21st CENTURY
实用规划教材

21世纪全国高等院校实用规划教材

运筹学

主　编　徐裕生　张海英
主　审　熊义杰

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校实用规划教材

运 筹 学

主　编　徐裕生　张海英

副主编　张俊敏　吴　园

参　编　屈漫利　吴亚丽

主　审　熊义杰

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

内容简介

本教材是介绍运筹学的一些重要分支基本理论和方法的基础教材，注重培养运用运筹学的方法分析和解决实际问题的能力。全书包括线性规划、动态规划、网络规划、决策与对策、存储问题、实验指导与运算软件6个部分，共10章。书中除了有大量例题外，每一章还附有一定数量的习题、答案，教学课件可供教学使用。

本教材侧重于实际问题的建模和计算，可作为高等院校理工科运筹学课程教材，也可供从事实际工作的工程技术人员以及管理人员、企业家、商业经营者等学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/徐裕生，张海英主编. —北京：北京大学出版社，2006.4
(21世纪全国高等院校实用规划教材)
ISBN 7-301-10597-5

Ⅰ.运… Ⅱ.①徐… ②张… Ⅲ.运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.022

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第024158号

书　　名：运筹学
著作责任者：徐裕生　张海英　主编
策划编辑：李　虎
责任编辑：郭穗娟
标准书号：ISBN 7-301-10597-5/O·0687
出 版 者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn　http://www.pup6.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667
电子信箱：pup_6@163.com
排 版 者：北京东方人华北大彩印中心　电话：62754190
印 刷 者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　12.75印张　300千字
2006年4月第1版　2006年4月第1次印刷
定　　价：20.00元

前　　言

运筹学是20世纪40年代开始形成的一门新的学科。它用定性与定量分析的方法来研究现实世界系统运行的规律，从中提出具有共性的模型，寻求解决模型的方法，其目的是帮助管理者选择最优决策方案，因此运筹学是实现管理现代化必不可少的工具。运筹学又是一门应用学科，也是交叉学科。因此它在工程技术、生产管理、财政经济、军事作战、科学实验及社会科学中都得到广泛的应用，越来越受到各部门和企业的重视。目前许多高等院校的很多专业，特别是理工科专业都把运筹学列为选修课，有的专业已把它列为必修课。

本教材有以下特色：在叙述与论证方面力求简洁清晰，尽量避免冗长的定理证明；理论与算法能联系实际问题，特别注重实用性；在内容深度上力求被具有高等数学、线性代数和概率统计基础知识的读者顺利地接受和掌握；注重运筹学与相关学科分支的互相渗透和彼此促进；注重数学模型与计算机软件的结合，给出了与数学模型相对应的计算机算法，便于计算结果，分析结果。因此本教材能培养学生的“优化”意识、决策能力和思考能力，特别是建立模型的能力和用计算机软件解决实际问题的能力。

本教材作为理工科本科或大专院校的教材，也可供从事实际工作的工程技术人员、管理人员、企业家、商业经营者等学习参考。建议总课时为40～60课时，上机课时安排在6～10课时。

本教材共10章，可分为6部分：线性规划(第1章至第4章)，动态规划(第5章)，网络规划(第6章)，决策与对策(第7章和第8章)，存储问题(第9章)，实验指导(第10章，为综合性设计与训练提供帮助)。

参加本教材编写的单位和老师有：西安建筑科技大学的徐裕生老师、张俊敏老师(负责编写绪论、第5章、第7章、第8章)，西安理工大学的屈漫利老师、吴亚丽老师、张海英老师(负责编写第1章、第2章、第3章、第4章、第6章、第10章)，西安工程科技学院吴园老师(负责编写第9章)。参加教学课件制作的老师有：张海英老师、吴亚丽老师（负责制作绪论、第1章、第2章、第3章、第4章、第6章）、徐裕生老师、张俊敏老师、魏宗田老师（负责制作第5章、第7章、第8章）、吴园老师(负责制作第9章)。全书由徐裕生、张海英担任主编，张俊敏、吴园担任副主编，西安理工大学的熊义杰教授担任主审。熊教授极其认真地审阅了全稿，并提出了许多宝贵的改进意见，在此表示诚挚的感谢。

由于编者的能力有限，时间仓促，错误之处在所难免，欢迎读者批评指正并提出宝贵意见。

编者
2006年1月

目　录

绪　论

一、运筹学的产生及发展

运筹学(Operational Research)的原意是“运用研究”、“操作研究”、“作业研究”或“作战研究”，简称 OR。中文译名“运筹学”则是出自《史记·高祖本记》中刘邦的一句话：“夫运筹于帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房；……”借用了其中的“运筹”作为 OR 的中文译名十分恰当，因为运筹学不单单只有数学，还含有决策、规划等其他相关学科的内容，也表明我国早已有运筹学的萌芽。

各国学者对运筹学的定义的解释各不相同。P.M.Morse 与 G.E.kimball 给运筹学下的定义是：“运筹学是在实行管理的领域运用数学方法对需要进行管理的问题统筹规划、作出决策的一门应用科学。”运筹学的另一位创始人把运筹学定义为：“管理系统的人为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法。”也有的学者把运筹学描述为就组织系统的各种经营作出决策的科学手段，它使用许多数学工具(包括高等数学、线性代数、概率统计、数理分析、随机过程等)和逻辑判断方法，来研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题，以便获得最大效益。

运筹学的早期工作及其历史可以追溯到 1914 年，兰彻斯特(Lanchester)提出军事运筹学的战斗方程，而存储论的最优批量公式是在 20 世纪 20 年代初提出来的。列温逊在 20 世纪 30 年代已经用运筹学思想分析商业广告和顾客心理。运筹学的活动是从第二次世界大战初期的军事任务开始，当时迫切需要把各种稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军事活动团体，所以英国和美国等军事管理当局号召科学家运用科学手段来处理战略与战术问题。在第二次世界大战期间，运筹学成功地解决了许多重要的作战问题，显示了其巨大的威力。

但是运筹学作为一门科学是在第二次世界大战后期才形成的。在战后的工业恢复时期，由于组织内与日俱增的复杂性和专业化所产生的问题，使运筹学进入工商企业和其他部门，并在 20 世纪 50 年代以后得到广泛的应用。其中系统配置、聚散、竞争、优化的运用机理得到深入的研究和应用，形成了一套较完备的理论，如规划论、排队论、存储论、决策论等。后来电子计算机的问世又大大促进了运筹学的发展。不久许多国家相继成立了专门的运筹学会，1948 年英国成立运筹学学会，1952 年美国成立了运筹学学会，1957 年国际运筹学协会成立了，至 1986 年全世界已有 38 个国家和地区成立了运筹学学会或类似的组织。我国于 1956 年由中国科学院成立了运筹学小组，并于 1980 年成立了运筹学学会。

运筹学概念虽然起源于欧美国家，但在学科研究方面，我国并不落后。20 世纪 50 年代中期，著名数学家华罗庚等老一辈科学家对此作出了突出贡献。20 世纪 60～70 年代，华罗庚的“优选法”和“统筹方法”被各部门采用，取得很好的经济效果，受到中央领导的好评。改革开放以来，运筹学的应用更为普遍，例如运用线性规划进行全国范围的粮食、钢材的合理调运和广东省内的水泥合理调运等，同时简单易行的“图上作业法”也发挥了

作用。运筹学方法在企业管理中的应用取得明显的经济效益，提高了企业的管理水平，受到企业决策层和主管部门的重视。

二、运筹学的性质和特点

运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际问题。运筹学研究的对象是经济、军事及科学技术等活动中能用数量关系来描述的有关决策、筹划与管理等方面的问题。运筹学着重以管理、经济活动方面的问题及解决这些问题的原理和方法作为研究对象。

运筹学发展到今天，内容已相当丰富，分支也很多，主要包括线性规划、整数规划、目标规划、多目标规划、非线性规划、动态规划、图与网络、决策论、对策论、排队论、存储论、可靠性与质量管理、层次分析法等。显然，运筹学具有多学科交叉的特点，是跨学科的应用科学。

由于运筹学具有广泛的应用性，为了有效地应用运筹学，英国前运筹学会会长汤姆林森(Tomlin Son)提出了以下 6 条原则。

(1) 合作原则：运筹学工作要和各方面的人士尤其是同实际部门工作者合作。

(2) 催化原则：在多学科共同解决某问题时，要引导人们改变一些常规的看法。

(3) 互相渗透原则：要求多部门彼此渗透地考虑问题，而不是只局限于本部门。

(4) 独立原则：在研究问题时，不应受某人或某部门的特殊政策所左右，应独立工作。

(5) 宽容原则：解决问题的思路要宽，方法要多，而不是局限于某种特定的方法。

(6) 平衡原则：要考虑各种矛盾的平衡、关系的平衡。

总之，应用运筹学要集思广益，取长补短，灵活运用，积极进取。运筹学在研究问题方面具有以下特点。

(1) 运筹学借助于模型，用定量分析的方法或定量与定性分析方法相结合，合理地解决实际问题，广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题，故其应用不受行业和部门的限制。

(2) 运筹学是多学科专家集体协作研究的结晶。运筹学既对各种经营活动进行创造性的科学研究，又涉及到组织的实际管理问题，具有很强的实践性，最终能向决策者提供建设性意见，并收到实效。

(3) 运筹学以“整体最优”为目标，从系统的观点出发，力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突；对所研究的问题求出最优解，或最佳的行动方案，所以它也常被看成是一门优化技术，提供的是解决各类问题的优化方法。

(4) 电子计算机是不可缺少的工具，计算机的发展使许多运筹学方法得以实现和发展。目前已有不少可以求解运筹学各种问题的成熟软件，如 Matlab、Qsb、Mathematical、lindo、lingo 等。

三、运筹学的模型和应用

运筹学在解决实际问题的过程中，其核心问题是建立模型。建立模型的主要步骤如下。

1. 明确目标

即通过对实际问题的调查研究，搜集有关资料，弄清问题的目标、可能的约束、问题的有关变量以及有关参数。

2. 建立模型

构建模型是运筹学研究的关键步骤，模型主要有像形模型、模拟模型和数学模型三大类型，其中以数学模型为主。在建立模型时，往往要根据一些理论的假设或设立一些前提条件对模型进行必要的抽象和简化。

建立模型需要注意以下几点：

(1) 要有一组决策变量。

(2) 要有一组反映系统逻辑和约束关系的约束方程。

(3) 建立能反映决策目标的目标函数。

(4) 搜集与系统密切相关的各种参数。

3. 求解与检验

对建立的模型求解计算，得到的结果是解决问题的一个初步方案。结果是否满意，还需检验；若不满意，要重新考虑模型的建立是否合理，采用的数据是否完整与科学，并对模型进行修正或更改。经过反复检验和修正模型后求得的结果才是符合实际的可行方案。

需要注意的是，由于模型和实际存在差异，由模型得到的最优解可能是实际系统的近似解或者满意解，因此得到的结果只能是给决策者提供一个决策的参考。

4. 分析与实施

当求出结果后，必须对结果进行分析。要求管理人员(决策者)和建模人员共同参与，让决策者了解求解的方法步骤，对结果赋予经济含义，并从中获取求解过程中宝贵的经济信息，便于结果的真正实施。

近几十年来，运筹学模型已广泛应用于许多领域。在军事、交通运输及国民经济各部门的资源分配与管理、工程优化设计、市场预测与分析、生产计划管理、库存管理、计算机与管理信息系统等诸多领域都有重要的应用成果出现。

运筹学模型的应用越来越受到重视。例如，以兰德公司(RAND)为首的一些部门十分注重研究战略性问题，如为美国空军评价各种轰炸机系统，讨论未来的武器系统和未来战争的战略。

美国的杜帮公司在20世纪50年代就非常重视运筹学在广告工作、产品评价和新产品开发方面的应用；通用电气公司还对某些市场进行了模拟研究。美国的西电公司将库存理论与计算机的物质管理信息相结合，取得了显著的成效。

在我国，为解决粮食部门的合理运输问题，数学家万哲先提出了“图上作业法”，管梅谷教授提出了国外称之为“中国邮路问题”的解法。排队论应用于矿山、港口、电信及计算机设计等方面；图论用于线路布置、计算机设计和网络流量控制问题；存储论在应用汽车工业等方面也获得成功。运筹学目前已趋向研究和解决规模更大、更复杂的问题，并与系统工程紧密结合。这门学科今后必将在我国的科学技术现代化和管理现代化进程中发挥巨大的作用。

第 1 章　线性规划及单纯形法

线性规划是运筹学的一个重要分支。1947 年，当时正在美国空军担任数学顾问的丹捷格(Dantzig)在《最优规划的科学计算》中提出“如何使规划过程机械化”问题，并着手建立数学模型。他从改造投入产出模型入手，逐步研究，形成了“单纯形法”，并于 1953 年提出“改进单纯形法”，以解决计算机求解过程中的舍入误差问题。之后，线性规划理论逐步趋向成熟，在实用中日益广泛和深入。特别是随着计算机应用的日益普及，线性规划的适用领域更为广泛。

1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　问题的提出

在生产管理和经营活动中经常提出的一类问题是：如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源，得到最好的经济效果。

【例 1.1】 某工厂在计划期内要安排生产 I 、II 两种产品，已知生产单位产品所需的设备台数及 A、B 两种原材料的消耗量，见表 1-1。该工厂每生产一件产品 I 可获利润 2 元，每生产一件产品 II 可获利润 3 元，问应如何安排生产计划使该工厂获得的利润最大？

表 1-1　产品、资源信息

资源＼产品	I	II	资源限量
设备/台	1	2	8
原材料 A/kg	4	0	16
原材料 B/kg	0	4	12

解：设 x_1 、 x_2 分别表示在计划期内产品 I 、II 的生产量，在满足资源限量的条件下，它们必须同时满足下列条件。

对设备有效台数：　$x_1+2x_2\leqslant 8$

对原材料 A：　$4x_1\leqslant 16$

对原材料 B：　$4x_2\leqslant 12$

该工厂的生产目标是在不超过所有资源限量的条件下，确定生产量 x_1 、 x_2 ，使该厂得到的利润最大。若用 Z 表示总利润，则有

$$\max Z=2x_1+3x_2$$

综合上述，该生产计划问题可用数学模型表示为

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 1.2】 某工地租赁甲、乙两种机械来安装 A、B、C 三种构件，这两种机械每天的安装能力见表 1-2。工程任务要求安装 250 根 A 构件，300 根 B 构件和 700 根 C 构件；又知机械甲每天租赁费为 250 元，机械乙每天租赁费为 350 元，试决定租赁甲、乙机械各多少天，才能使总租赁费最少？

表 1-2 机械安装能力信息

构件 / 机械	A	B	C
机械甲	5	8	10
机械乙	6	6	20

解：设租赁机械甲 x_1 天，机械乙 x_2 天。为满足 A、B、C 三种构件的安装要求，必须满足以下条件：

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geqslant 250 \\ 8x_1 + 6x_2 \geqslant 300 \\ 10x_1 + 20x_2 \geqslant 700 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

若用 Z 表示总租赁费，则该问题的目标函数可表示为 $\min Z = 250x_1 + 350x_2$。该问题的数学模型可表示为

$$\min Z = 250x_1 + 350x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geqslant 250 \\ 8x_1 + 6x_2 \geqslant 300 \\ 10x_1 + 20x_2 \geqslant 700 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的数学模型

从前一节的两例题可以看出，它们都属于一类优化问题。下面介绍建立实际问题线性规划模型的基本步骤。

(1) 确定决策变量。这是很关键的一步，决策变量选取得当，不仅会使线性规划的数学模型建得容易，而且求解比较方便。

(2) 找出所有限制条件，并用决策变量的线性等式或不等式来表示，从而得到约束条件。一般可用表格形式列出所有的限制数据，然后根据所列出的数据写出相应的约束条件，以避免遗漏或重复所规定的限制要求。

(3) 把实际问题所要达到的目标用决策变量的线性函数来表示，得到目标函数，并确定是求最大值还是最小值。

(4) 根据实际问题添加非负约束。

线性规划的数学表达式称为线性规划的数学模型，一般形式为

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{matrix}(1\text{-}2)\\ \\ \\ \\ (1\text{-}3)\end{matrix}$$

其中，式(1-1)称为目标函数；式(1-2)、式(1-3)统称为约束条件；而式(1-3)称为非负约束。

1.1.3 线性规划问题的标准型

线性规划问题的数学模型有各种不同的形式。目标函数有求max的，有求min的；约束条件可以是“≤”形式的不等式，也可以是“≥”形式的不等式，还可以是等式；决策变量一般是非负约束，但也允许在(−∞，∞)范围内取值，即无约束。为了便于讨论和求解，需要将线性规划问题的数学模型写成一个统一格式，称为线性规划问题的标准型。其统一格式规定如下。

(1) 目标函数取最大化。

(2) 所有约束条件用等式来表示。

(3) 所有决策变量取非负值。

(4) 每一约束条件的右端常数(资源限量)为非负值。

由此，线性规划问题的标准型为

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

其简缩式为

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

用向量形式可写为

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$；$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$；$P_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$；$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$；向量$P_j$对应的决策变量是$x_j$。

用矩阵形式可表示为

$$\max Z=CX$$
$$\begin{cases}AX=b\\X\geqslant O\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\vdots&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=[P_1,P_2,\cdots,P_n]$$

$O=(0，0，\cdots，0)^{\mathrm{T}}$是$m$维列向量，一般$m\leqslant n$。

通常称A为约束条件的$m\times n$维系数矩阵；b为资源向量；C为价格向量；X为决策变量向量。

线性规划问题的数学模型都可以变换为标准型，具体步骤如下。

(1) 目标函数为最小化即$\min Z=CX$时。变换为求目标函数最大化，令$Z'=-Z$，则$\max Z'=-CX$。

(2) 约束方程为不等式时。这里有两种情况：一种是“≤”形式的不等式，则可在“≤”不等号的左端加入一个非负松弛变量，把原“≤”不等式变为等式；另一种是“≥”形式的不等式，则可在“≥”不等号的左端减去一个非负剩余变量，把“≥”不等式变为等式。下面举例说明。

【例1.3】 将例1.1的数学模型化为标准型。

例1.1的数学模型为

$$\max Z=2x_1+3x_2$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8\\4x_1\leqslant 16\\4x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：在约束不等式中分别加上一个松弛变量x_3,x_4,x_5，使不等式变为等式，这时得到标准型

$$\max Z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8\\4x_1\qquad\qquad+x_4=16\\\qquad4x_2\qquad\qquad+x_5=12\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

所加松弛变量x_3,x_4,x_5表示资源的剩余量，当然也就没有利润，在目标函数中其系数c_3,c_4,c_5为零。

(3) 若存在取值无约束的决策变量x_k，可令$x_k=x_k'-x_k''$，其中$x_k',x_k''\geqslant 0$。

(4) 若存在 $b_i<0$ 的约束条件，则在约束条件的两边同乘-1。

以上讨论说明，任何形式的线性规划问题的数学模型都可以化为标准型。

【例 1.4】 将下列线性规划问题化为标准型。

$$\min Z=-x_1+2x_2-3x_3$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leqslant 7 \\ x_1-x_2+x_3\geqslant 2 \\ 3x_1-x_2-2x_3\geqslant -5 \\ x_1,x_2\geqslant 0,x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解：(1) 令 $x_3=x_4-x_5$，其中 $x_4,x_5\geqslant 0$。

(2) 在第一个约束不等式的左端加入非负松弛变量 x_6。

(3) 在第二个约束不等式的左端减去非负剩余变量 x_7。

(4) 在第三个约束条件的两边同乘(-1)。

(5) 令 $Z'=-Z$，把求 $\min Z$ 改为求 $\max Z'$，即可得到该问题的标准型。

$$\max Z'=x_1-2x_2+3(x_4-x_5)+0x_6+0x_7$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+(x_4-x_5)+x_6=7 \\ x_1-x_2+(x_4-x_5)-x_7=2 \\ -3x_1+x_2+2(x_4-x_5)=5 \\ x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

注：以下所涉及到的线性规划问题，如无特别说明，都指的是标准型。

1.2 线性规划问题解的基本理论

1.2.1 线性规划问题的图解法

为了给后面的线性问题的基本理论提供较直观的几何说明，先介绍线性规划问题的图解法。

我们把满足约束条件和非负条件的一组解叫做可行解，所有可行解组成的集合称为可行域。

图解法的一般步骤如下。

(1) 建立平面直角坐标系。

(2) 根据线性规划问题的约束条件和非负条件画出可行域。

(3) 作出目标函数等值线 $Z=c$(c 为常数)，然后根据目标函数平移等值线至可行域边界，这时目标函数与可行域的交点即最优解。

【例 1.5】 对例 1.1 用图解法求解。

解：在以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系中，非负条件 x_1，$x_2\geqslant 0$ 是指解值在第一象限，每个约束条件都代表一个半平面，如约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 是代表从直线 $x_1+2x_2=8$ 为边界的左下方的半平面，则它满足所有约束条件和非负条件的可行解集合即可行域，如图 1.1 所示的阴影部分。

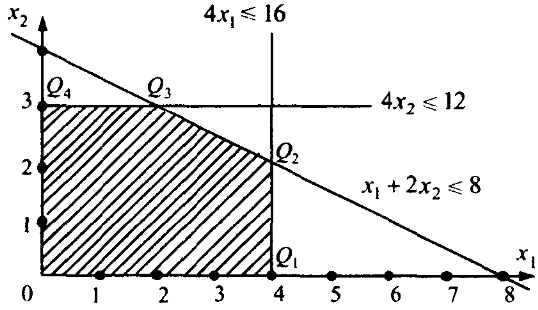

图 1.1　可行域

再分析目标函数 $Z=2x_1+3x_2$，令 $Z=c$，随着 c 的取值不同，可得到平面上一族平行线。位于同一直线上的点具有相同的目标函数值，即称“等值线”，当 c 值由小变大时，直线 $2x_1+3x_2=c$ 沿其法线方向向右上方移动。当移动到 Q_2 点时，使 Z 值在可行域上实现最大化(如图 1.2 所示)，这就得到了例 1.1 的最优解 $Q_2(4，2)$，$Z=14$。这说明该厂的最优生产计划方案是：生产 I 产品 4 件，生产II产品 2 件，可得最大利润 14 元，该线性规划问题有唯一最优解。

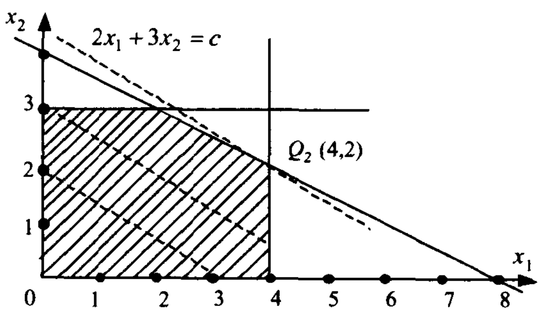

图 1.2　唯一最优解

若将例 1.1 的目标函数变为 $\max Z=2x_1+4x_2$，则表示目标函数的等值线与约束条件 $x_1+2x_2 \leqslant 8$ 的边界线 $x_1+2x_2=8$ 平行。当 Z 值由小变大时，与线段 Q_2Q_3 重合，如图 1.3 所示，线段 Q_2Q_3 上任意一点都使 Z 取得相同的最大值，即这个线性规划问题有无穷多最优解。

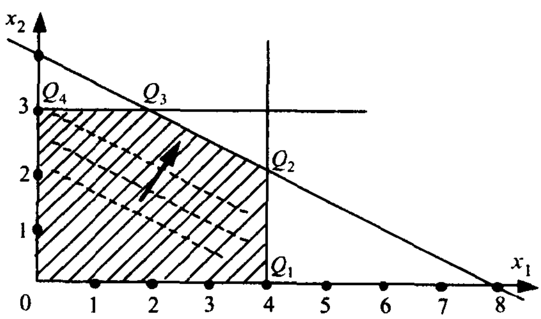

图 1.3　无穷多最优解

【例 1.6】 用图解法求解下列线性规划问题

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：求解结果如图 1.4 所示，从图中可以看到，该线性规划可行域无界、目标函数可以无限增大，因此称这种解为无界解，即不存在最优解。

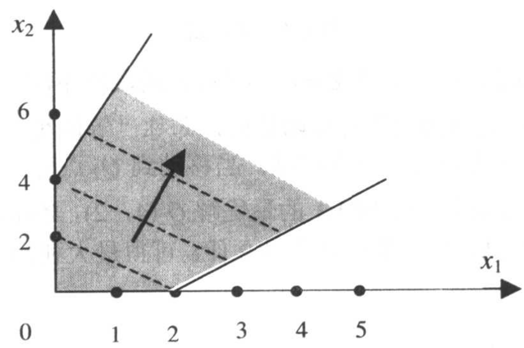

图 1.4　无界解

如果在例 1.1 的数学模型中增加一个约束条件：$-2x_1 + x_2 \geqslant 4$，则该线性规划问题的可行域为空集，即无可行解，也不存在最优解。

通过上述图解法我们看到，当线性规划问题的可行域为非空时，它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解，它一定可以在可行域的某个顶点得到；若在两个顶点同时得到最优解，则它们的连线上任意一点都是最优解，如图 1.3 所示，即有无穷多最优解；若可行域无界，如图 1.4 所示，则无最优解。

线性规划问题的解有四种情况：唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解。

1.2.2　线性规划问题解的几何意义

在 1.2.1 节介绍图解法时，已直观地看到可行域和最优解的几何意义。在一个线性规划问题中，每一个约束条件(包括资源约束与非负约束)实际上对应着平面坐标系的一个半平面(三维坐标系为半空间)，而所有的这些半平面的共同部分，就构成了这个线性规划问题的可行域。如果用 s_j 表示每一个半平面，用 s 表示可行域，则有 $s = s_1 \cap s_2 \cap \cdots \cap s_m$，其中可行域中的每一个点都是可行解，能够使目标函数取得极值的可行解就是最优解。下面从理论上进一步讨论。

1. 基本概念

(1) 基。设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组的 $m \times n$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中 $m \times m$ 阶非奇异子矩阵($|\boldsymbol{B}| \neq 0$)，则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。这就是说，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 m 个线性独立的列向量组成，且不失一般性，可设