alpha_2>\alpha_1$，並設 ω 爲 l_1 與 l_2 之交角，則因

$$\tan\omega=\tan(\alpha_2-\alpha_1),$$

展開右端，並令 m_1, m_2 爲 l_1, l_2 之斜度，則

$$\tan\omega=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}. \qquad (9)$$

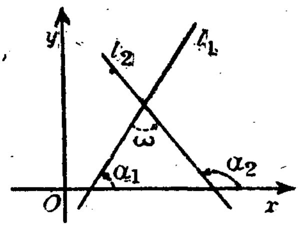

圖 8.

由(9)式得知 $l_1\parallel l_2$ 之條件爲 $m_1=m_2$；$l_1\perp l_2$ 之條件爲 $1+m_1\cdot m_2=0$，即 $m_1=-\dfrac{1}{m_2}$.

§7. 三角形之面積 設 P,Q 之直角坐標爲 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，極坐標爲 (ρ_1,θ_1)，(ρ_2,θ_2)，則就面積而言，

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\rho_1\cdot\rho_2\cdot\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}\rho_1\cdot\rho_2\cdot(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1), \qquad \text{〔由(6)式〕}$$

$$\therefore\quad \triangle OPQ=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

在此，若三角形三邊之順序取爲 OQP 向，則面積爲負；蓋此時 $\theta_2-\theta_1$ 爲順時針之方向，其正弦爲負也.故三角形之三邊若取逆時針之方向，所得之面積爲正；順時針之方向，其面積爲負.

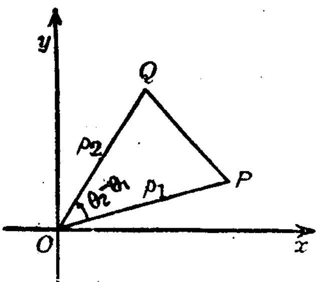

圖 9.

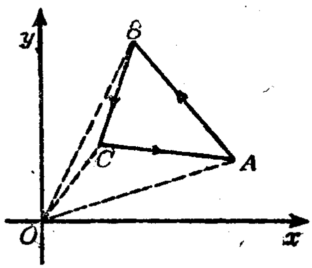

圖 10.

茲推廣之，若 $A\equiv(x_1,y_1)$，$B\equiv(x_2,y_2)$，$C\equiv(x_3,y_3)$；注意面積之正負，$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$，由(10)式，得

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

§8. 共線點 三點 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ 共線之條件為

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

蓋若三點為共線,其所成三角形之面積為零也(§7).

§9. 分點 設 $P_1 \equiv (x_1,y_1)$, $P_2 \equiv (x_2,y_2)$; 求一點 $P(x,y)$, 使分 P_1P_2 線分為二段,而

$$P_1P : PP_2 = l : m.$$

由圖 11,

$$LN : NM = P_1P : PP_2,$$

即 $$(x-x_1) : (x_2-x) = l : m.$$

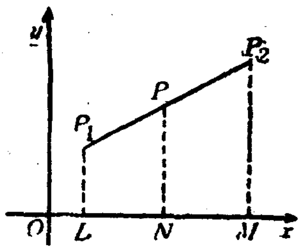

圖 11.

故
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{lx_2+mx_1}{l+m} \\ y &= \frac{ly_2+my_1}{l+m} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$l:m$ 曰位比(position ratio). 若 P 居 P_1P_2 之內,位比為正;若 P 居 P_1P_2 之外,位比為負. 當 $P \to P_1$, $l:m \to 0$; 當 $P \to P_2$, $l:m \to \infty$.

又因

$$\frac{l}{m} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1P_2+P_2P}{PP_2} = \frac{P_1P_2}{PP_2} - 1,$$

當 $PP_2 \to \infty$, $l:m \to -1$. 茲以圖 12 表之如次:

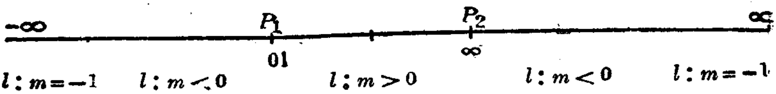

圖 12.

特例，若 P 爲 P_1P_2 之中點，則 $l:m=1$，由(13)式，

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ y&=\frac{1}{2}(y_1+y_2) \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

習　題　一

1. 試證以上公式(3).

2. 設 A, B, C, D 爲軸上之任意四點，試證

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$

3. 試證平行向量在同軸上之射影之比等於其向量之比.

4. 設 $P\equiv(-2,3)$, $Q\equiv(4,-1)$；求 PQ 之長.

5. 試求三角形 $(-2,3)$, $(-7,5)$, $(3,-5)$ 之面積.

6. 試求四邊形 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4) 之面積.

7. 試求三角形 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) 之重心.

8. 試證 $(6,2)$, $(-2,-2)$, $(12,5)$ 爲共線，並求其位比.

§10. 幾何圖形與代數方程式　凡曲線(直線爲曲線之特例)可視爲無窮數之點所構成. 若一點 P 之坐標常適合於一定方程式，則此點常在一軌跡(locus)或曲線(curve)之上，此方程式謂之**軌跡之方程式**，而軌跡曰**方程式之軌跡**.

例如在 x 軸上所有點之縱坐標皆爲 0,而在 xy 平面上僅有 x 軸上之點如此,故 x 軸之方程式爲 $y=0$;同樣 y 軸之方程式爲 $x=0$.

又如有方程式

$$x^2+y^2+6x-16=0,$$

在圖 13 圓周上所有點之坐標皆適合於此方程式,故此方程式之軌跡爲圓.

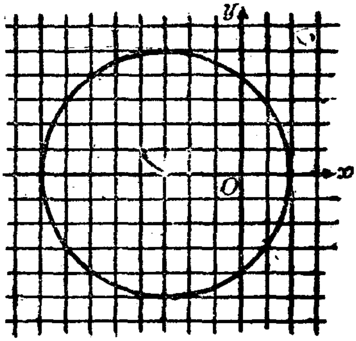

圖 13.

有方程式皆可作其圖形;反之,有圖形亦可求其方程式.

§11. **直線之一般方程式** x,y 之一般一次方程式爲

$$Ax+By+C=0. \tag{15}$$

定理. 直線之方程式爲 x,y 之一次方程式.

蓋設直線通過 $A(a,b)$, $P(x,y)$ 兩點,並設其斜度爲 m,則由(8)式,

$$y-b=m(x-a).$$

命 $m=A$, $-1=B$, $b-am=C$,則上式化爲(15)式.

逆定理. x,y 之一次方程式之軌跡爲直線.

蓋設 $A(a,b)$ 爲在(15)式之軌跡上,則 $Aa+Bb+C=0$. 與(15)式相減,

$$A(x-a)+B(y-b)=0.$$

故 $$斜度=(y-b)/(x-a)=-A/B(常數).$$

因斜度爲常數,故爲直線.