葛兆楨

依照教育部修正課程標準編輯

高級中學
教科書

解析幾何學

甲組用
下冊

陳懷書 編

商務印書館發行

依照教育部修正課程標準編輯

高級中學教科書

解析幾何學

甲組用 下冊

一九五四年查訖

陳懷書編

商務印書館發行

中華民國二十五年十二月初版
中華民國三十二年一月渝第三版

(52429·1B)

高級中學教科書 解析幾何學 甲組用 二冊

下冊原定價國幣陸角伍分
外埠酌加運費匯費

編纂者 陳懷書
發行人 王雲五 重慶白象街
印刷所 商務印書館
發行所 商務印書館 各埠

(本書校對者平發晉)

目錄

高中教科書

解析幾何學

下 册

第十五章

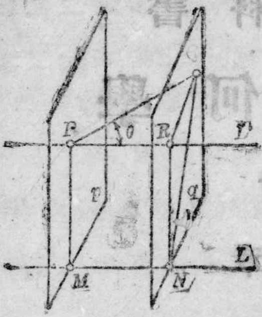
射影 空間坐標

§99. 有向線段 本書第二章關於線段之方向曾詳細之討論,但直線 L 之位置可在空間 (*space*) 任何處,而關於有向線段之定理,仍然可以成立,故學者宜複習之,例如 L 線上有 $n+1$ 點 $M, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, N$ 時,下列之關係式仍能成立.

$$(1) \qquad MM_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-2}M_{n-1}+M_{n-1}N=MN.$$

§100. 折線之正射影 設空間有一直線 L,又有一點 P, P 不在 L 上,則 P 在 L 上之正射影乃自 P 至 L 所作之垂線之足, M,或過 P 點作平面 p 垂直於 L 而交 L 於 M, M 卽其正射影.若 P 在 L 上,則 P 點自身卽爲其正射影.

設 PQ 爲空間之任意有向線段, M 與 N 爲 P 與 Q 在



(圖 152)

L線上之正射影,則有向線段PQ在L上之正射影爲有向線段MN.

若p與q爲經過P與Q垂直於L之平面,則PQ在L上之正射影MN等於p,q兩平面與平行於L之任一直線所截之有向線段.例如圖152中MN等於PR是也.

設自P至Q爲一折線,其有向線段$PP_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}Q$等不必在同一平面上,則此等有向線段在$L$上正射影之和爲

$$MM_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-1}N.$$

由§99此和等於MN,即等於有向線段PQ在L上之正射影.

觀此可知第一章所論有向線段之正射影可推廣之至於空間.

定理1 聯結空間一點P與其他一點Q之折線,其有向線段$PP_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}Q$在空間任一直線$L$上之正射影之和等於有向線段$PQ$在$L$上之正射影.

定理2 空間兩折線,有相同之起點及終點,其線段為$PP_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}Q$及$PP'_1, P'_1P'_2, \cdots, P'_{n-1}Q$,$L$為任意一直線,則第一折線之線段在$L$上之正射影之和等於第二折線之線段在$L$上之正射影之和.

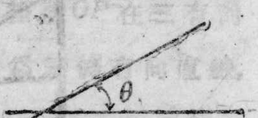
一點P在一平面K上之正射影乃自P至K所作之垂線之足,若P在K上,則P點自身即為其正射影.

K為一平面,L為一直線,若L不垂直於K,則L在K上之正射影乃經過L而垂直於K之平面與K相交之直線;若L垂直於K,則L在K上之正射影為一點,即L與K之交點.

§101. 兩有向線間之角 設空間有二無限直線,各有一正的方向,則此二有向線間之角,可如下法定之:

若二線相交,則二線在一平面上,其間之角θ乃自交點依原有之方向所發之兩射線間之角如圖153.

若二線不相交,則於空間任取一點A,自A依原有之方向作兩射線與原有兩線平行,則兩射線間之角即原有二線間之角.



(圖 153)

例如圖152中,PQ為自P至Q之直線,L為自左至右之直線,故均為有向直線,其間之角θ,乃在第一線上取P點,自P引L'平行於L

且與L同向,所成之角θ是也.

注意 所謂角θ者,乃兩有向線間之角,非自此線至彼線之謂,角之值恆爲正數或零,即角爲數值的而非代數的.

通常兩線間嘗有二角,即θ與$360°-\theta$,二者之一必小於或等於$180°$,而吾人所用者乃兩有向線間之角θ也.

§102. 有向線段之正射影之值 設於空間一線L定其方向,復選定一長度,命爲單位,備一切量度之用,則L線上之有向線段AB可以代數的數表之,其數值等於AB之長度,其正與負視由A至B之方向與L之方向相同或相反而定.

(圖 154)

例如有向線段PQ在L上之正射影MN爲代數的

值,故亦可以MN表之,因

$$PQ\text{之正射影}=-QP\text{之正射影}$$

令有向線段PQ之長度$|PQ|$爲已知,又令自P至Q之線PQ與有向線L所成之角爲θ,若PQ與L在同一平面上,則由平面三角學,得

(1)　$$MN=PQ\text{在}L\text{上之正射影}=|PQ|\cos\theta.$$

一般言之,若PQ不與L在同一平面上,如圖152,經過P引與L平行且同向之L',則PQ在L'上之正射影爲PR,因PQ與L'在同一面上,故依上例,得

$$PR=|PQ|\cos\theta.$$

但$PR=MN$,故公式(1)對於任何情形皆能成立.

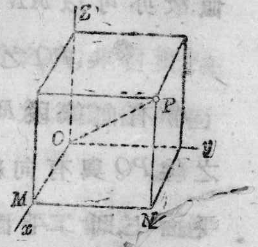
§103. 空間坐標　過空間一點O作有向直線三,令每一線垂直於其他二線,則此三線成正坐標軸.空間一點P對於此等軸之坐標即有向線段OP在三有向線上射影之代數值,例如Ox, Oy, Oz爲三條有向直線,x, y, z爲P點之坐標,則

$x=OP$在Ox上之正射影,其正負依P在yz面之前或後定之.

$y=OP$在Oy上之正射影,其正負依P在zx面之右或左定之.

$z=OP$ 在 Oz 上之正射影,其正負依 P 在 xy 面之上或下定之.

OP 在三有向線上之正射影可過 P 點作三平面垂直於三線而得(圖155),此三平面與三坐標軸所定之三平面合成一直角平行六面體,而由 O 出發之三稜卽爲 OP 之正射影.



(圖 155)

是以空間有一點,必有唯一之坐標,反之,若有三實數 x, y, z 必有唯一之點 P,以此三數爲坐標.欲定此點之位置或如圖 155 作平行六面體,或於 x 軸上取 $OM=x$,過 M 作直線平行於 y 軸,在此線上取 $MN=y$,再自 N 作直線平行於 z 軸,於其上取 $NP=z$,則 OM, MN, NP 三有向線段爲 P 點之坐標.OM 方向之正負視其與 Ox 同向或異向而定,同向爲正,異向爲負,圖155中 x, y, z 皆爲正.

O 爲坐標軸之原點,有向線 Ox, Oy, Oz 爲坐標軸,xOy, yOz, zOx 爲坐標面(coördinate planes).原點之坐標爲(0, 0, 0),任一坐標軸上之一點有二坐標爲零,任一坐標面上之一點有一坐標爲零.例如 y 軸上與 O 點之距離爲三單位而方向爲正,則其坐標爲 (0, 3, 0),又,設在 yz

面上有一點而$y=2$, $z=8$,則其坐標爲(0, 2, 3).

卦象 三坐標面分空間爲八部分,每一部分名一卦象(*octant*).在某一卦象內一點之x坐標爲負,則在此卦象內任何點之x坐標皆爲負,y及z坐標亦然,故若云卦象(−, +, +)即此卦象內每點之x坐標爲負,y及z坐標皆爲正之意.卦象(+, +, +)通常名爲第一卦象,但定卦象之次序,無關重要,可以不論.

圖形 欲將空間之圖形畫於平面之上,吾人嘗用平行射影法(*parallel projection*),y及z軸恆以成正交之兩線表之,x軸則依便利之方向以一直線表之.在yz面內或與之平行之面內,所有之距離皆可以正確之長度表之,與在空間者相同,而在x軸上或與之平行之線上之距離,則恆依預定之規約縮短之.

代表x軸之直線其方向常與y軸成120°之角,而其距離之單位則僅爲其他軸上一單位之四分之三.

右手及左手坐標制 圖155所用之坐標制,爲吾人今後常用之制.圖156亦爲常用之制

(圖 156)

兩制之別如下:自x之負軸上一點,觀察yz面之旋轉,其方向須自正y軸至正z軸.故第一制之方向與右轉螺旋同.第二制則爲左轉螺旋.吾人所用者爲右手制(*right-handed system*),而他一種則爲左手制(*left-handed system*)也.

習題八十五

1. 描以下各點在y及z軸上以$\frac{1}{2}$公分爲一單位,在x軸上以$\frac{3}{8}$公分爲一單位:

(a) $(0,8,0)$. (b) $(0,1,3)$.

(c) $(2,5,0)$. (d) $(4,0,0)$.

(e) $(0,-2,0)$. (f) $(4,1,3)$.

(g) $(5,-2,4)$. (h) $(3,2,-5)$.

(i) $\left(-2,3,1\frac{1}{2}\right)$. (j) $(1,-1-3,)$.

(k) $(-2,4,-3)$. (l) $(-1,-1,-2)$.

2. 求下列各點在坐標軸上射影之坐標,又求其在坐標面上射影之坐標:

(a) $(3,5,2)$. (b) $(-3,2,-1)$. (c) (x,y,z).

3. 若$P(x,y,z)$在xy面上,則z之值爲何?若P在yz

面上，x 爲何？若 P 在 zx 面上，y 爲何？

4. 若 $P(x, y, z)$ 在 x 軸上，y 及 z 之值爲何？若 P 在 y 軸上，z 及 x 爲何？若 P 在 z 軸上，x 及 y 爲何？

5. 在 yz 面上之點，其坐標能滿足若何方程式？在 zx 面上爲何？在 xy 面上爲何？

6. 在 x 軸之點，其坐標能滿足之兩方程式爲何？在 y 軸上爲何？在 z 軸上爲何？

§104. 有向線段在軸上之正射影　已知 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 兩點，欲求有向線段 P_1P_2 在坐標軸上之射影，次第將折線 P_1OP_2 射影於軸上，因

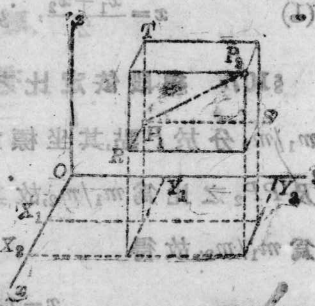
$$P_1P_2\text{之射影}=P_1O\text{之射影}+OP_2\text{之射影},$$

故　$$P_1P_2\text{之射影}=OP_2\text{之射影}-OP_1\text{之射影}.$$

但 OP_2, OP_1 在三軸上之射影即 P_2P_1 之坐標，故有向線段 P_1P_2 在三軸之射影順序爲

(1)　　$x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1.$

經過 P_1 及 P_2 作平面垂直於三軸，則得有向線段 P_1P_2 在三軸上之真實射影 X_1X_2,



(圖 157)

Y_1Y_2, Z_1Z_2 如圖 157（爲求圖形簡單，Z_1Z_2 未畫）.

§105. **兩點間之距離** 命兩點為 P_1 及 P_2 如圖 157，則線段 P_1P_2 為直角平行六面體之對角線，由幾何理易知對角線之長之平方，等於其三稜之平方之和：

$$P_1P_2^2 = P_1R^2 + P_1S^2 + P_1T^2$$

故
$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

而
$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

§106. **線段之中點** 命線段 P_1P_2 之兩端為 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，若 $P(x, y, z)$ 為 P_1P_2 之中點，則因有向線段 P_1P 及 PP_2 之相等，故其在坐標軸上之射影亦相等。由 §104 (1)，得

$$x - x_1 = x_2 - x.$$

仿此，得 y 及 z 坐標之方程式，解之，得

$$(1) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§107. **線段依定比之分點** 設線段 P_1P_2 依定比 m_1/m_2 分於 P 點，其坐標為 (x, y, z)，則因有向線段 P_1P 及 PP_2 之比為 m_1/m_2，故其在任一軸上之射影之比亦為 m_1/m_2。故得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m_1}{m_2}.$$

仿此，得 y 及 z 坐標之方程式，解之，求 P 點之坐標 x, y, z，

得

(1) $$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_2+m_1},\ y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_2+m_1},\ z=\frac{m_2z_1+m_1z_2}{m_2+m_1}.$$

m_1 與 m_2 同號，則 m_1/m_2 爲正，P 點在 P_1 與 P_2 之間；若爲異號，則 m_1/m_2 爲負，P 點在 P_1P_2 之延長線上，前者爲內分(*internal division*)，後者爲外分(*external division*).

第十五章之問題

1. 若 P_1P_2 在坐標軸上之射影爲 2,−5,3，又 P_2P_3 之正射影爲 −3,2,1，則 P_1P_3 之正射影爲何?

2. 圖 157 中 P_1, R, S, T 之坐標順序爲(2,1,3),(5,1,3),(2,4,3),(2,1,6)，求 P_2 之坐標.

3. 若 P_1P_2 在坐標軸上之正射影爲 3,−2,7，而 P_1 之坐標爲(−4,3,2)，求 P_2 之坐標.

4. 求下列各兩點間之距離:

(a) (4,3,−4),(−2,1,−5).

(b) (3,−8,6),(6,−4,6).

(c) (4,7,−2),(3,5,−4).

(d) (−1,5,−5),(−1,2,−5).

(e) (−4,−1,−4),(2,2,−2).