成 人 高 等 教 育 教 材

高 等 数 学

上 册

邵 因 彭绍明 贲 亮 编

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
·北京·

内容简介

本书是参照普通高等理工院校成人教育高等数学教学基本要求编写的。全书分上、下两册。上册包括第一章至第八章，内容为：函数、极限、连续、一元函数的微积分学和微分方程；下册包括第九章至第十四章，内容为：空间解析几何与矢量代数、多元函数的微积分学和级数。

本书深入浅出、通俗易懂、便于自学，可作为高等函授教育、现代远程教育及夜大学等成人高等教育(工科)的教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/邵因，彭绍明，贲亮编．—北京：北京邮电大学出版社，2002

ISBN 7-5635-0589-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．①邵…②彭…③贲…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010455 号

出 版 者：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮编：100876　发行部电话：(010)62282185　62283578(传真)
E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷厂

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32　**印　　张**：15.25

印　　数：1—7 000 册　**字　　数**：393 千字

版　　次：2002 年 5 月第 1 版　2002 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0589-X/O·37　定价：27.00 元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　言

本书根据邮电高等函授教材编审委员会审定的《高等数学》教学大纲，并参照普通高等理工院校成人教育《高等数学教学基本要求》编写而成，可作为高等函授、夜大学及远程教育等工科院校的教学用书。

全书分为上、下两册。上册内容包括：函数、极限、连续、一元函数的微积分和微分方程。下册内容包括：空间解析几何与矢量代数、多元函数的微积分和级数。书中加 * 号处为本科选学内容，加 * 号与△号处为专科选学内容。

本书编写力求逻辑严密、重点突出、深入浅出、便于自学。文中穿插有学习指导，各章后均有内容总结与要求，并配有自我检查的思考题和练习题，两册书末均附有练习题的答案和教学进度表。上册书末还附有希腊字母表、常用曲线图、积分表和教学大纲。

学生应循序渐进地阅读本教材，重点和难点内容需反复阅读，并要认真、独立地回答全部思考题和完成规定的练习题。

本书由北京邮电大学网络教育学院基础教研室组织编写，$\boxed{\text{邵因}}$副教授编写第一、二、三、四、六、七、十二、十三、十四章，彭绍明副教授编写第九、十、十一章，贲亮副教授编写第五、八章，全书由$\boxed{\text{邵因}}$副教授主编。

本书在使用了 11 年的基础上，现由贲亮副教授负责对原有内容进行了部分的调整与修改后正式出版，敬请使用本书的师生提出宝贵意见。

编　者

2002 年 5 月

目　　录

第一章　函 数 …… 1
第一节　函数的定义…… 1
第二节　函数的定义域…… 6
第三节　函数记号 …… 12
第四节　函数的几种特性 …… 17
第五节　反函数 …… 23
第六节　基本初等函数 …… 26
第七节　复合函数　初等函数 …… 32
本章总结 …… 39
第二章　函数的极限 …… 40
第一节　数列的极限 …… 41
第二节　函数的极限 …… 49
第三节　无穷小和无穷大 …… 59
第四节　极限运算法则 …… 65
第五节　两个重要极限 …… 75
第六节　无穷小的比较 …… 84
本章总结 …… 88
第三章　函数的连续性 …… 90
第一节　函数的连续与间断 …… 90
第二节　初等函数的连续性 …… 98
第三节　闭区间上连续函数的性质…… 107

本章总结 …… 109
第四章 导数与微分 …… 111
第一节 导数概念 …… 111
第二节 函数的和、积、商的求导法则 反函数的求导法 …… 125
第三节 复合函数的求导法则 …… 135
第四节 初等函数的求导问题 …… 140
第五节 高阶导数 …… 148
第六节 隐函数求导法 由参数方程所确定的函数求导法 …… 153
第七节 函数的微分 …… 164
本章总结 …… 176
第五章 导数的应用 …… 179
第一节 中值定理 …… 179
第二节 罗必塔法则 …… 187
第三节 函数单调性的判定法 …… 196
第四节 函数的极值及其求法 …… 201
第五节 函数的最大值和最小值 …… 207
第六节 曲线的凹凸与拐点 …… 211
第七节 函数作图举例 …… 215
*第八节 曲线的曲率 …… 221
本章总结 …… 229
第六章 不定积分 …… 230
第一节 不定积分的概念和性质 …… 230
第二节 换元积分法 …… 242
第三节 分部积分法 …… 260
第四节 特殊类型函数的积分 …… 266
第五节 积分表的用法 …… 281

本章总结……………………………………………… 285
第七章　定积分及其应用……………………………………… 288
第一节　定积分的概念……………………………………… 288
第二节　定积分的性质……………………………………… 296
第三节　定积分与不定积分的关系………………………… 303
第四节　定积分的换元积分法和分部积分法……………… 311
*第五节　定积分的近似计算法……………………………… 322
第六节　平面图形的面积　元素法………………………… 328
第七节　体 积 ……………………………………………… 338
第八节　平面曲线的弧长…………………………………… 343
△第九节　定积分在物理中的应用…………………………… 347
第十节　广义积分…………………………………………… 352
本章总结……………………………………………… 360
第八章　微分方程……………………………………………… 363
第一节　微分方程的基本概念……………………………… 363
第二节　一阶微分方程……………………………………… 367
△第三节　可降阶的高阶微分方程…………………………… 380
第四节　线性微分方程解的结构…………………………… 386
第五节　二阶常系数齐次线性微分方程…………………… 390
第六节　二阶常系数非齐次线性微分方程………………… 397
*第七节　常系数线性微分方程组解法举例………………… 409
本章总结……………………………………………… 413
附录 A　希腊字母表……………………………………… 416
附录 B　常用曲线图……………………………………… 417
附录 C　积分表…………………………………………… 422
附录 D　习题答案………………………………………… 435
附录 E　高等数学教学大纲……………………………… 469
附录 F　第一学期高等数学教学进程表 ………………… 476

第一章　函　数

函数是高等数学研究的对象,因此,函数的概念是高等数学中最重要的概念之一.本章将首先给出函数的定义.高等数学中多数研究的是初等函数.本章将复习各类基本初等函数及其图形,介绍复合函数,最后给出初等函数的概念.

第一节　函数的定义

一、定义的引出

在同一种自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量,而且这几个变量通常并不是互不相干地、孤立地在变化着,而是相互联系地、遵循着一定的规律在变化着.下面先就两个变量的情形(多于两个变量的情形在第九章中介绍)举几个例子.

例 1　真空中自由落体下落的时间 t 和下落的路程 s 都是变量,并且这两个变量并不是孤立地变化着,而是遵循自由落体运动的规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

相互联系地变化着,其中 g 是重力加速度.

例 2　一个10 Ω 的电阻,使用不同的电压通电,用电流表测得电压 U 和电流 I 的关系如表 1-1 所示.

在这个问题中,电压 U 和电流 I 都是变量,并且是遵循表

1-1 所示的规律（U 为 5 V 时，I 为 0.55 A，U 为 10 V 时，I 为 1.04 A……）相互联系地变化着.

表 1-1

U/V	5	10	15	20	25	30
I/A	0.55	1.04	1.45	2.01	2.45	3.01

例 3 某气象观测站用自动温度记录仪，记录得到某日某地区的气温变化如图 1-1 所示. 这里时间 t 和温度 T 都是变量，并且遵循图示规律相互联系地变化着.

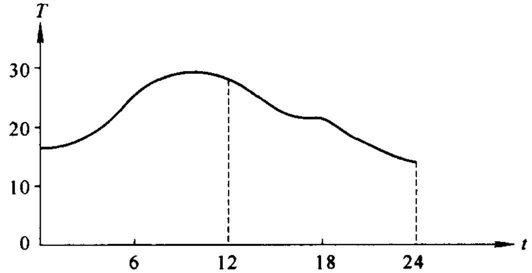

图 1-1

上述诸例，虽然实际意义各不相同，但是它们的共同点是：含有两个变量，不妨叫做 x 和 y，当某一变量（如 x）每取定一值时，另一变量（如 y）总有确定的值和它相对应. 我们把变量 y 叫做变量 x 的函数（如前述诸例中，路程是时间的函数；电流是电压的函数；温度是时间的函数）. 这就是函数定义的粗略说法.

然而当我们更加深入地考察上述诸例之后，发现在函数的概念中有两个要素.

首先，第一个变量所能取的值，是有范围限制的. 如例 1 中的 t 只能取在开始下落的时刻到着地的时刻之间；例 2 中的 U 只取了 5,10,15,20,25,30 六个值；例 3 中的 t 只取 0 ~ 24 小时之间的

值.因此,第一个变量的变化范围应该是函数概念中的一个要素.

其次,两个变量之间都存在着一个对应规律.如例 1 中的对应规律是“t 平方后乘 $g/2$ 得 s”;例 2 中的对应规律如表 1-1 所示;例 3 中的对应规律如图 1-1 所示.因此,两个变量之间的对应规律应该是函数概念的另一个要素.

显然,这两个要素应该反映在函数的定义中.于是,抛开上述诸例的实际意义,就可以抽象得到函数的确切定义了.

二、函数的定义

定义 1 若变量 x 在某**范围**内每取定一值* 后,根据某一**对应规律**,变量 y 总有确定的值与之对应,就称 **y 是 x 的函数**.

x 叫做**自变量**,y 又叫做**因变量**.x 的变化范围叫做这个函数的**定义域**.

该定义言简而意深.下面通过一组问题来深入领会它的含义.

(1) $y=C$(C 是常数)是否表示了 x 和 y 之间的函数关系?

有人可能会想:在上式 $y=C$ 中,根本就没有出现 x,因此不表示 x 和 y 之间的函数关系.如果这样想,那就错了.因为是否表示 x 和 y 之间的函数关系,应该根据函数的定义来回答.而在函数的定义中,并没有要求自变量 x 变化时,函数 y 的值一定要变.重要的是,对自变量 x 可能取的每一个值,函数 y 总有确定的值与之对应.现在对于任一实数 x,y 总有确定的值 C 与之对应.因此,**常数可以作为函数的特例**.

(2) $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ 是否表示了 x 和 y 之间的函数关系?

有人可能会因为该式右端有正负号而犹豫.其实,在函数的定义中,并没有要求 y 到底有几个确定的对应值,所以回答应该是肯定的.

---

* 本书仅在实数范围内研究问题.因此,凡书中提到的“数值”,均指实数值.

如果 x 在定义域内任取一个值后，y 都只有一个确定的值与之对应，则称此函数是**单值的**；否则称为**多值的**.

今后若无特殊声明，所讲的函数均指单值函数. 希望读者记住.

(3) $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & \text{当 } x>1,\end{cases}$ 是否表示了 x 和 y 之间的函数关系？

该问题的回答仍然应该是肯定的. 这是因为在函数的定义中，并没有要求必须用什么方式来表示函数.

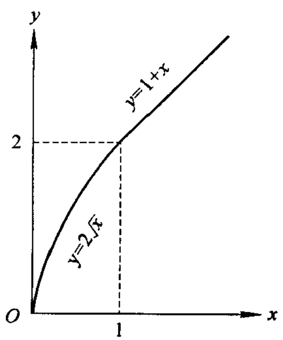

图 1-2

此类函数，今后常会遇到，它叫做**分段函数**，即在不同的范围内，用不同的式子来表示一个(注意：并不是两个)函数. 如上述函数是确定在区间 $[0,+\infty)$ 上的一个函数，当自变量 x 取闭区间 $[0,1]$ 上的数值时，对应的函数 y 的值由式子 $y=2\sqrt{x}$ 确定；当 x 取区间 $(1,+\infty)$ 内的数值时，y 由式子 $y=1+x$ 确定. 它的图形如图 1-2 所示.

(4) $x^2+y^2=-1$ 是否表示了 x 和 y 之间的函数关系？

有人可能会被该式的表面现象所迷惑，而错误地得出了肯定的回答. 其实，因为不论 x 取何值，该式左端总不会是负的，也就是说根本没有定义域. 根据函数的定义得知少了一个要素，因此不能说 y 是 x 的函数.

(5) $y_1=x+1$ 和 $y_2=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是否表示同一个函数？

有人可能会想：由于第二个式子右端的分子和分母约去 $x-1$ 后，和第一个式子的右端就相同了，因此表示同一个函数. 然而这

种想法是不对的. 正确的回答应该是：由于 y_1 的定义域是整个实数轴，而 y_2 的定义域是整个实数轴除去 $x=1$ 这一点，因为它们的定义域不同，所以不表示同一个函数.

(6) $y_1=x$ 和 $y_2=\sqrt{x^2}$ 是否表示同一个函数？

首先看到，这两个函数的定义域是相同的(整个实数轴). 那么它们是否表示了同一个函数呢？在函数的定义中，除定义域这个要素外，还有一个要素，那就是两个变量间的对应规律. 而这两个函数的对应规律是不同的，前者由 x 直接得到 y_1；后者由 x 平方后再开方才得 y_2. 故 y_1 的值取在 $(-\infty,+\infty)$ 中，而 y_2 的值取在 $[0,+\infty)$ 中(这是因为，$y_2=\sqrt{x^2}=|x|$，所以正确的回答应该是：不表示同一个函数.

通过上述问题的讨论，读者可能已经体会到为什么说函数的定义是"言简而意深"的. 也就是说，函数的概念虽然简单，但要想理解透彻，尚需下一点功夫才行.

思 考 题

1. 什么叫做函数？函数定义中的两个要素是什么？

2. 什么叫做函数的定义域？没有定义域的函数存在吗？它也能叫做函数吗？

3. 为什么常数也可以看做是函数？

4. $y_1=\lg x^2$ 和 $y_2=2\lg x$ 是否表示同一个函数，为什么？

5. $y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ 2x, & x>0\end{cases}$ 是表示一个函数还是两个函数，为什么？试画出其图形.

6. $M(x,y)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的动点，如图 1-3 所示. 问：

(1) 弧 $\overset{\frown}{OM}$ 的长度是不是 x 的函数？

(2) 图中阴影部分的面积是不是 x 的函数？

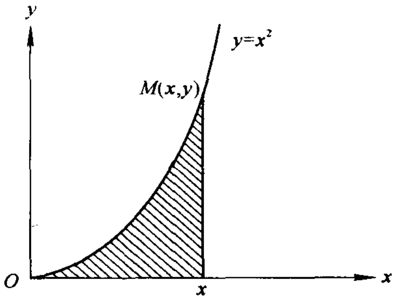

图 1-3

第二节　函数的定义域

从上节的问题 5 和 6,可以看到:函数定义中的两个要素十分重要,两要素之一不同就表示不同的函数.因此,下面就怎样求函数的定义域、怎样表示对应规律的函数记号等内容,详细地进行研究.

本节研究怎样求函数定义域的问题.

如果自变量取某一数值 x_0 时,函数有确定的值和它对应,那么就称该函数在 x_0 处有**定义**.因此,函数的定义域,也就是使函数有定义的全体实数.

函数的定义域,需要根据函数的数学表达式和实际意义来求,并且以后者为主.下面看一个简单的例子.

函数 $y=Cx^2$(C 是常数).

(1) 若是纯数学的、抽象的函数,则其定义域为$(-\infty,+\infty)$;

(2) 若上式中 $C=\pi$,x 和 y 分别表示圆的半径和面积,则其定义域为$(0,+\infty)$;

(3) 若上式中 $C=\frac{1}{2}g$,x 和 y 分别表示真空中自由落体下落的时间和路程,则其定义域为$[0,T]$,T 表示落地时间.

然而，数学中常常研究的是抽象的函数，这时定义域仅由公式本身决定.求定义域时只需考虑数值计算是否合理，比如：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号内的数不能小于零；

(3) $\log_a x$（a 是不等于 1 的正常数）中的 x 必须大于零；

(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 中 x 的绝对值不能大于 1；

……

例 1 求函数 $y = x + e^x - \sin x$ 的定义域.

解 由于不论 x 取任何值，y 都有确定的值与之对应，因此该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

注 若函数在整个实数轴上每一点都有定义，就叫做是**处处有定义**的.

例 2 求函数 $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x}$ 的定义域.

解 由于分母不能为零，又由于偶次根号内的数不能小于零，所以当 $x \neq 0$ 并且 $3 - x \geqslant 0$（即 $x \leqslant 3$）时该函数有定义.

因此，所求定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

注 函数的定义域一般用**区间或不等式来表示**.如上例所求的定义域也可表示为 $-\infty < x < 0$ 和 $0 < x \leqslant 3$.

例 3 求函数 $y = \arcsin \dfrac{3-2x}{5}$ 的定义域.

解 由于 $\arcsin X$ 中 X 的绝对值不能大于 1，而在本例中

$$X = \frac{3-2x}{5}.$$

解不等式：
$$\left|\frac{3-2x}{5}\right| \leqslant 1.$$

$$|3-2x| \leqslant 5,\ -5 \leqslant 3-2x \leqslant 5,\ -8 \leqslant -2x \leqslant 2,$$

即，$-1 \leqslant x \leqslant 4$ 时该函数有定义.因此，所求定义域为 $[-1, 4]$.

例 4 求函数

$$y=\frac{\sqrt{3-x}}{x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$$

的定义域.

解 由于要 y 有确定的值,必须也只需上式右端的两个式子**同时**有确定的值,所以函数的定义域也就是使这两个式子有确定的值的自变量值的**公共部分**.

根据上两例的结果得知:该函数的定义域应该是$[-1,4]$和$(-\infty,0)$及$(0,3]$的公共部分,如图 1-4 所示.

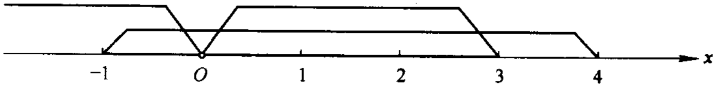

图 1-4

因此,所求定义域为$[-1,0)\cup(0,3]$.

注 1 作图时,凡不属于图形上的点,都用**空圈**来表示(如图 1-4中的 $x=0$ 这一点).

注 2 用区间来表示定义域时,需要特别注意区间的端点是否包含在此定义域内的问题.也就是应该用闭区间,还是用开区间,还是用半开区间表示的问题.

例 5 求函数

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$$

的定义域.

解 由于分母不能为零,所以当 $x\neq2$ 时$\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$有定义.

又由于 $\log_a X$ 中的X 必须大于零,而在本例中 $X=2x-3(a=10)$,即当 $2x-3>0$ 时,亦即 $x>\frac{3}{2}$时,$\lg(2x-3)$有定义.

因此,$x\neq2$ 和 $x>\frac{3}{2}$的公共部分,即$\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$就是

所求的定义域,如图 1-5 所示.

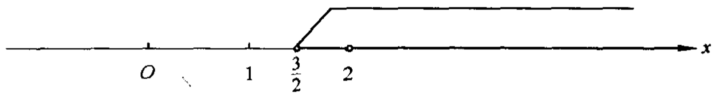

图 1-5

例 6 求函数 $y=\sqrt{x^2-7x+12}$的定义域.

解 由于偶次根号内的数不能小于零,所以当 $x^2-7x+12\geqslant 0$时,即$(x-3)(x-4)\geqslant 0$时,该函数有定义.解出这个不等式,就可以得到所求的定义域了.

该不等式左端两个因式的零点是 $x=3,4$.这两个点把整个实数轴分成了三个区间:$(-\infty,3)$,$(3,4)$,$(4,+\infty)$.如图 1-6 所示.

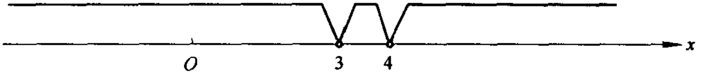

图 1-6

分别在这三个区间内考察两因式 $x-3$ 和 $x-4$ 的符号:

(1) 在$(-\infty,3)$内,两因式都取负值,所得乘积为正,函数在这个区间内有定义;

(2) 在$(3,4)$内,两因式取异号值,所得乘积为负,函数在这个区间内没有定义;

(3) 在$(4,+\infty)$内,两因式都取正值,所得乘积为正,函数在这个区间内有定义.

至于在点 $x=3$ 和 $x=4$ 处,由于两因式必有一个为零,因此函数在这两点有定义.

综上所述,即得所求定义域为$(-\infty,3]\cup[4,+\infty)$.

例 7 求函数 $y=\sqrt{\cos x-1}$的定义域.

解 由于偶次根号内的数不能小于零,所以当 $\cos x-1\geqslant 0$

时,即 $\cos x \geqslant 1$ 时,该函数有定义.

又由于 $\cos x$ 的值是不会大于 1 的,所以只有当 $\cos x = 1$ 时,该函数有定义.即所求定义域为 $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$. 如图 1-7 所示.

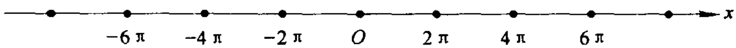

图 1-7

注 此例说明,函数的定义域不一定是区间,也可以是实数轴上的一些点.

例 8 求函数 $y = |x+1| - 1$ 的定义域,并作出其图形.

解 应当先去掉上式中的绝对值符号.

由于当 $x+1 \geqslant 0$ 时,即 $x \geqslant -1$ 时,$|x+1| = x+1$,所以

$$y = (x+1) - 1 = x.$$

又由于当 $x+1<0$ 时,即 $x<-1$ 时,$|x+1| = -(x+1)$,所以

$$y = -(x+1) - 1 = -x-2.$$

因此该函数可以分段表示为

$$y = \begin{cases} x, & x \geqslant -1, \\ -x-2, & x < -1. \end{cases}$$

其图形如图 1-8 所示.

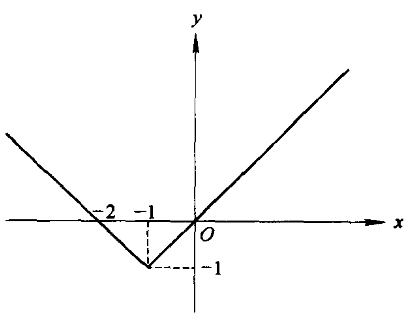

图 1-8

因为当 $x \geqslant -1$ 时,函数是有定义的:$y = x$. 当 $x < -1$时,函数也有定义:$y = -x-2$. 所以该函数是处处有定义的,即所求定义域为$(-\infty, +\infty)$.

注 用绝对值来表示的函数,常常需要先把它写成分段函数的形式,以便进行研究.

如:$y = |x|$可写成

$$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

又如：
$$y=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

可写成
$$y=\begin{cases} -1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

至此，读者可能会问：为什么要求函数的定义域呢？也就是学习本节的目的是什么？

后面在研究函数（比如某函数是否具有某特性；又如需作某函数的图形等等）时，常常先确定该函数在什么范围内存在（即有定义）. 如果该函数在某部分根本不存在，则对这部分就没有再往下研究的必要了.

思 考 题

1. 何谓函数在一点 $x=x_0$ 处是有定义的？又何谓函数是处处有定义的？

2. 怎样根据公式本身来求函数的定义域？

3. 下列函数在所给点处有定义吗？

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$ 在 $x=1$ 处；

(2) $y=\sqrt{-x}$ 在 $x=2$ 处；

(3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处；

(4) $y=\lg(1+x^2)$ 在 $x=0$ 处；

(5) $y=\begin{cases} x+1, & x>0,\\ x-1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处.