技工教科書

應用力學

技工訓練處發行

一 緒論

力：乃推引一切物體之作用也，每力均有量；表示一已知力之量，常稱之爲大於某標準力若干倍，力學採用重量之標準爲力之標準，是爲重力單位制，以其取用甚便也。所謂一力等於100公斤者，即一力等於100公斤之重量也。

矢量：力必有方向；所謂力之作某方向推拉者，言此物體若僅受此一力之作用，卽將依此方向而發生移動。力必有一施力點，即物體上力所作用之地點也。通過物體之施力點，沿力之方向，引一直線，是爲力之作用線。代表一力之方法，以作矢量爲之。以一點代表力之施力點；自施力點引一直線，線之長度，依照某種比例尺度，以代表力之大小；於直線之一端，作一矢頭，直線之方向及其矢頭均代表力之施力方向。

比例尺及符號：以直線之長度代表力之大小，常以比例尺爲之。例如有某力等於200公斤，若用長度1公分等於100公斤之比例尺，則長度2公分

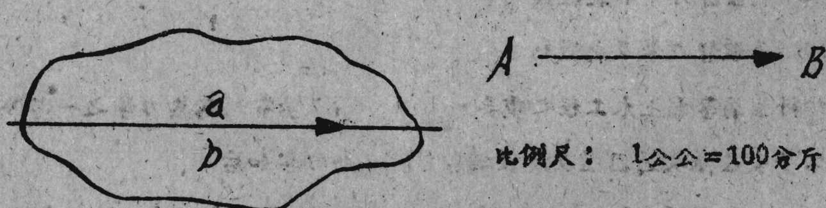


圖1

即代表此量。繪圖時所使用之比例尺，須視圖之大小及所繪物量之尺寸而定。圖之示力所作用之物體及其作用線者，謂之地位圖。圖之示矢量及比例尺度者，謂之力圖。代表一力之符號，力圖常於矢量之兩端，作二大寫字母爲之，如力AB；地位圖則於作用線之上下兩側各作一小寫字母代表之，如力ab；公式中所用之符號，則以字母Ｅ爲之。

力之作用：力學研究力與力間之相對作用，暨力對於物體所發生之作用。任意力對於物體所發生之作用，可有次列二種：

(1)力能使物體變更其運動情狀：物體運動時或靜止時受有外力，若此外力非互相平衡，則物體必變動其情狀，靜者動，動者加劇，或漸漸靜止，或改變運動方向，是爲發生動變。

(2)力能使物體變更其形狀：物體本具有某種形狀，若加以外力，則必變其形狀，是爲發生形變。

力學分類：依照變動情形之種類，可分力學爲靜力學，動力學，及材料強弱學三種。研究力與力間平衡關係之學問，謂之靜力學；研究力與動變之關係之學問，謂之動力學；研究力與形變之關係之學問，是爲材料強弱學。

物體有三態；依照物體之形態，靜力學及動力學又可分爲三大類：

(1)固體靜力學及固體動力學。

(2)液體靜力學及液體動力學。

(3)氣體靜力學及氣體動力學。

材料強弱學爲土木工程之重要科目，氣體力學常列爲熱力學之一部份；故不贅；茲依次述固體及液體之靜力學及動力學如后。

例：設比例尺爲1公分＝200公斤，問1.20公分，2.11公分及0.75公分諸長度代表力若干？

解：將各長度用200乘之，即

$1.20 \times 200 = 240$公斤

$2.11 \times 200 = 422$公斤；

$0.75 \times 200 = 150$公斤。

習　　題

(1)比例尺爲1公分=50公斤，欲代表1250,675，及900公斤諸力，問各需長度若干？

(2)比例尺爲1公分=80公斤，問1.25，1.60，及2.55公分諸長度所代表之力爲何值？

二 固体靜力學

a. 會聚力之綜合及分解

會聚力及不會聚力：多數力之作用線交於一點，稱爲會聚力，或稱同點力；相交之點，稱爲力之會聚點。若多數力之作用線不交於一點，則稱爲不會聚力，或稱不同點力。不會聚力又可分爲平行力及不平行力二類，視其作用線之平行或不平行而定。

本文所討論之力，其作用線均限於在一平面之內，是爲同平面力。但有時吾人所遭遇之問題，其力之作用線並不在同一平面之內，是爲非同平面力。非同平面力之問題，亦可引用本文之理論解答之。

平衡及平衡力：一靜止物體，受許多力作用時，每一力均有移動此物體之傾向，但結果此諸力有時可互相抵消，是爲平衡。在一平衡系中，任何一力對於其他諸力均爲平衡。一力能對於諸力平衡者，稱爲諸力之平衡力。

合力及綜合：任何一力，能發生與一羣力同樣之作用者，該力名爲此一羣力之合力。故一羣力之合力與其平衡力之量及作用線均相同，而方向則相反。構成一羣力之合力之方法，名爲力之綜合。

分力及分解：任意數力，其合併作用與一力之作用相同者，此數力名爲此一力之分力。構成一力之分力之方法，名爲力之分解。分解之最重要者，爲以一力分解成兩個分力。

兩會聚力綜合之圖解法：設有兩會聚力ab及bc如圖；作力圖，引矢量AB及BC表示兩力之量及方向；引AC線完成一三角形，則AC即表示其合力之量及方向；此名三角形定律。合力之作用線，需與AC平行，而通過已知兩力之交點，故ac即合力之作用線也。

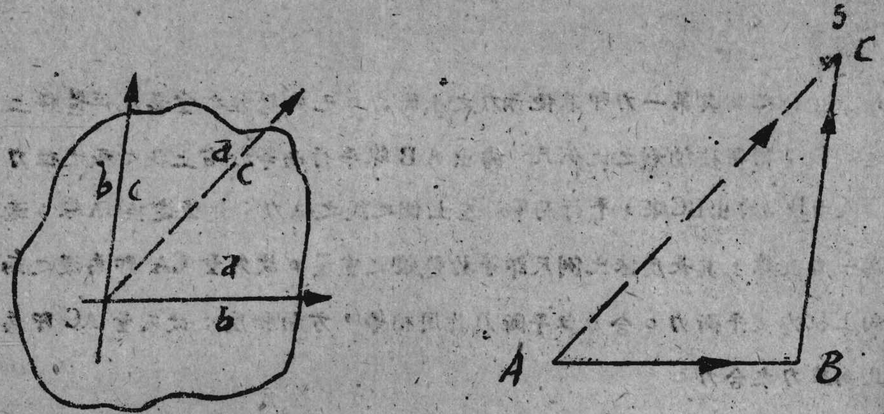


圖2

此定律可用實驗證明之；用兩個彈簧秤，一塊圖畫板，及繩數條，作成圖3之裝置，先將圖板直立，兩彈簧秤即懸於板上之兩釘上。再將兩秤用繩牽連於一小環S，另將一件重體懸於環上。S環於三力作用下呈平衡狀態，即向下一力等於懸體之重量，上面兩力即兩繩之拉力，其量可於彈簧

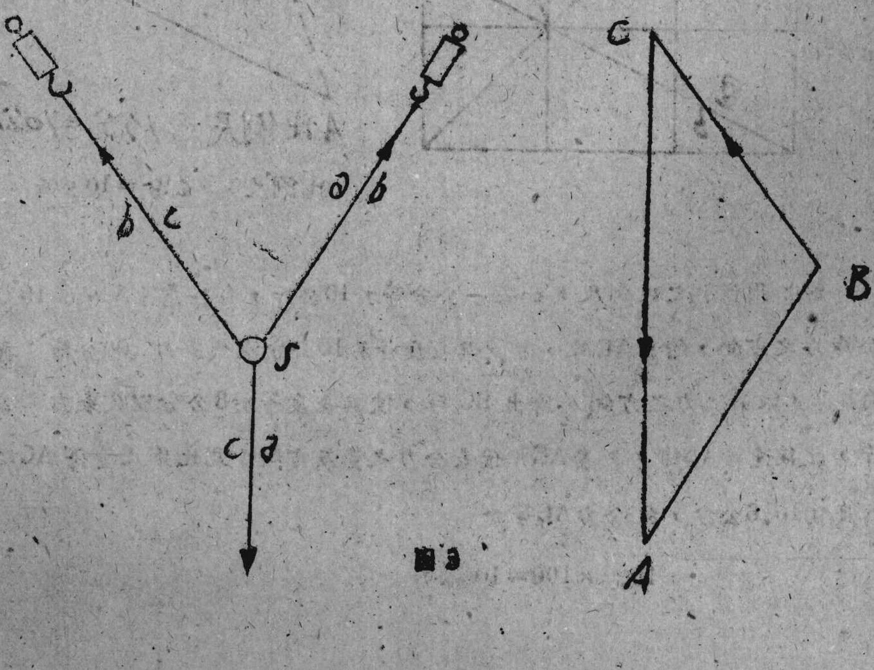
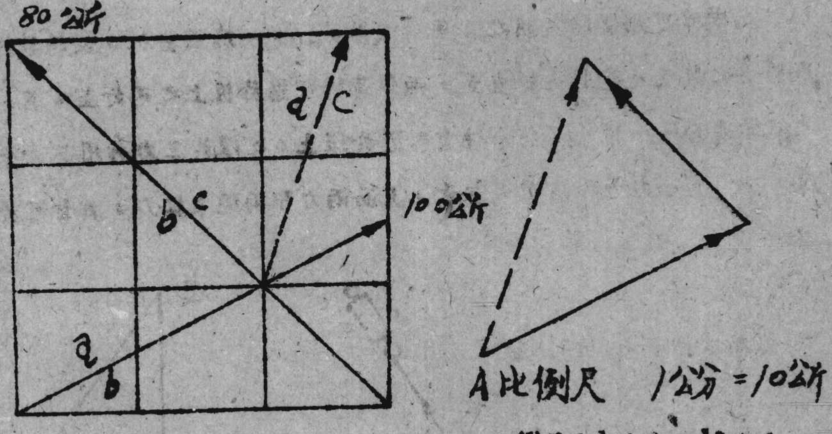


圖3

秤上讀得之。其第一力即其他兩力之平衡力。已知懸體之重量及彈簧秤上之讀數；用某種便利之比例尺 繪出AB線平行而等於右上側之繩之拉力，又由B點繪出BC線，平行而等於左上側之繩之拉力；最後連接CA線，適為一垂直線，其長度依比例尺即等於懸體之重量。故矢量CA即為環之兩向上拉力之平衡力。合力與平衡力作用相等，方向相反，故矢量AC即為此兩拉力之合力。

例：圖4表示一板，板上示二作用力，一為100公斤，一為80公斤。試求二力之合力。



比例尺：1公分＝10公斤

圖4

解：用便利之比例尺，如每一公分等於10公斤，自任意點A，依100公斤力之方向，繪出AB線，並使其長度等於10公分以代表力100公斤；再自B點，依第二力之方向，繪出BC線，使其長度等於8公分以代表力80公斤，最後連接AB線，矢量AC即代表合力之量及方向，用比例尺量得AC之長度為10.6公分，故合力AC等於

$$10.6 \times 100 = 106\text{公斤}$$

合力之作用線爲ac係與AC平行，而經過ab及bc兩力之交點。

兩會聚力綜合之代數法：兩會聚力作用線間之角，若非90度，則其代數法並不簡單，可應用圖解法。若其角適爲90度，則代數法較爲簡單，茲述其方法如次。

圖5表示一物體，有K_1及K_2兩力，同經過物體內之某點，而其夾角適成90度。作力圖，矢量AB及BC各代表力K_1及K_2之量及方向；依照三角

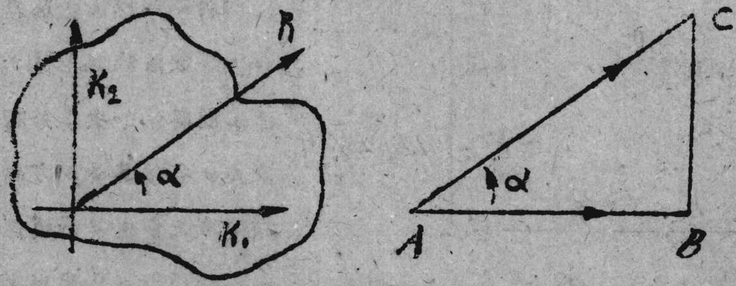


圖5

形定律，矢量AC代表合力之量及方向，而與AC相平行之R線卽代表此合力之作用線，因△ABC爲一直角三角形，故

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2, \qquad (1)$$

$$tg\angle CAB = \frac{BC}{AB}。 \qquad (2)$$

命R代表合力AC，K_1及K_2代表AB及BC二力，α代表作用線R與K_1所成之斜角，則(1)(2)二式可作：

$$R^2 = K_1^2 + K_2^2, \qquad 3$$

$$tg\,\alpha = \frac{K_2}{K_1} \qquad 4$$

例：設有120公斤及160公斤二力，互相正交，試求其合力。

解：令K_1代表力160公斤，K_2代表力120公斤，R代表其合力，α代表作用線R與K_1所成之斜角，則

$$R=\sqrt{160^2+120^2}=\sqrt{25600+14400}$$

$$=\sqrt{40000}=200\text{公斤}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{120}{160}=0.75,\quad \alpha=36°52'.$$

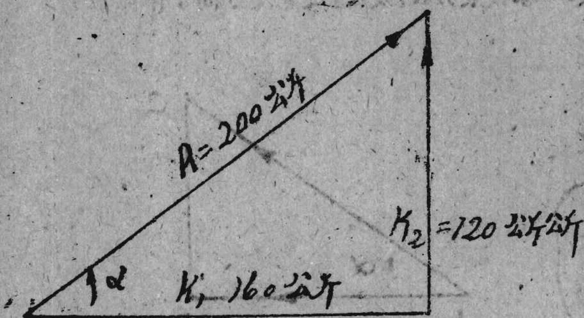


圖 6

兩個以上會聚力之綜合：關於兩個以上會聚力之綜合，代數法較爲繁複，故僅述其圖解法如次：若將任意數力，各依其量及方向，連續繪成矢量，其箭頭係順同一路線進行，此圖形名爲力之多邊形；若多邊形爲一不閉合形，則其閉合線即爲合力；若多邊形爲一閉合形，則此任意數力之合力爲零。茲爲便利起見，將圖解綜合法之規則，列示如下：

(1) 先將已知之力，繪成矢量，作力之多邊形。

(2) 連接此多邊形之閉合線，置一箭頭於此閉合線上，其方向須自多邊形之始點指向其終點，此閉合線即代表合力之量及方向。

(3) 再於地位圖，由諸力之會聚點引一直線與多邊形之閉合線相平行則此線即爲合力之作用線。

例：設有四力會聚於次圖之P點，求其合力。

解：以1公分等於10公斤爲比例尺度，自任意點A引矢量AB，長度爲7公分以代表力ab等於70公斤。順次引矢量BC長度爲8公分，CD長度爲9公

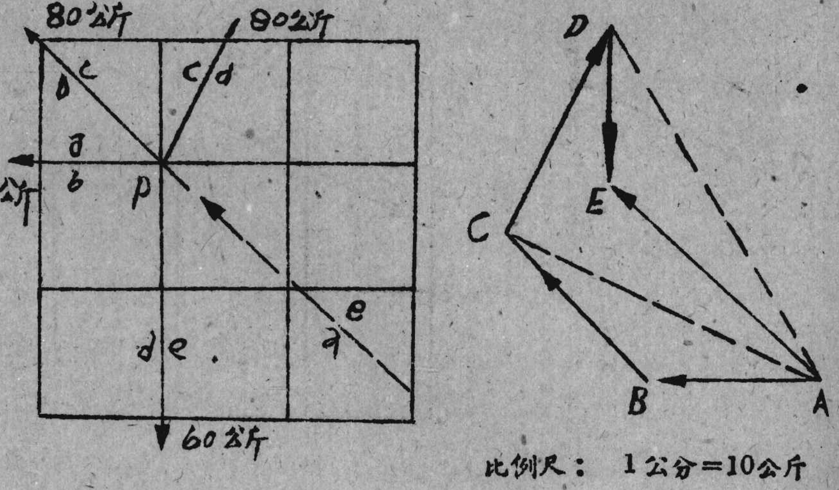


圖7

分，及DE長度爲6公分，以代表力bc等於80公斤，ed等的90公斤，及de等於60公斤。引一閉合線AE，以完成多邊形 ABCDE，置一箭頭於AE線上，使自A點指向E點，矢量AE即代表合力之量及方向。量得AE之長度爲11.6公分，故合力等於

$$11.6\times10=116\text{公斤}。$$

再經過力之會聚點，於地位圖引ae線，與AE平行，ae線即代表合力之作用線。

證明之法，可應用三角形定律。引AC及AD二線，由△ABC，AC爲AB及BC之合力；由△ACD，AD爲AC及CD之合力；故由△ADE，AE爲AD及DE之合力，亦即AB，BC，CD，及DE之合力。

一力分解爲兩會聚分力之圖解法：分解一任意力爲二分力之法，先於地位圖作ab線代表此力之作用線。引矢量AB以表示其量及方向。自矢量之兩端，引二直線AC及CB相交於C點。於AC線上置一箭頭自A點指向C點，於CB線上置一箭頭自C點指向B點。矢量AC及CB即爲AB之二分力。再於

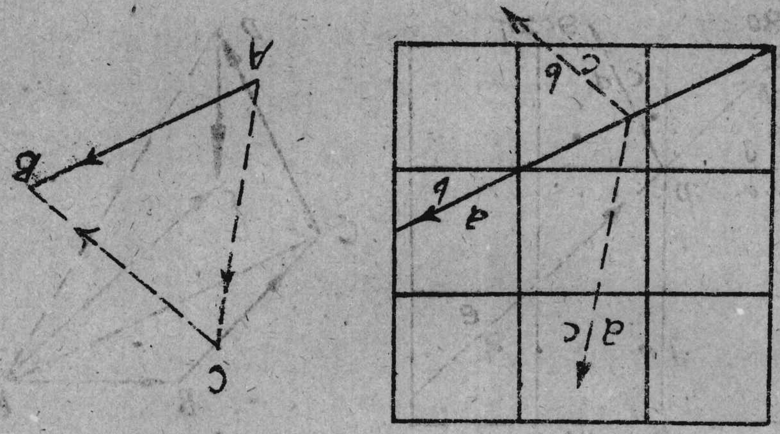


圖 8

地位圖，引二直線ac及cb各與 AC及CB相平行，而會聚於 ab線上之一點。ac及cb即代表二分力之作用線。

上項分解法係以一力分解爲任意方向之二分力，茲再舉一例，示將一力分解為某特定方向之二分力之方法。

例：試將圖内力ab分解爲沿MN及MP方向之二分力。

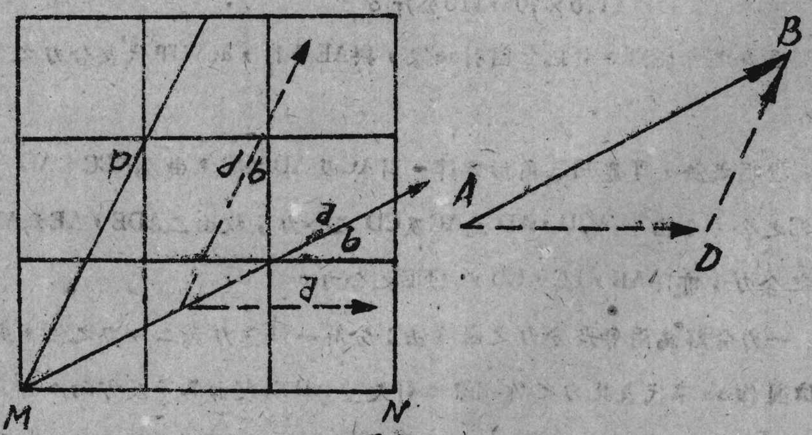


圖 9

解：用便利之比例尺度，引矢量AB代表力ab之量及方向，由A點引

AD線平行於MN，由B點引DB線平行於MP，使相交於D點。於AD線上置一箭頭；自A點指向D點；面DB線上置一箭頭，自D點指向B點。矢量AD及DB即為所求之分力。再於地位圖，引ad及db二線與AD及DB相平行而會聚於ab線之任意點，ab及db即代表二分力之作用線。

一力分解爲兩會聚分力之代數法：兩分力之作用線之相交之角，若非90度，則其代數法，並不簡單，可仍用圖解法；若其角適爲90度，則應用代數法，較爲簡易。

設欲將力K分解爲沿OX及OY兩直線之二分力，先作矢量AB以代表力K之量及方向，自矢量AB之兩端，各引一直線，與OX及OY相平行，相交於C點。矢量AC及CB依圖上所繪箭頭之方向，即代表所求兩分力之量及方向

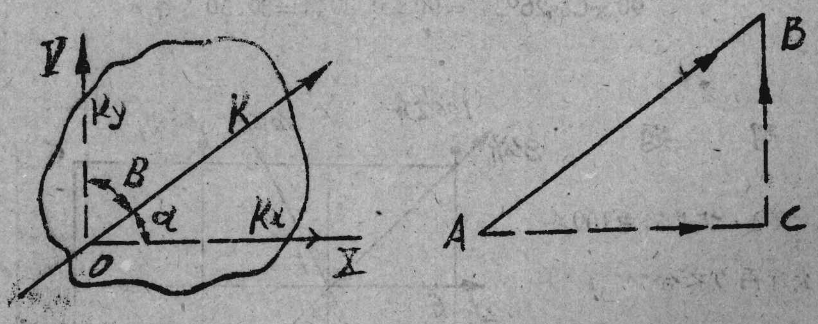


圖10

命K_x及K_y代表分力AC及CB，即沿OX及OY之分力，α代表K與K_x間之夾角，β代表K與K_y間之夾角，即得

$$K_x = K\cos\alpha, \tag{5}$$

$$K_y = K\cos\beta。 \tag{6}$$

凡一力所分解之二分力，互成直角者，此分力名爲直角分力。上述二方程式即表示一力沿任何直線之直角分力，即等於此力與其夾角之餘弦之

乘積。

例一： 一力等於120公斤，與水平線成22度角。問其沿水平線之分力爲何？

解： $\cos 22^\circ = 0.927$，故分力爲

$$120 \times 0.927 = 111.24 \text{公斤}。$$

例二： 一力等於90公斤，方向如圖，問沿垂直線之分力爲何？

解： 因 $\operatorname{tg} \angle EAG = \dfrac{EG}{AG} = 0.5$，故 $\angle EAG = 26^\circ 34'$。由(5)式，所求之分力等於

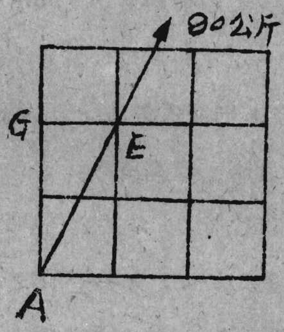


圖11

$$90 \times \cos 26^\circ 34' = 90 \times 0.8944 = 80.50 \text{公斤}。$$

習　　題

(1) 試求圖中100及120公斤兩力之合力（應用圖解法）。

(2) 試求圖中120及160公斤兩力之合力（應用圖解法）。

(3) 試求圖中50及70公斤兩力之合力（應用代數法）。

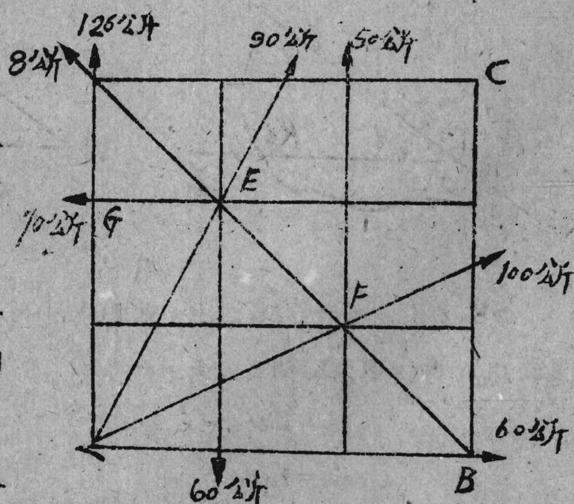


圖12

(4) 試求圖中60 及70 公斤兩力之合力（應用代數法）。

(5) 試就圖中A點之四會聚力，求其合力。

(6) 試就圖中F點之四會聚力，求其合力。

(7) 試將圖中160公斤之力，分解爲沿AF及AE之兩分力（應用圖解法）。

(8) 試將圖中50 公斤之力，分解爲沿FA及FB之兩分力（應用圖解法）。

(9) 試求圖中50 公斤力之垂直及水平分力，及其方向（應用代數法）。

(10) 試求圖中70 公斤力沿FA線之分力及其方向（應用代數法）。

(11) 一力爲80 公斤，與水平線成60 度角，試求其垂直及水平兩分力。

b. 會聚力之平衡

平衡條件：所謂一羣力之平衡條件者，即為一種關係；欲得力之平衡，必須滿足此種關係；或有此關係時，諸力即得平衡也。

若一羣力已得平衡，則力與力互相平衡，故其平衡力及諸力之合力必等於零。此合力等於零之必要條件，實為平衡之通用條件。在特種力羣，尚有特種條件，其中數項，當於下文述之。

會聚力平衡之圖解條件：一羣會聚力平衡之圖解條件，即其力之多邊形，必須閉合。因多邊形若為閉合，則其合力必等於零，應用此條件，凡與呈平衡狀態之會聚力有關之問題，均可解之。下述之例題，為最普通而重要者。

例一： 圖13表示一物體在斜面上，有繩繫之，得靜止不動。若物體重 120 公斤，而斜面為完全平滑，試求繩之拉力，及物體對於斜面之壓力各若干（假設斜面之斜角為30度）？

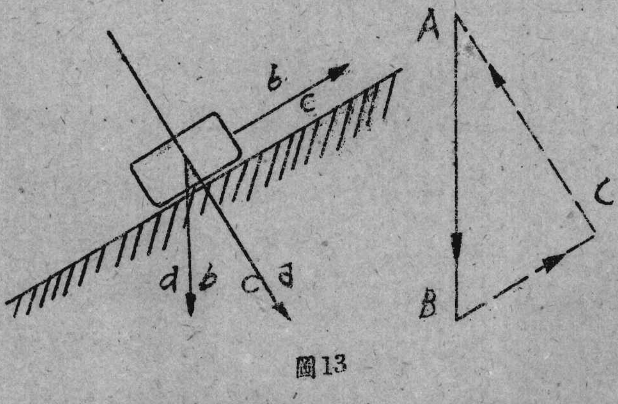


圖13

解： 作用於此物體共有三力，即向下之重量，繩之拉力，及斜面之壓力。拉力之方向與斜面相平行，壓力之方向與斜面相正交，以 1 公分等於10公斤為比例尺度，繪矢量AB（12公分）以代表物體之重量（120公斤）及其方向。自矢量AB之兩端，引BC線平行於斜面，引 CA線平行於斜面之垂直線，相交於C點，於BC線上置一箭頭，自 B 點指向C點；於 CA線上置一箭頭，自

C點指向A點。於△ABC中，矢量AB，BC，及CA之箭頭，順同一路線進行，△ABC爲一閉合多邊形，故三力互相平衡。矢量BC代表繩之拉力之量及方向，矢量CA代表斜面之壓力之量及方向。

以比例尺量得矢量BC之長度爲6公分，矢量CA之長度爲10.4公分；故繩之拉力爲60公斤，斜面之壓力爲104公斤。

例二：　圖14表示一物體，重200公斤，懸於一小環，其上用兩繩懸繫之。試求此兩繩之拉力（假設兩繩之斜角爲30°及45°）。

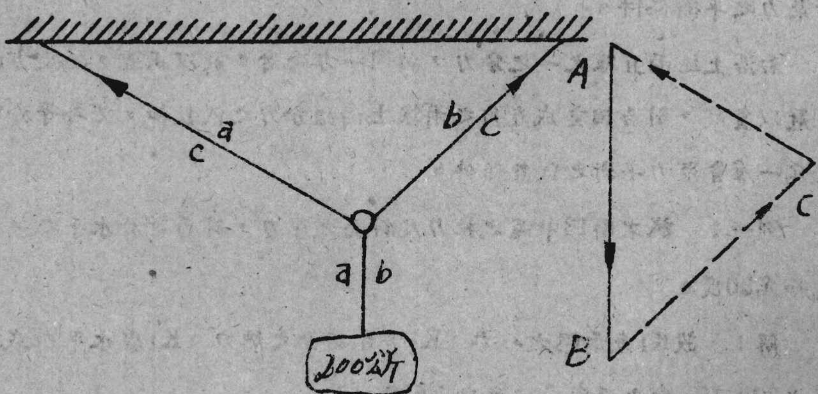


圖14

解：　作用於小環，計有三力，即向下一力，等於物體之重量，及兩繩之拉力。小環既在靜止狀態，此三力即得平衡，故其力圖必爲一閉合多邊形。以1公分等於2.0公斤爲比例尺度，繪矢量AB(10公分)以代表物體之重量（200公斤）及其方向。自矢量AB之兩端，引BC及CA二線，平行於二繩之方向，相交於C點。於BC線上置一箭頭，自B點指向C點；於CA線上置一箭頭，自C點指向A點。於△ABC中，矢量AB，BC，及CA之箭頭，順同一路線進行，故△ABC爲一閉合多邊形。矢量BC代表bc繩之拉力之量及方向，矢量CA代表ca繩之拉力之量及方向。

以比例尺量得矢量BC之長度爲8.95公分，矢量CA之長度爲7.25公分；故bc繩之拉力爲179公斤，ca繩之拉力爲145公斤。

會聚力平衡之代數條件：設有一羣會聚力呈平衡狀態，每一力各以其沿相交成直角之兩線之分力代替之，則分力之全部必仍呈平衡狀態；因所有分力必沿兩線之一，故沿每一線之所有分力，亦必呈平衡狀態，蓋若有一組分力不平衡，則物體即沿此分力線而移動矣。是以將一羣會聚力分解爲沿相交成直角之任何二線之兩組分力，每組分力之合力必等於零，是爲會聚力之平衡條件。

若沿上述兩直線之一之分力，向同一方向者，冠以正號，向反方向者，冠以負號，則沿相交成直角之兩線上兩組分力之代數和，必各等於零，是爲一羣會聚力平衡之代數條件。

例一： 試求圖13中繩之拉力及斜面之壓力，斜面對於水平之傾斜，已知爲30度。

解： 設K_1表示繩之拉力，K_2表示斜面之壓力。K_1與水平所成之角度爲30°，K_2與水平所成之角度爲60°，故

$$K_1\text{之水平分力}=K_1\times\cos30^\circ=0.866K_1,$$

$$K_2\text{之水平分力}=K_2\times\cos60^\circ=0.500K_2,$$

$$\text{重量之水平分力}=0。$$

K_1與垂直線所成之角度爲60°，K_2與垂直線所成之角度爲30°，故

$$K_1\text{之垂直分力}=K_1\times\cos60^\circ=0.500K_1,$$

$$K_2\text{之垂直分力}=K_2\times\cos30^\circ=0.866K_2,$$

$$\text{重量之垂直分力}=120\text{公斤}。$$

三力既呈平衡狀態，則水平及垂直分力亦必各呈平衡，故