高等学校教学用書

复变函数論方法

下册

M. A. 拉甫倫捷夫
Б. A. 沙巴特 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

复变函数論方法

下册

M. A. 拉甫倫捷夫 著
Б. A. 沙巴特
施祥林 夏定中譯

高等教育出版社

本書是根据苏联國家技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的拉甫倫捷夫（М. А. Лаврентьев）和沙巴特（Б. А. Шабат）合著“复变函数論方法”（Методы теории функций комплексного переменного）1951 年版譯出的。原書經苏联高等教育部審定为國立大学数学力学系力学專業、物理系和物理数学系的教学参考書。

本書中譯本分上下兩册出版。

中譯本下册包括：保角映射的变分原理、函数論在分析上的应用、运算法和它的应用、特殊函数等四章。

本書由南京大学施祥林、夏定中合譯。

复变函数論方法

下　册

М. А. 拉甫倫捷夫，Б. А. 沙巴特著

施祥林　夏定中譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海勞動印制廠印刷　新華書店總經售

統一書號 13010·216　開本 850×1168 1/32　印張 10 14/16　字數 301,000

一九五七年三月第一版

一九五七年三月上海第一次印刷

印數 1—11,000　定價(8) ¥1.20

目　錄

第四章　保角映射的变分原理

第五章　函数論在分析上的应用

第六章 运算法和它的应用

第七章 特殊函数

57. 基本变分原理 我們先來規定一些記号。由曲線 C 所圍成的区域，我們記作 $D(C)$。把 $D(C)$ 保角地映射到單位圓上去、並且使区域內的一个确定的点 z_0 在这映射下变換成坐标原点的那个函数，我們記作

$$w=f(z, C);\quad f(z_0, C)=0。\tag{1}$$

滿足所說条件的函数可以有無限多个，但是它們都僅僅彼此相差一个形如 $e^{i\vartheta}$ 的因子，ϑ 是一个实数。記号 $f(z, C)$ 我們理解为是表示这些函数中的任何一个的，但在量 ϑ 是很重要的那些問題中，我們將用补充的条件來确定它。在映射(1)下变換成圓周

$$|w|=\rho<1$$

的那些閉曲線，我們用 C_ρ 來表示，称它为等高線。

用一条周線 $\tilde{C}$ 來代替周線 C，称作周線 C 的形变。我們假定区域 $D(C)$ 与 $D(\tilde{C})$ 都是对於点 z_0 的星形区域，即，假定它們的边界 C 与 $\tilde{C}$，在以 z_0 为極点的極坐标系內，可以借單值函数 $r(\varphi)$ 与 $\tilde{r}(\varphi)$ 用方程

$$r=r(\varphi)$$

与

$$r=\tilde{r}(\varphi)$$

來表示。在周線 C 上，使这兩个函数的差的模

$$|\tilde{r}(\varphi)-r(\varphi)|$$

达到最大值的那个点

$$z_2=z_0+r_2\,e^{i\varphi_2},$$

及其在周線 $\tilde{C}$ 上的对应点

$$\tilde{z}_2=z_0+\tilde{r}_2\,e^{i\varphi_2},$$

我們称做最大形变点，数

$$\lambda=\frac{\tilde{r}_2}{r_2}$$

称为周線的最大形变。

定性理論的基本变分原理，所謂林德劳甫 (Lindelöf) 原理，是說：

如果僅限於考慮把包含固定点 z_0（在每一个这样的映射下，它都对应於点 $w=0$）的区域映到單位圓上去的那些映射的話，那末，当把区域的边界向内压縮时：1）所有的等高線都压縮；2）在点 z_0 处的延伸系数增大；3）在边界上保持不动的那些点处的延伸系数（因而，特别是，边界的未經形变部分的像的長度）減小；4）在最大形变点处的延伸系数增大到 $\frac{1}{\lambda}$ 倍以上。

換句話說，有下述定理成立：

定理 1. 如果区域 $D(\widetilde{C})$ 包含在 $D(C)$ 内，那末：

1）对於任何一个 ρ $(0<\rho<1)$，区域 $D(\widetilde{C}_\rho)$ 都包含在 $D(C_\rho)$ 内，並且只有当 $\widetilde{C}$ 与 C 相合时，$\widetilde{C}_\rho$ 与 C_ρ 方能相接触；

2）在点 z_0 处有

$$|f'(z_0, \widetilde{C})| \geqslant |f'(z_0, C)|, \tag{2}$$

其中的等号只有当 $\widetilde{C}$ 与 C 相合时方能成立；

3）如果周線 $\widetilde{C}$ 与 C 有公共点 z_1，那末在这个点处必有

$$|f'(z_1, \widetilde{C})| \leqslant |f'(z_1, C)|, \tag{3}$$

其中的等号只有当 $\widetilde{C}$ 与 C 相合时方能成立；

4）如果这兩个区域对於 z_0 都是星形的，那末在最大形变点处有

$$|f'(\tilde{z}_2, \widetilde{C})| \geqslant \frac{1}{\lambda}|f'(z_2, C)|, \tag{4}$$

其中 $\lambda<1$ 是周線的最大形变。

首先，我們注意，只要就周線 $\widetilde{C}$ 与 C 僅在一小段 (a, b) 上不同的情形來証明这定理便夠了，在这一小段上 $\widetilde{C}$ 是一段圓周弧，其曲率同曲線 C 在 (a, b) 上的曲率很接近，於是 $D(\widetilde{C})$ 与 $D(C)$ 僅相差一塊小面積 σ（圖 126）。事实上，C 的任何一个变更，都可以由繼續施行这种簡單的变更而得到，所以，如果对於这种情形，定理已經証明，那末对於普遍的情形这定理便也已証明了。

現在我們引進一个輔助的 ζ 平面，並且用一个保角映射把区域

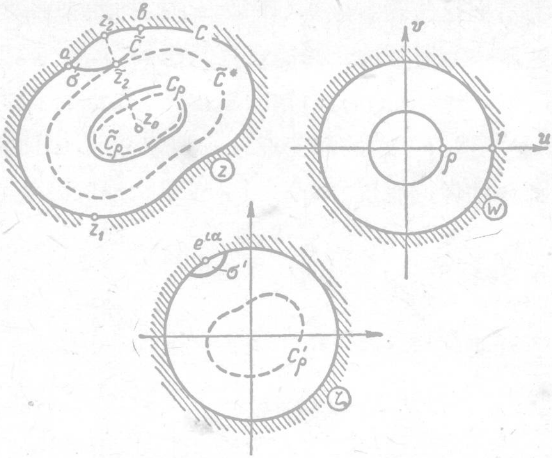

圖 126

$D(C)$ 映到單位圓 $|\zeta|<1$ 上:

$$\zeta=f(z, C), \quad f(z_0, C)=0。$$

設这时 $\tilde{C}$ 被变換成曲線 $\tilde{C}'$, 包含在 $\tilde{C}'$ 与圓周 $|\zeta|=1$ 之間的那塊面積等於 σ' (圖 126)。 我們用一个保角映射把区域 $D(\tilde{C}')$ 映成 w 平面中的單位圓:

$$w=g(\zeta), \quad g(0)=0。$$

因为在不計高級無限小的程度內, 可以把面積 σ' 看作是圓月牙形,所以可以拿第 34 節中的映射(8)來作为 g:

$$w=g(\zeta)=\zeta\left\{1+\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+\zeta e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{-i\alpha}}\right\}, \tag{5}$$

其中 α 是面積 σ' 中任何一个点的輻角。我們來求 g 的逆映射。为了这个目的,我們把(5)式改寫成

$$\zeta=w\left\{1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+\zeta e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{-i\alpha}}\right\}$$

的形狀(我們利用了下述事实: 在不計高級無限小的程度內, 当 η 很小时, $\frac{1}{1+\eta}=1-\eta$)。因为 w 与 ζ 相差一个与 σ' 同級的無限小量,所以可

以在含有因子 σ' 的項内用 w 來代替 ζ，而不改变我們的精确度。因此

$$\zeta=w\left\{1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+we^{-i\alpha}}{1-we^{-i\alpha}}\right\}。\qquad (6)$$

我們把 ζ 平面中在映射 $w=g(\zeta)$ 下与圓周 $|w|=\rho$ 相对应的那条曲線記作 C'_ρ。为了要得出 C'_ρ 的参数方程，我們置

$$\zeta=re^{i\varphi},\quad w=\rho e^{i\theta},$$

求表达式(6)的对数，

$$\ln\frac{\zeta}{w}=\ln\frac{r}{\rho}+i(\varphi-\theta)\approx-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1+\rho e^{i(\theta-\alpha)}}{1-\rho e^{i(\theta-\alpha)}},$$

然后把实数部分与虛数部分分开：

$$\left.\begin{aligned}r&=\rho\left(1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}\right),\\ \varphi&=\theta-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{2\rho\sin(\theta-\alpha)}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}。\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

由这兩个方程中，可以得出所要証明的定理中的全部結論。顯然，我們有

$$w=f(z,\widetilde{C})=g[f(z,C)];\qquad (8)$$

所以，在映射 $\zeta=f(z,C)$ 下区域 $D(\widetilde{C}_\rho)$ 变換成 $D(C'_\rho)$。因为在此时区域 $D(C_\rho)$ 变換成圓 $|\zeta|<\rho$，所以要証明定理的第一部分，只要証明 $D(C'_\rho)$ 包含在圓 $|\zeta|<\rho$ 内就夠了。可是因为

$$1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2\leqslant(1+\rho)^2,$$

所以根据(7)式，对於周線 C'_ρ 上所有的点來說都有

$$|\zeta|=r\leqslant\rho\left(1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)<\rho。\qquad (9)$$

这样，定理中的第一个結論已經完全証明。

把不等式(9)除以 ρ，並令 ρ 趋於 0，我們得到極限

$$\left|\frac{d\zeta}{dw}\right|_{w=0}\leqslant1-\frac{\sigma'}{2\pi}<1。$$

但是这样我們就有 $|g'(0)|>1$，所以根据(8)式

$$|f'(z_0,\widetilde{C})|=|g'(0)|\cdot|f'(z_0,C)|>|f'(z_0,C)|,$$

这便証明了第二个結論。

現在設点 $\zeta=re^{i\varphi}$ 沿着圓周 $|\zeta|=1$ 的半徑趋近於这圓周上的一个点 $e^{i\varphi}$，並設 $e^{i\varphi}$ 位於 σ' 的外面。於是，由於映射是保角的，其对应点 $w=\rho e^{i\theta}$ 也沿着与圓周 $|w|=1$ 的半徑相切的方向趋近於 $e^{i\theta}$，所以我們有:

$$|\varDelta\zeta|=|\zeta-e^{i\varphi}|=1-r,$$

$$|\varDelta w|=|w-e^{i\theta}|\approx 1-\rho。$$

但是由不等式(9)有

$$\frac{1-\rho}{1-r}\leqslant\frac{1-\rho}{1-\rho+\dfrac{\sigma'\rho}{2\pi}\dfrac{1-\rho}{1+\rho}}\approx 1-\frac{\sigma'}{2\pi}\frac{\rho}{1+\rho},$$

在这式子中取当 $r\to 1$ 时的極限，我們便得到:

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=e^{i\varphi}}=\lim_{r\to 1}\frac{1-\rho}{1-r}\leqslant 1-\frac{\sigma'}{4\pi}。$$

由此就得出了定理中的結論 3)。

要証明定理的最后那个結論，我們用 $\widetilde{C}^*$ 來記由 C 經过相似变換

$$\zeta=z_0+\lambda(z-z_0)$$

所得的那条曲線(圖 126)。顯然，函数

$$w=f(\zeta,\widetilde{C}^*)=f\left(z_0+\frac{\zeta-z_0}{\lambda},C\right) \tag{10}$$

作出一个把区域 $D(\widetilde{C}^*)$ 映成單位圓的保角映射。可是 $D(\widetilde{C}^*)$ 包含在区域 $D(\widetilde{C})$ 內，並且点 $\tilde{z}_2$ 旣屬於 $\widetilde{C}$，也屬於 $\widetilde{C}^*$，所以根据这定理的結論 3) 有

$$|f'(\tilde{z}_2,\widetilde{C}^*)|<|f'(\tilde{z}_2,\widetilde{C})|。$$

但因为根据(10)有

$$f'(\tilde{z}_2,\widetilde{C}^*)=\frac{1}{\lambda}f'(z_2,C),$$

所以

$$|f'(\tilde{z}_2,\widetilde{C})|\geqslant\frac{1}{\lambda}|f'(z_2,C)|。$$

於是定理便完全証明了。

下面的所謂孟台尔 (Montel) 原理，是剛才所証明的那个定理的一个簡單推論:

定理 2. 設区域 $D(C)$ 与 $D(\widetilde{C})$ 都包含点 z_0，並且

$$C=C_1+C_2, \quad \widetilde{C}=\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2,$$

其中 $\widetilde{C}_1$ 位於 $D(C)$ 內，$\widetilde{C}_2$ 在 $D(C)$ 外面，C_2 在 $D(\widetilde{C})$ 內，C_1 在 $D(\widetilde{C})$ 外面(見圖 127)。此外，並設在映射

$$w=f(z, C), \quad w=f(z, \widetilde{C})$$

下，弧 C_1 与 $\widetilde{C}_1$ 分別变換成弧 ϑ_1 与 $\tilde{\vartheta}_1$，那末在这兩段弧的長度之間便有关系[①]

$$\tilde{\vartheta}_1 \geqslant \vartheta_1, \tag{11}$$

其中的等号只有在 C 与 $\widetilde{C}$ 相合时方能成立。

为了要証明这定理，我們引入由曲線 $C'=\widetilde{C}_1+C_2$ 所圍成的輔助区域 $D(C')$，並把 C_2 在映射

$$w=f(z, C')$$

下的像記作 ϑ'。因为 $D(C')$ 包含在 $D(\widetilde{C})$ 內，並且弧 $\widetilde{C}_1$ 同时屬於 C' 与 $\widetilde{C}$，所以根据林德劳甫原理的第三个結論，在 $\widetilde{C}_1$ 上的每一个点处都有

$$|f'(z, \widetilde{C})| \geqslant |f'(z, C')|。$$

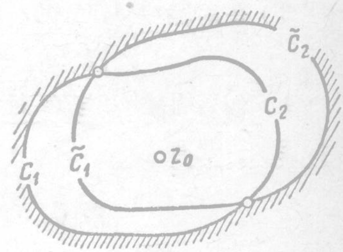

圖 127

因此，考慮到導数的模的几何意义，我們有

$$\tilde{\vartheta}_1 \geqslant 2\pi-\vartheta' 。 \tag{12}$$

另一方面，$D(C')$ 位於区域 $D(C)$ 的內部，而弧 C_2 同时屬於曲線 C' 与 C，所以基於同一理由有

$$\vartheta' \leqslant 2\pi-\vartheta_1 。 \tag{13}$$

把不等式(12)与(13)联合起來，我們便得出所求的不等式(11)。

① 我們用同一文字來表示弧的本身与弧的長度。

58. 原理的推廣 在上節中所証明的那个基本变分原理，也可以推廣到那些把区域保角地映射成其他类型規范区域的函数上去。

1）圓的外部 我們把在周線 C 外部的那个区域記作 $\varDelta(C)$；設函数

$$w=F(z,C),\quad F(\infty,C)=\infty \tag{1}$$

把区域 $\varDelta(C)$ 保角地映射到單位圓的外部 $|w|>1$ 上。沿用在上節中所採用的那些記号，我們可以建立下述定理：

定理1. 如果区域 $\varDelta(\widetilde{C})$ 包含在 $\varDelta(C)$ 內，那末

1）对於任何一个 $\rho>1$，区域 $\varDelta(\widetilde{C}_\rho)$ 都包含在区域 $\varDelta(C_\rho)$ 內；对於無論怎样的一个 ρ 來說，都只有在 $\widetilde{C}$ 与 C 相合时，周線 $\widetilde{C}_\rho$ 与 C_ρ 方能相接触；

2）在無窮远点处有

$$|F'(\infty,\widetilde{C})|\geqslant|F'(\infty,C)|; \tag{2}$$

3）在周線 $\widetilde{C}$ 与 C 的公共点 z_1 处有

$$|F'(z_1,\widetilde{C})|\leqslant|F'(z_1,C)|; \tag{3}$$

4）如果周線 $\widetilde{C}$ 与 C 对於点 $z=0$ 都是星形的，那末在最大形变点 z_2 与 $\tilde{z}_2$ 处有

$$|F'(\tilde{z}_2,\widetilde{C})|\geqslant\frac{1}{\lambda}|F'(z_2,C)|, \tag{4}$$

等号只有在 $\widetilde{C}$ 与 C 相合时方能成立。

这定理的証明，可以照上節中所証明的那个定理同样地來作出，不过要用对單位圓外部的映射來代替（5），並把其中的那个月牙形挪到圓的外部來。証明这定理的最簡單的方法，是利用变数代換

$$z-z_0=\frac{1}{\zeta},\quad w=\frac{1}{\omega},$$

把它化成上節中已証明的那个定理。

2）半平面的情形 設曲線 C 通过無窮远点，並且在無窮远点处

具有切線与有限曲率①；於是，当 R 足夠大时，圓周 $|z|=R$ 与 C 相交於兩个点，並且可以使这兩个点的差的輻角与 π 任意接近。

我們还假定，正向半虛軸上的足夠远的部分不与 C 相交，並把以 C 为边界的兩个区域中包含了这部分虛軸的那一个区域記作 $D(C)$。我們規定用

$$w=f(z, C), \quad f(\infty, C)=\infty, \quad |f'(\infty, C)|=1 \tag{5}$$

來記作出把区域 $D(C)$ 映成上半个平面 $v>0$ 的保角映射的那个函数。根据存在定理，在这些对於曲線 C 的条件之下，函数 f 存在，並且在可以相差一个实数常数項的程度內被确定。由於在以后这个相差的常数項並不起什么作用，所以我們可以把 f 理解为这些函数中的任何一个。最后，設 C_v 与 $\widetilde{C}_v$ 分别是在映射

$$w=f(z, C)$$

与映射

$$w=f(z, \widetilde{C})$$

下被变换成直線

$$v=\text{const}$$

的那兩条曲線(圖 128)。在这些記号之下，我們有下述定理：

定理 2. 設曲線 $\widetilde{C}$ 也通过点 ∞，並且在無窮远处与 C 有共同的切線。如果此外区域 $D(\widetilde{C})$ 还包含在区域 $D(C)$ 內，那末

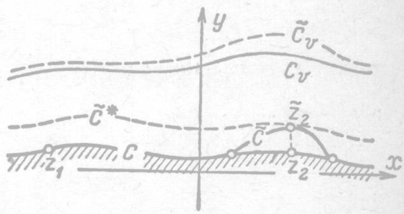

圖 128

1) 对於任何一个 $v>0$，区域 $D(\widetilde{C}_v)$ 都包含在区域 $D(C_v)$ 內，並且只有当 $\widetilde{C}$ 与 C 相合时，$\widetilde{C}_v$ 与 C_v 方能相接触；

2) 如果 C 与 $\widetilde{C}$ 有一个公共的正則点 z_1，那末在这个点处便有

$$|f'(z_1, \widetilde{C})| \leqslant |f'(z_1, C)|; \tag{6}$$

① 这便是說，由 C 經变換 $\zeta=\frac{1}{z}$ 而得到的那条曲線 C^*，在点 $\zeta=0$ 处具有切線与有限曲率。

3）如果曲線 C 与 $\widetilde{C}$ 由單値函数

$$y=y(x),\quad y=\tilde{y}(x)$$

來給出，而 z_2 与 $\tilde{z}_2$ 分别是这兩条曲線上使得差

$$\tilde{y}(x)-y(x)$$

达到最大値的那兩个点，那末便有

$$|f'(\tilde{z}_2,\widetilde{C})|\geqslant|f'(z_2,C)|,\tag{7}$$

並且（6）与（7）中的等号，只有当 $\widetilde{C}$ 与 C 相合时方能成立。

根据在上一節中所举过的理由，我們只需要考慮当 C 与 x 軸相合、$\widetilde{C}$ 与 C 僅在無限小的一段 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 上不同、在这段上 $\widetilde{C}$ 是一段曲率很小的圓弧时的情形便夠了。在这情形下

$$f(z,C)\equiv z,$$

根据第 34 節中的公式（7），在不計高級無限小的精确程度內，

$$f(z,\widetilde{C})\approx z+\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{z-a}。\tag{8}$$

它的反函数可以照在上一節中那样來求得，其形狀是

$$z\approx w-\frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{w-a}。$$

在其中置

$$w=u+iv,$$

並把实数部分与虛数部分分开，在固定了 v 时我們便得出曲線 $\widetilde{C}_v$ 的参数方程：

$$\left.\begin{aligned}x&\approx u-\frac{\sigma}{\pi}\frac{u-a}{(u-a)^2+v^2},\\ y&\approx v+\frac{\sigma}{\pi}\frac{v}{(u-a)^2+v^2}。\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

从（9）的第二个方程中可以看出，$\widetilde{C}_v$ 位於区域 $y>v$ 內，即，位於区域 $D(C_v)$ 內，——这便証明了定理中的第一个結論。

要証明結論 2），我們在 x 軸上取距离 a 較 σ 为远的任何一个点 x，並在这个点处求函数（8）的導数；我們有

$$f'(x, \widetilde{C}) \approx 1-\frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{(x-a)^2}<1,$$

这便是所需要証明的。

要証明結論 3)，我們把 C 按向量 $\widetilde{z}_2-z_2$（向上）作平行平移后所得到的那条曲線，記作 $\widetilde{C}^*$。顯然，我們有

$$f(z, \widetilde{C}^*)=f(z-\widetilde{z}_2+z_2, C),$$

因此，

$$f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}^*)=f'(z_2, C)。$$

另一方面，$D(\widetilde{C}^*)$ 包含在区域 $D(\widetilde{C})$ 內，並且 $\widetilde{z}_2$ 是 $\widetilde{C}$ 与 $\widetilde{C}^*$ 的公共点；所以，根据已經証明的結論 2)，

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}^*)| \leqslant |f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C})|。$$

把最后这兩个关系式相比較，我們便得出所求的不等式（7）。於是定理就完全証明了。

所証明的这个定理可以有簡單的流体力学上的解釋。設有一个很深的具有平滑的垂直側壁的渠道，它的底部的截面的形狀为曲線 C。那末，

如果在渠道的某一处底部升高了，那么流体的所有流線也便都升高，而且在底部的沒有經过形变的点处，流速減小。

3) **帶形的情形** 設 C_0 与 C 是兩段弧，除了它們的端点 a_1 与 a_2 之外，沒有公共点。这时我們並不把这兩个点 a 中有一个点或兩个点都与無窮远点 $z=\infty$ 相合的情形除外。用 $D(C_0, C)$ 來記由曲線 C_0 与 C 所圍成的那个区域，並用

$$w=f(z, C_0, C);\ f(a_1, C_0, C)=-\infty,\ f(a_2, C_0, C)=\infty \quad (10)$$

來表示把区域 $D(C_0, C)$ 保角地映射到帶形 $0<v<1$ 上去的那个函数。函数 $f(z, C_0, C)$ 在可以相差一个实常数項的程度內被确定，这常数項現在对我們不起什么作用。我們把在映射(10)下变換成直線

$$v=\text{const} \quad (0<v<1)$$

的曲線記作 C_v，$\widetilde{C}_v$。

我們还假定,曲線 C_0 与 C 可以借單值函数

$$y=y_0(x),\quad y=y(x)$$

來給出,並且 $|y_0'(x)|$ 与 $|y'(x)|$ 都不超过一个正的常数 m。我們來考慮平行直線束

$$y=kx+b,\quad |k|<\frac{1}{m},$$

这个直線束中的每一条直線,同 C_0 与 C 的交点都不多於一个。曲線 C_0 上使得这直線束的包含在 C_0 与 $\widetilde{C}_0$ 之間的直線段达到最大值的那个点 z_2, 以及其在曲線 $\widetilde{C}_0$ 上的对应点 $\widetilde{z}_2$, 我們称为(方向 k 的)最大形变点。

有下述定理成立:

定理 3. 如果区域 $D(\widetilde{C}_0, C)$ 包含在区域 $D(C_0, C)$ 内,那末

1) 对於任何一个 $v(0<v<1)$,区域 $D(\widetilde{C}_v, C)$ 总包含在 $D(C_v, C)$ 内,並且只有当 $\widetilde{C}_0$ 与 C_0 相合时,曲線 $\widetilde{C}_v$ 与 C_v 方能相接触;

2) 如果曲線 $\widetilde{C}_0$ 与 C_0 有公共点 z_1, 那末在这个点处有

$$|f'(z_1, \widetilde{C}_0, C)|\leqslant|f'(z_1, C_0, C)|; \tag{11}$$

3) 在曲線 C 上的任何一个点 z 处,有

$$|f'(z, \widetilde{C}_0, C)|\geqslant|f'(z, C_0, C)|; \tag{12}$$

4) 在最大形变点处有

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0, C)|\geqslant|f'(z_2, C_0, C)|。 \tag{13}$$

在(11)—(13)中的等号,只有在曲線 $\widetilde{C}_0$ 与 C_0 相合时方能成立。

同在前面所討論的那些情形中一样,这定理的証明可以在下述假定下來進行: $D(C_0, C)$是單位帶形 $0<y<1$ (即, C_0 是 x 軸, C 是直線 $y=1$), $\widetilde{C}_0$处处与 C_0 相合,僅在很小的一段 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 处除外, 在这一段上 $\widetilde{C}_0$ 是一段曲率很小的圓弧。在这样的假定之下, 根据第 34 節中的公式(13), 函数 $f(z, \widetilde{C}_0, C)$ 的形狀应当是

$$w=f(z, \widetilde{C}_0, C)\approx z+\frac{\sigma}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi(z-a)}{2}, \tag{14}$$

其中 σ 是去掉了的那塊月牙形的面積。定理的結論 1) 可以照先前那兩个定理中那样地來驗証，所以对於它的証明我們就不討論了。要証明結論 2) 与 3)，我們來考慮函数(14)的導数。在 x 軸上我們有

$$f'(x, \widetilde{C}_0, C) \approx 1-\frac{\pi\sigma}{4}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi(x-a)}{2}}<1,$$

由此便得出不等式(11)。在直線 $y=1$ 上我們有

$$f'(x+i, \widetilde{C}_0, C) \approx 1+\frac{\pi\sigma}{4}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi(x-a)}{2}}>1,$$

由此便得出不等式(12)(在演算过程中我們曾利用了

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{2}+z\right)=i\operatorname{ch} z$$

这关系式)。

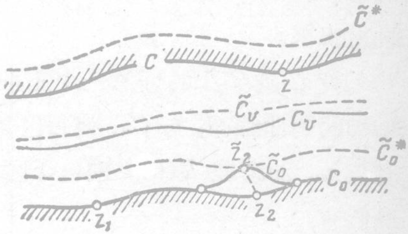

圖 129

为了要証明結論 4)，我們把 C_0 与 C 沿線段 $z_2\widetilde{z}_2$ 作向上平移后所得到的那兩条曲線記作 $\widetilde{C}_0^*$ 与 $\widetilde{C}^*$ (圖129)。顯然，函数

$$w=f(z, \widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*)=f(z+z_2-\widetilde{z}_2, C_0, C) \tag{15}$$

把区域 $D(\widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*)$ 映射到帶形 $0<v<1$上。因为 $D(\widetilde{C}_0, C)$ 包含区域 $D(\widetilde{C}_0^*, C)$，並且 $\widetilde{C}_0^*$ 与 $\widetilde{C}_0$ 有公共点 $\widetilde{z}_2$，所以按照(11)，

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0^*, C)| \leqslant |f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0, C)|。 \tag{16}$$

另一方面，因为 $D(\widetilde{C}_0^*, C)$包含在 $D(\widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*)$内，所以按照 (12)，在那条不經形变的边界 $\widetilde{C}_0^*$ 上的任何一个点处，特别是，在点 $\widetilde{z}_2$ 处，有

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*)| \leqslant |f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0^*, C)|。 \tag{17}$$

把不等式(16)与(17)联合起來，我們便得出：

$$|f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*)| \leqslant |f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0, C)|,$$

但是，由(15)我們有

$$f'(\widetilde{z}_2, \widetilde{C}_0^*, \widetilde{C}^*)=f'(z_2, C_0, C),$$