高等学校教学用書

常微分方程論講义

И. Г. 彼得罗夫斯基著

高等教育出版社

高等学校教学用書

常微分方程論講义

И. Г. 彼得罗夫斯基著
黄克欧譯
胡祖熾校訂

(修訂本)

高等教育出版社

本書原系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的彼得罗夫斯基（И. Г. Петровский）著“常微分方程論講义”（Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений）1949年第三版譯出。

譯者現在根据1952年出版的原書增訂版（第四版）重新校訂了一遍，补譯了新版中增加的部分。在校訂时，蒙数学研究所張历宁同志提出許多宝貴意見，并承唐山鉄道学院董大儒同志在校閱时加以协助，特此致謝。

原書曾荣获1951年度斯大林二等奖，并經苏联高等教育部审定为綜合大学数理系教科書。

常微分方程論講义

И. Г. 彼得罗夫斯基著

黃克欧譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印裝 新华書店發行

統一書号13010·257 開本 $850\times1168^{1}/_{32}$ 印張 $6^{15}/_{16}$

字數163,000 印數4,001—8,500 定價(6)¥0.80

1953年10月商務初版(共印8,500)

1957年1月新1版

1959年5月第2版(修訂本) 1959年5月北京第2次印刷

序　　言

为中譯本而作

1936—40年間我在沙拉托夫大学与莫斯科大学教过这份講义，此后为了几次出版曾修訂多次(第一版是1939年出版)。在这些修訂工作中，А. М. 巴拉班諾夫(Барабанов)、А. Д. 米希奇斯(Мышкис)及О. А. 阿列依尼克(Олейник)給了我很大的帮助。

在这講义及在以后为了出版的修訂工作中，我力求选擇常微分方程論中的最主要的与最基本的部分。

О. А. 阿列依尼克及А. Д. 米希奇斯編輯了習題安排在本書之中。这往往是一些比較难解的習題，因此讀者如果不能很容易地解决这类習題，也无須乎惶惑不安。这类習題大大地扩大了本書的基本內容。

我極重視，我的書被譯成偉大的中国人民的語言，如果这書对于优秀的中国青年起作用的話，我是很高兴的。

И. 彼得罗夫斯基

1953年4月2日于莫斯科

第一版序言

这个講义我曾在1936—1937学年度在沙拉托夫国立大学和在莫斯科国立大学講授过(在莫斯科国立大学講授时曾稍加修改)。我不想叙述尽可能多的能用于各种特殊类型微分方程的积分方法；用俄文写的教程中已經有了充分完备地叙述了这些方法

的教程。我也不打算叙述常微分方程理論的各部分。在整个理論中我只选擇了几个題目，而力求把它們叙述得尽可能地完全而且严格，如同現在大多数数学学科中所叙述的一样。我沒有假定我的学生知道分析函数的理論，所以对于学習本書所必須有的关于这个理論的知識，我或者是加以解釋，或者是确切地指出在那里可以找到它們。

我应該感謝巴拉班諾夫(А. И. Барабанов)，因为他的笔記是叙述前 21 节的基础。并应感謝斯捷帕諾夫(В. В. Степанов)、加里別尔(С. А. Гальперн)及米希奇斯(А. Д. Мышкис)，因为他們审查了我的全部稿子，并作了一系列宝貴的指示。

依·彼得罗夫斯基

一九三九年

第四版序言

当准备这版本时，阿列依尼克与米希奇斯給我很大的帮助。特別是米希奇斯在这版本中添写了有关却瀓雷金定理的一节。阿列依尼克与米希奇斯增添了一些新習題。同以前一样，这些習題大多数都不是簡單的練習。这些習題的大部分扩充了本書的基本內容，可用于課程作业。

依·彼得罗夫斯基

目　录

序言 …… 3
第一版序言 …… 3
第四版序言 …… 4

第一部分　含一个未知函数的一阶微分方程式

第一章　一般概念 …… 1
　§1. 定义　例題 …… 1
　§2. 几何解釋　問題的推广 …… 2
第二章　最簡單的微分方程式 …… 8
　§3. 形状如 $\frac{dy}{dx}=f(x)$ 的方程式 …… 8
　§4. 形状如 $\frac{dy}{dx}=f(y)$ 的方程式 …… 11
　§5. 可分离变数的微分方程 …… 13
　§6. 齐次微分方程 …… 16
　§7. 綫性微分方程 …… 18
　§8. 全微分方程 …… 20
　§9. 积分因式 …… 23
第三章　通論 …… 28
　§10. 欧拉(Euler)折綫 …… 28
　§11. 阿尔最拉(Arzela)定理 …… 30
　§12. 用裴稚乐(Peano)法証明微分方程 $y'=f(x,y)$ 的解存在 …… 33
　§13. 阿斯古德(Osgood)关于解的唯一性的定理 …… 39
　§14. 关于欧拉折綫的补充說明 …… 43
　§15. 逐次逼近法 …… 44
　§16. 压縮映象原理 …… 50
　§17. 压縮映象原理的几何解釋 …… 55
　§18. 关于具有正則右端的微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的
　　　辜西(Cauchy)定理 …… 58
　§19. 微分方程解的可微分次数 …… 63
　§20. 解对于开始値的和对于方程右端的依賴性 …… 63
　§21. 阿达馬(Hadamard)引理 …… 68

§22. 关于解对参变数的依赖性的定理……70
§23. 奇点……75
§24. 奇曲綫……80
§25. 积分曲綫族的全局性态……82
§26. 导数未解出的微分方程……86
§27. 包絡綫……96

第二部分 常微分方程組

第四章 通論……100
§28. 化任意方程組为一阶方程組……100
§29. 几何意义·定义……101
§30. 基本定理的叙述……104
§31. 运算方程組的压縮映象原理……111
§32. 压縮映象原理对于微分方程組的应用……115
第五章 綫性微分方程組通論……118
§33. 定义·自微分方程組的一般理論导出的推論……118
§34. 一阶齐次組的基本定理……121
§35. 隆斯基行列式的表达式……126
§36. 据已給的基本解組造出齐次綫性微分方程組……128
§37. 对于 n 阶微分方程式之推論……129
§38. 綫性齐次微分方程式的降阶……132
§39. 二阶齐次綫性方程式的解的零点……134
§40. 一阶非齐次綫性方程組……137
§41. 对于 n 阶非齐次綫性方程式的推論……139
§42. 却潑雷金关于微分不等式的定理……141
第六章 常系数綫性微分方程組……146
§43. 預先应注意的事项……146
§44. 关于化为典則形式的定理……148
§45. 綫性变换的不变式……154
§46. 初等因子……157
§47. 齐次方程組的基本解的求法……160
§48. 对于 n 阶齐次方程式的应用……165
§49. 非齐次方程組的特解求法……167
§50. 化微分方程式 $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}$ 为典則形式……170
§51. 解的李浦諾夫(Ляпунов)稳定性……172
§52. 一个物理学的例題……179
附录 含一未知函数的一阶偏微分方程式……184

§53. 殆綫性偏微分方程式 ……184
§54. 常微分方程組的第一积分 ……192
§55. 拟綫性偏微分方程式 ……195
§56. 非綫性偏微分方程式 ……198
§57. 法甫(Pfaff)微分方程式 ……208
俄中名辞对照表 ……213

第一部分　含一个未知函数的一阶微分方程式

第一章　一般概念

§1. 定义　例题

一自变数 x，和它的函数 y 以及这个函数的导函数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 間的形状如下的关系式:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0,$$

叫做 n 阶常微分方程式。設用一个 x 的函数 $\varphi(x)$ 代替上式中的 y, 用 $\varphi'(x)$ 代 y', $\cdots$, 用 $\varphi^{(n)}(x)$ 代 $y^{(n)}$, 若上式变成一个恒等式，則函数 $y=\varphi(x)$ 叫做这微分方程式的解。如不特别声明，本書中所考虑的数量仅取实数(有限)值，而所考虑的函数都是單值的。

可見在常微分方程式中，未知函数仅是一个自变数的函数。与这相反，在偏微分方程式中的未知函数，則是几个自变数的函数。以后凡說到微分方程式，如非特別申明，都指常微分方程式而言。

許多自然科学問題都可引到常微分方程式。現在用下面两个例題来說明这一事实。

例 1. 設一点沿 Ox 軸运动，其速度 $f(t)$ 为已知。設 $f(t)$ 是連續的有界函数，此外并假定当 $t=t_0$ 时，这点之横坐标为 x_0。試求該点运动的規律，这就是說，求該点之横坐标与时間的函数关系。

这一問題能化到求微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(t)$$

中当 $t=t_0$ 时的值变为 x_0 的那个解。由积分学就知道这解可用公式

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$$

得出。

例 2. 已知鐳的分解的速率与剩余的鐳的質量成正比例。設已知剩余的鐳在 t_0 时为 R_0 克，試求在任何时間 t 鐳的質量。

用 $c(c>0)$表比例常数，則上述問題可变成求微分方程式

$$\frac{dR}{dt}=-cR$$

的一个解，这解当 $t=t_0$ 时的值等于 R_0。这样的解就是函数

$$R=R_0e^{-c(t-t_0)}.$$

由上面两个例題知道，許多个函数能同时滿足同一个微分方程式。所以要确定这未知函数，不但要先知道它所滿足的微分方程式，还应該預先指定当自变数取一个定值时，未知函数所取之值(开始值)。以上两个例題中，开始值都唯一地决定了微分方程式的解。

微分方程式理論的基本問題是：求已給微分方程式的所有的解，并且研究这些解的性質。求一个微分方程式的解，叫做积分这个微分方程式。

§2. 几何解釋　問題的推广

我們現在来研究下列形狀的微分方程式：

$$y'=f(x,y),\tag{1}$$

这里 $f(x, y)$ 是确定于 (x, y) 平面某一个区域 G ① 上的函数。对这区域上任一点,方程式(1)規定其解的圖綫在这点的切綫斜率。設在 G 的每一点 (x, y) 用一綫段表示由 $f(x, y)$ 的值所定出的切綫方向②,則得一方向場;而前述求微分方程式的解的問題,即可叙述为:求一曲綫 $y=\varphi(x)$,使这曲綫在每一点都有由方程(1)規定的切綫[我們也时常这样說:这曲綫的方向由方程(1)規定]。

从几何观点来看,問題这样提法,有下列几个不够自然的情况:

1) 要求曲綫在区域 G 的任一点 (x, y) 之斜率等于 $f(x, y)$,因而我們須将平行于 Oy 軸的方向除外。

2) 我們只考虑 x 的單值函数的圖綫。因此我們不考虑与一垂直于 x 軸的直綫有两个或两个以上的交点的曲綫。

所以我們将稍为推广上述問題的提法,就是:我們准許这方向場中在某些点的方向可以平行于 Oy 軸。在这些点上,以 Ox 軸为标准的斜率虽无意义,但可采用以 Oy 軸为标准的斜率。因此,除微分方程式(1)外,我們同时还考虑方程式

$$\frac{dx}{dy}=f_1(x, y), \tag{1'}$$

当 $f(x, y)\neq 0$ 时,这里的 $f_1(x, y)=\dfrac{1}{f(x, y)}$;若第一方程式无意义,而第二个方程式有意义,我們就用第二个方程式。在这里我們将假定:在 G 的每一点上这两个函数 f 与 f_1 中至少有一个是有

① 区域 G 是指具有下列两个性質的非空点集:(1) G 之任一点都是 G 的內点,即此点有一鄰域完全屬于 G;(2) 点集 G 是連通的,即 G 之任意两点都可用有限条完全屬于 G 的直綫段所組成的折綫連接起来。

所謂一区域的界点,就是这区域中的点的不屬于这区域的極限点。所有的界点全部叫这区域的边界。

一区域 G 連同它的边界叫做閉区域 $\overline{G}$(又名閉包)。

② 我們不区别一綫段的两个方向。

意义的；在而且仅在 f 无意义的点上，方有 $f_1=0$，在而且仅在 f_1 无意义的点上，方有 $f=0$。于是我們可将积分微分方程式(1)及(1′)的問題改述如下：在区域 G 內求所有的曲綫[①]，使曲綫上任何一点的方向，都由方程式(1)或(1′)[②] 所規定。这些曲綫叫做方程式(1)与(1′)的积分曲綫，也就是由(1)及(1′)規定的方向場的积分曲綫。显然方程(1)的解的圖綫都是方程式(1) 及 (1′)的积分曲綫，但并非方程(1)、(1′)所有的积分曲綫，都是方程(1)的解的圖綫。以后如已明白指出：

$$f(x,y)=\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

則与方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{2}$$

在一起的方程式

$$\frac{dx}{dy}=\frac{N(x,y)}{M(x,y)}=f_1(x,y) \tag{2′}$$

将不再写出。

有时我們把这样的方程写为关于 x 与 y 比較对称的形状如下：

$$M\,dx-N\,dy=0. \tag{3}$$

在两个函数 $M(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 都有意义而且两个函数中至

---

① 当 t 在某一区間 (a,b) 內取各值时，由方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 所定出的点 (x,y) 的集合叫做曲綫；这里的 a 可为 $-\infty$，b 也可为 $+\infty$。我們更假定 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都有連續导函数，且恒有 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$。如此，則此曲綫上一点 $x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$ 附近的一段若不能看作以 x 为自变数的連續可微的函数 $y=y(x)$ 的圖綫，就可看作以 y 为自变数的連續可微的函数 $x=x(y)$ 的圖綫。因为假定 $\psi'(t_0)$ 与 $\varphi'(t_0)$ 不会都等于 0，倘使 $\varphi'(t_0)\neq 0$，于是由于 $\varphi'(t)$ 的連續性，$\varphi'(t)$ 在某一区間 $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ 內必保持一定的符号。所以对 t 的这些值必可自 $x=\varphi(t)$ 單值的解出 t，設由此得 $t=\lambda(x)$，把它代 $y=\psi(t)$，即得 $y=\psi[\lambda(x)]$，这就是說 y 是 x 的函数。

在这曲綫概念的定义中，我們不但預先假定了方程的解的可微性，而且假定了它的連續可微性。在本書中只考慮这样的解。

② 有时方向場內不仅只在 G 的內部給定，也在其边界的某一部分或全部边界上給定，此时积分曲綫則不仅經过 G 的內部，也經过它的边界的某些部分了。

少有一个不等于零的区域上，方程(3)的方向場是确定的。

例 1. 方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{4}$$

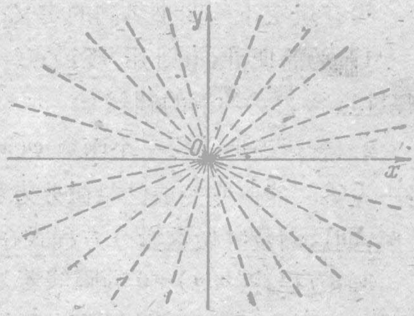

圖 1

除原点以外，处处規定了方向場。这方向場如圖 1 所示。任一如此定出的方向都經过坐标原点。显然，对任何一数 k，函数

$$y=kx \tag{5}$$

都是方程式(4)的解。这方程式所有的积分曲綫都可用关系式

$$ax+by=0 \tag{6}$$

表出，此处 a, b 是两个不同时为 0 的任意常数。Oy 軸是其积分曲綫，但不是解的圖綫。

因方程式(4)在坐标原点不能規定方向場，所以直綫(5)与(6)上应当将原点去掉才是积分曲綫。所以更正确的說，方程(4)的积分曲綫不是那些經过原点的整条直綫，而是那些从原点出發的"半直綫"(原点不計算在半直綫之內)。

例 2. 方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{7}$$

圖 2

除原点外，处处規定了方向場，如圖 2 所示。方程式(4)及(7)在同一点(x, y)上所規定的两方向互相垂直。显然，一切以坐标原点为圓心的圓都是方程(7)的积分曲綫。而函数

$$\left.\begin{aligned} y&=+\sqrt{R^2-x^2}\\ y&=-\sqrt{R^2-x^2}\end{aligned}\right\}(-R<x<+R)$$

及

都是方程(7)的解。

現在规定下列几个名詞的定义:

1. 为簡便計,有时用"經过点(x_0, y_0)的解"这一句話来代替"經过点(x_0, y_0)的解的圖綫"。

2. 若适当地选擇一个函数$\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$中的常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$,能使它变成已給微分方程式的圖綫在区域$G$內的任一个解,則这函数叫做这微分方程式在区域$G$的通解。

3. 方程$\Phi(x, y)=0$的圖綫若是微分方程式(1)、(1′)的积分曲綫,則$\Phi(x, y)=0$叫做微分方程(1)、(1′)的一个积分。

4. 若适当地选擇常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$之值代入方程

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$$

后,能自这方程$\Phi=0$得到已給的微分方程的在区域G內任一积分曲綫,則$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$叫做这微分方程在区域$G$內的通积分[①]。

例如,在例題1中,(5)式是方程式(4)在除去Oy軸的整个(x, y)平面上的通解,而(6)式是这方程式在除去坐标原点的整个(x, y)平面上的通积分。同样在例題2中,函数

$$y=+\sqrt{R^2-x^2}$$

是在整个的半平面$y>0$內的通解;而

$$x^2+y^2=R^2 \tag{8}$$

是这微分方程式把坐标原点除外的整个(x, y)平面內的通积分。方程式(4)除了积分曲綫(6)以外,沒有其他积分曲綫,而方程(7)除了积分曲綫(8)外,亦沒有其他积分曲綫。这一事实将于§5中証明之。

① 在数学文献中有关于通解和通积分概念的别的定义。

習 題

1. 平面上何种区域沒有边界?

2. 繪出下列方程式的积分曲綫:

а) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{|xy|}$, б) $\frac{dy}{dx}=\frac{|x+y|}{x+y}$, в) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+|x|}{y+|y|}$,

г) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}0 \text{ 当 } y\neq x \text{ 时},\\ 1 \text{ 当 } y=x \text{ 时},\end{cases}$ д) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}1 \text{ 当 } y\neq x \text{ 时},\\ 0 \text{ 当 } y=x \text{ 时}.\end{cases}$

并指出这些方程在什么区域上能定出方向場。

3. 設給有曲綫 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a<t<b$, 而 $\varphi(t)$及 $\psi(t)$滿足第 4 頁脚注 1 中的条件。設 $a<a'<b'<b$, 求証:

а) 可以把閉区間 $a'\leqslant t\leqslant b'$分成有限个互相連接的区間,使这曲綫对应于每一个这样的区間內的一段是一个有連續导数的單值函数 $y=y(x)$的圖綫,或者是同样性質的函数 $x=x(y)$的圖綫。

б) 有这样的常数 $\varepsilon>0$, 使对于所有的 $t'(a'\leqslant t'\leqslant b')$, 这曲綫对应于 $t'\leqslant t\leqslant t'+\varepsilon$ 的一段不会自己相交。

в) 曲綫上对应于 $t=t_1$, $t=t_2(a'\leqslant t_1<t_2\leqslant b')$ 之点为端点的一段弧長与 t_2-t_1 的比值为有界并大于某一定正数。

4. 是否下列两个要求是互相无关的:

а) 方向場中沒有平行于 Oy 軸的方向;

б) 所有的积分曲綫是 x 的函数的圖綫。

5. 試求显然包含着方程 (1) 的解的所有的極大点与極小点(也可能包含其他点)的軌迹方程。

設函数 $f(x, y)$ 是可微的, 試求显然包含着方程式(1)的解的拐点的軌迹方程。

6. 若在区域的定义中不用折綫段而改用曲綫段,或只用不与自身相交的曲綫段,求証区域这样的定义同原来的定义是一样的。

7. 曲綫通常由方程式 $f(x, y)=0$ 給定。設函数 f 在整个(x, y)平面上确定而且連續地可微，又設

$$[f(x, y)]^2+[f'_x(x, y)]^2+[f'_y(x, y)]^2>0, \qquad (*)$$

而点集 $f(x, y)=0$ 是非空的。試証：这点集是有限条或可数条彼此无公共点的曲綫組成的，而(x, y)平面的每一有限部分只与这些曲綫中的有限条的曲綫相交。同时，这些曲綫中的每一条或者是閉的，或者是自身不相交而两端趋于无穷的曲綫。

倘使条件(*)不滿足，則点集 $f(x, y)=0$ 是怎样的？若函数 $f(x, y)$只在某一区域 G 上确定，則这个命題将有怎样的变化？

第二章　最簡單的微分方程式

§3. 形狀如$\dfrac{dy}{dx}=f(x)$的方程式

第一种情形　設 $f(x)$ 在 $a<x<b$ 时連續。我們知道这微分方程式的一个解是函数

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$$

[x_0 及 x 都在区間(a, b)內]；而其他任意一个解与这解仅相差一个常数。即其一切积分曲綫都可以由一积分曲綫平行于 Oy 軸移动而得。其通解是如下的函数：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi+C.$$

在条形区域 $a<x<b$ 內給了一点(x_0, y_0)，經过这点必有一积分曲綫，常数 C 也可唯一地决定：$C=y_0$。即經过条形区域 $a<x<b$

內任一点(x_0, y_0)必有而且仅有一积分曲綫，它就是

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

第二种情形　設当$x\to c(a<c<b)$时，$f(x)\to\infty$，但$f(x)$在区間(a, b)內其他各点都連續。$x=c$处的方向場由方程$\frac{dx}{dy}=0$規定。

此时，愈靠近直綫$x=c$时，方向場愈来愈陡。不过在开区域$a<x<c$及$c<x<b$內，情况和第一种情形一样。例如，点(x_0, y_0)若在条形区域$a<x<c$內，則过这点有一条而且只有一条积分曲綫在这長条內，其方程是

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

若积分$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$当$x\to c-0$时收斂，則这曲綫当$x\to c-0$时必趋于直綫$x=c$上某一定点(圖 3)。

反之，若积分$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$發散，則当$x\to c-0$时曲綫$y=y(x)$漸近地趋于直綫$x=c$(圖 4)。

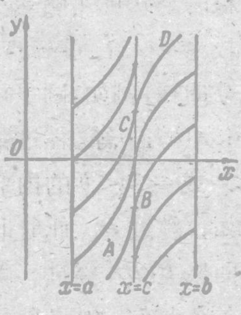

圖 3

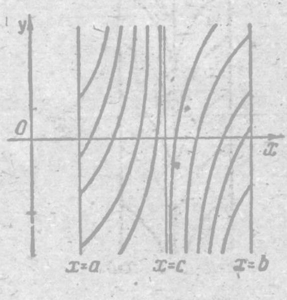

圖 4