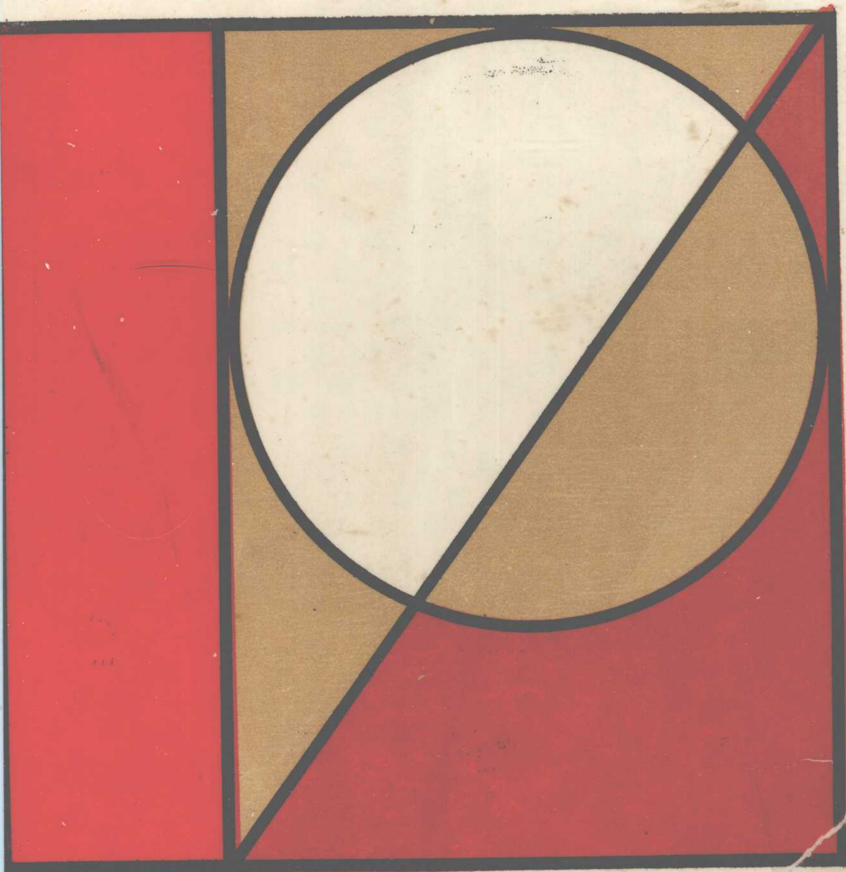

基础数学概要

·下·

福建科学技术出版社

基础数学概要（下）

方德植　主编

李轮焕　陈鹄汀
杨汉钊　刘恭远　编

福建科学技术出版社

1989·福州

基础数学概要（下）

方德植　主编

李轮焕　陈鹤汀　编
杨汉钊　刘恭远

*

福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米　1/32　11.5印张　253千字
1989年11月第1版
1989年11月第1次印刷
印数：1—1,700

ISBN　7—5335—0289—2/O·14

定价：3.65元

序　　言

《厦门数学通讯》《基础数学概要》

数学是基础科学，它是其他自然科学与工程技术的基础。随着社会主义建设的需要，数学的应用日益广泛，成为工农业生产、科学研究和工程技术中不可缺少的工具。

抓好中学数学教育是提高数学水平的关键。近几年来，中等学校在进行教育改革过程中，将把若干高等数学的课程（如微积分、概率论、逻辑代数等）的基本知识下放到中学里学习。

鉴于我国中学数学教师中大专程度的人数不多，高等院校数学系毕业的就更少了，目前刻不容缓的任务是要培养一批能胜任高等数学教学工作的中学教师。我们在1981年就开始进行编写有关这方面的教学参考教材：《基础数学概要》，并已于1982年在《厦门数学通讯》上以增刊的形式登载了本书的大部分内容，受到了广大读者的欢迎。最近应读者的要求，对原书进行了较大的修改和必要的补充，使内容更加充实。

全书分上、下两册，共十二章。上册包括六章：集合的初步知识、映射、极限理论与连续函数、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分。下册也有六章：定积分、行列式、矩阵及线性方程组、立体解析几何简介、初等方程论、概率统计初步、逻辑代数入门。

本书的特点是：内容精选，由浅入深，重点突出，论证严谨，并联系理论给出典型的例子，对有关理论的背景及其

发展概况也作了扼要的综述。书中所选习题在书末给出了部分答案。这些例题与习题有一定的启发性，以助读者提高分析问题和解决问题的能力。

参加编写本书的有：方德植（主编），李轮焕，陈鹊汀、杨汉钊、刘恭远等同志。

由于我们水平有限，疵谬之处在所难免，望读者不吝批评指正。

编者

于厦门大学

目　录

第七章　定　积　分

定积分学起源于寻求曲线所围成的平面图形的面积和一些其它的实际问题。早在公元前225年，希腊人阿基米得就采用穷竭法计算抛物线弓形的面积，中国的祖暅用球的横截面面积求球的体积；刘徽用增加内接多边形的边数计算圆周率π的近似值等等，这些都是定积分思想的萌芽。后来，定积分的概念逐渐形成，它被定义为“无穷小量之和”的极限。但因当时尚未得到计算定积分的一般方法，以致使定积分学的产生与发展极其迟缓，直到17世纪中叶，牛顿和莱布尼兹各自发现了积分与微分之间的内在联系之后，定积分学才真正成为解决各种实际问题的有力工具并得到迅速发展。

本章着重谈定积分的概念和如何计算定积分及其一些应用等问题。对于超出目前中学教学大纲的有关内容，诸如定积分的存在定理等则从略。

§7·1　定积分的概念及其基本定理

一　定积分的概念

微分和定积分是一对矛盾的两个方面。这里要讨论定积分的计算法，揭示微分和定积分的内在联系，以便更好地掌握微积分的本质。为此，先举两个实例。

例 1　变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知路程$S=S(t)$，则它的速度$V(t)=S'(t)$。反之，若已知物体的速度$V=V(t)$，要决定

路程S对于时间 t 的关系式。

设时间 t 的变动区间为〔a，b〕。则先把区间〔a，b〕用分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

分为 n 个小区间，它们的长为

$$\Delta t_1=t_1-t_0,\quad \cdots\Delta t_n=t_n-t_{n-1}$$

以ΔS_i表示物体在第 i 个时间间隔 Δt_i 内所走过的路程，为了要近似地计算ΔS_i把在 Δt_i 内的速度当作常量，而且就等于这个时间间隔 Δt_i 内任意选定的某一瞬时ξ_i的速度为物体在这时间间隔内的运动速度，于是有

$$\Delta S_i=V(\xi_i)\Delta t_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

把它们相加，就得到总路程S的近似值：

$$S\approx V(\xi_1)\Delta t_1+\cdots+V(\xi_n)\Delta t_n=\sum_{i=1}^{n}V(\xi_i)\Delta t_i \qquad (1)$$

把时间区间无限细分，即当 $\Delta t_i\to 0$时，就得到变速运动的路程的准确值：

$$S=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}V(\xi_i)\Delta t_i \qquad (2)$$

例 2 曲边梯形的面积

在初等数学中，我们已经知道计算三角形和矩形的面积的方法，并且一切多边形的面积都可以分成有限个三角形来计算。但是由曲线围成的图形的面积就不能用初等数学的方法来计算。例如曲边梯形（即三边是直线，一边是曲线，如图7—1所示）的面积，其计算如下：

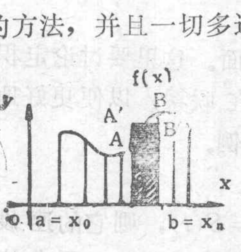

图7—1

设$y=f(x)$在闭区间〔a,b〕上连

续，且$f(x)\geqslant 0$，则 $y=f(x)$ 的图形是上半平面上的一条连续曲线（图7—1）。我们来求由这条曲线、x 轴以及直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 所围成的图形——**曲边梯形**的面积 A。为此，把区间〔a，b〕用点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

分为 n 个小区间〔x_{i-1}，x_i〕 $(i=1, 2, \cdots, n)$。在每个小区间〔x_{i-1}，x_i〕上各选定一点 ξ_i，以 $f(\xi_i)$ 为高，小区间〔x_{i-1}，x_i〕的长 x_i-x_{i-1} 为底作一小矩形（图 7—1 中阴影部分），它的面积是

$$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

因$f(x)$ 连续，故只要底x_i-x_{i-1}很小，则$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$便可作为小曲边梯形$x_{i-1}x_i$BA面积的近似值。若对所分得的每个小区间都按照上述的做法，则可得 n 个小矩形和 n 个小曲边梯形。再注意到我们所要求的曲边梯形的面积A正好等于各个小曲边梯形面积的和，于是 n 个小矩形面积的和

$$\begin{aligned}A_n&=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots\\&\quad+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\end{aligned}\tag{3}$$

可作为A的一个近似值。把区间无限细分，即当 $x_i-x_{i-1}\to 0$ 时，则(3)式的极限就是曲边梯形的面积A的准确值。

因为〔a，b〕是可以分作不相等的小区间的，我们还得明确一下，所谓无限细分应当怎样理解。我们要假定，不仅 n 无限增大，而且连各小区间的长度（$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$）中最长者，记作$\|\Delta x\|$，也趋于零。于是

$$A=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \tag{4}$$

这样，曲边梯形面积的计算就归结为寻求极限（4）的问题。这个极限称为函数$f(x)$在区间〔a，b〕上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x \to 0\|} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{5}$$

并称函数$f(x)$在〔a，b〕上可积；（5）式中$f(x)dx$叫做被积表达式；a和b叫做定积分的下限和上限；"$\int$"叫做积分号，它原先是"Sum"（和）的第一个字母S拉长后所得的；〔a，b〕叫做积分区间；$A_n = \sum\limits_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$叫做积分和。

如果所说的积分和（4）的极限不存在，那么就说$f(x)$在〔a，b〕上不可积或$f(x)$的定积分不存在。

由上面两个例子，我们已经从计算变速直线运动的路程及曲边梯形的面积引出了定积分的定义。但是如果我们认为考虑函数的定积分只是为了解决这两个问题那就不对了。事实上，许多几何问题和物理、力学等等问题的解决也都常常归结到求某个积分和的极限，即归结为某一函数的定积分的计算问题。这方面的内容放在§7·6定积分的应用中来谈。

二　关于定积分定义的几点注意

1　若$f(x)$在〔a,b〕上可积，则定积分$\int_a^b f(x)dx$的值只与被积函数$f(x)$及积分区间〔a，b〕有关，而与积分变量x无关。这是因为把积分变量x改写为另一符号t时，(5)式右端的极限值不变，所以记号$\int_a^b f(t)dt$也表示同一极限值，即

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

2　若$f(x)$在〔a,b〕上可积，且$f(x)>0$，则定积分

$\int_a^b f(x)dx$的几何意义是一个以曲线$y=f(x)$、x轴、直线$x=a$及直线$x=b$所围成的曲边梯形的面积。这是因为，不论被积函数$y=f(x)$所表示的实际意义如何，只要把它看成是xoy平面上方（上半平面）的一条曲线，那么定积分$\int_a^b f(x)dx$的值就是上述曲边梯形的面积。例如，当被积函数$f(x)$表示的是变速直线运动的速度函数，则定积分$\int_a^b f(x)dx$就表示了运动物体从时刻a到时刻b间所走过的路程，这个路程的值就等于该曲边梯形的面积。另外，当$f(x)<0$时，曲线$y=f(x)$在x轴下方。这时，因为$f(\xi_i)<0$而$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0, i=1, 2, \cdots, n$，所以积分和$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<0$，于是取极限后得到的定积分是负值，但其绝对值等于下半平面的一个以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积。因此，当$f(x)<0$时，我们把定积分$\int_a^b f(x)dx$的几何意义解释为一个曲边梯形的负面积。一般情形，函数$f(x)$在区间〔a, b〕上的取值可正也可负，即曲线$y=f(x)$有一部分在x轴上方，有一部分在x轴下方，这时，定积分$\int_a^b f(x)dx$的几何意义可解释为在x轴上方的曲边梯形的正面积与在x轴下方的曲边梯形的负面积的代数和。

3　不管区间〔a, b〕怎样划分，也不管点ξ_i怎样选取，$\lim\limits_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$都应该等于同一个数，才能说定积分$\int_a^b f(x)dx$存在。因此，定积分的存在与否及其值，跟区间〔$a$, b〕的划分与点ξ_i的取法无关。

4　在区间〔a, b〕上连续的函数一定可积（证明略）。但不连续的函数却不一定不可积。例如，在〔a, b〕上单

调、有界而不连续的函数就是这类函数，又如设是可积函数而定义在〔a，b〕上的不连续函数为

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{为有理数}\\ 1 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

是不可积的，因为若取点 ξ_i 都是有理数，则积分和为 0，若取点 ξ_i 都是无理数，则积分和等于$b-a$，因此积分和的极限不存在。所以$f(x)$ 在〔a，b〕上是不可积的。

例 1 求$\int_0^1 xdx$

解 因$f(x)=x$在〔0，1〕上连续，故定积分$\int_0^1 xdx$存在。分〔0，1〕为 n 等分，则分点为

$$0=\frac{0}{n}<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{i-1}{n}<\frac{i}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1$$

在子区间$\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$上取点$\xi_i=\frac{i}{n}$，$i=1$，2，$\cdots n$，则积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

当$\|\Delta x\|=\frac{1}{n}\to 0$，即$n\to\infty$时，上式的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{2}$$

所以

$$\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

由定积分的几何意义知$\int_0^1 xdx$的值就是以（0,0），（1，0）（1，1）为顶点的三角形的面积，其值为$\frac{1}{2}$

例 2 求以曲线 $y=\sin x$，$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$为曲边的曲边梯形的面积。

解 所求的面积是定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$。把$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$分为$n$等分，每个等分长$\|\Delta x\|=|\Delta x|=\frac{\pi}{2n}$，分点为

$$0=\frac{0}{2n}\pi<\frac{\pi}{2n}<\frac{2\pi}{2n}<\cdots<\frac{i\pi}{2n}<\cdots$$
$$<\frac{(n-1)\pi}{2n}<\frac{n\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}$$

在子区间$\left[\frac{(i-1)\pi}{2n},\ \frac{i\pi}{2n}\right]$上取点$\xi_i=\frac{i\pi}{2n}$，$i=1, 2, \cdots, n$，

当$\|\Delta x\|=\frac{\pi}{2n}\to 0$时，即$n\to\infty$时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}=\sin\frac{\pi}{2n}+\sin 2\cdot\frac{\pi}{2n}+\cdots$$
$$+\sin(n-1)\cdot\frac{\pi}{2n}+\sin n\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{2n+1}{4n}x}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{4n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{4n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\cos\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4n}\right)=1$$

例 3 把和式的极限化为定积分。例如，求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

我们把上式的n项和改写为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

最后一个和式可以看成是把区间$[0,1]$分为n等分，并在每个子区间$\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$上取点$\xi_i=\frac{i}{n}$后对函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$所作的积分和。又因$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$在$[0,1]$上连续，所以它是可积的，于是

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

这样便把和式的极限表示为某一函数的定积分。

三　积分学的第二基本问题

定积分的计算是积分学的第二基本问题。表面看来，这

似乎是一个很复杂的问题。首先要作出如（3）那样的和，再取极限（4），而且取极限时，这个和的项数无限增加，又每项都要趋于零，且不管区间〔a,b〕分法怎样，也不管 ξ_i 怎样取法，极限（4）的值应当相等。此外，从表面上看来，积分学的第二基本问题与第一基本问题（求已知函数的原函数）没有什么关系。事实上，这两个问题是紧密地联系着的。若得出$f(x)$的原函数，则定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的计算就很简单。下面就要阐明这个问题。

考虑连续函数 $f(x)$ 的上限为变量的定积分 $\int_a^x f(x)dx$，则它是上限x的函数，令

$$A_{ax}=\int_a^x f(x)dx \qquad (6)$$

现在要证明这个函数A_{ax}是$f(x)$的一个原函数。

只要证明

$dA_{ax}=f(x)dx$。

以$\triangle A_{ax}$ 表示在〔$x, x+\triangle x$〕上曲边梯形的面积，$f(x)\triangle x$是〔$x,x+\triangle x$〕上高为$f(x)$的小矩形的面积，设M和m分别表示$f(x)$在〔$x,x+\triangle x$〕上的最大值和最小值。从图 7—2 立刻看出

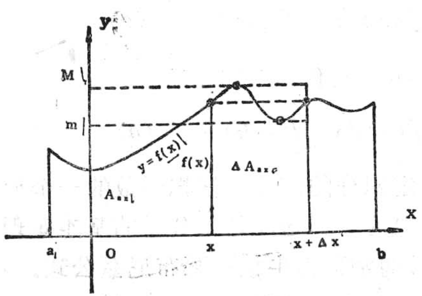

图7—2

$$|\triangle A_{ax}(x)-f(x)\triangle x|\leqslant(M-m)\triangle x$$

由于$f(x)$是连续函数，因此当$x\to 0$时，$M—m\to 0$，所以

$$\triangle A_{ax}(x)\to f(x)dx \qquad (\triangle x\to 0)$$

即

$$dA_{ax}=f(x)dx$$

上面得到的结果可叙述如下：

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则上限为变量的定积分（6）是这上限x的一个函数，它对上限x**的导数等于被积函数 f(x)。换言之，上限为变量的定积分是被积连续函数的一个原函数。**

等式（6）表明定积分与微分的联系。

现在要讲的是，若知道了$f(x)$的任一原函数 $F_1(x)$，怎样来计算定积分$\int_a^b f(x)dx$。根据上述结果，及第一段的叙述，我们可以写

$$\int_a^x f(x)dx=F_1(x)+C$$

式中C为一个常数。为了确定 C，我们首先注意到，当 $x=a$ 时，显然有$A_{ax}=0$，即上式的左边等于零。于是推出

$$0=F_1(a)+C，\quad 即C=-F_1(a)$$

代入上式，得到

$$\int_a^x f(x)dx=F_1(x)-F_1(a)$$

然后，令$x=b$，就有

$$\int_a^b f(x)dx=F_1(b)-F_1(a) \qquad (7)$$

因此，定积分的值等于被积函数的一个原函数在积分上限与下限的值的差。这就是积分学的基本定理。

公式(7)通常称为牛顿—莱布尼兹公式。基本定理表达了定积分与不定积分的联系。