日本土木工程手册

应用数学

中国铁道出版社

日 才 手 册

应 用 数 学

〔日〕主审 佐武正雄（东北大学）
干事 岸野佑次（东北大学）
执笔者 川原睦人（中央大学）
岸野佑次（东北大学）
佐武正雄（东北大学）
伯野元彦（东京大学）
浜田政则（大成建设）
春名 攻（京都大学）
日野幹雄（东京工业大学）

朱立冬 滕征本 董其震 译

中 国 铁 道 出 版 社

1982年·北京

内 容 简 介

本书译自日本土木工程手册（1974年第三版）的第二篇，对土木工程领域内近代应用数学的各个分支均作了概要的介绍，包括矩阵、微分方程、变分法、差分法、数值分析、富里哀级数，概率论和最优化方法等内容，取材广泛，叙述精炼。

可供工程技术人员和高等院校师生参考。

参加本书翻译的有：朱立冬（1～5章），滕征本（7～9章），董甘霞（6章）。

日本土木工程手册
应 用 数 学
〔日〕佐武正雄等编
朱立冬等译
中国铁道出版社出版
责任编辑 王能远
封面设计 王毓平
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：850×1168 1/32 印张：10.125 字数：267千
1982年3月 第1版 1982年3月 第1次印刷
印数：0001—10,000册 定价：1.50元

出版者的话

从事各项工作的工程技术人员，都希望能得到一部内容较丰富而又切合实用的手册。

这些年来，我们在积极组织编写和出版有关铁路工程设计和施工技术手册的同时，征求一些国内专家对手册类工具书的意见。1979年中国土木工程学会桥梁及结构工程学会开会期间，经同济大学李国豪校长推荐，认为日本土木学会主编的1974年修订出版的土木工程手册，在内容上有其特色，它反映了现代科学技术的新成就，加强了基础理论方面的内容。为此，根据我国情况及我社的出版能力，决定选择其中的应用数学、材料力学、结构力学、土力学、水力学和水文学、混凝土、钢筋混凝土结构、钢结构、基础及挡土结构、桥梁、隧道等十一篇，作为十一个分册出版，供我国广大土木工程人员参考。

在各分册的翻译过程中，承陈英俊教授热心指导及各位参加译校同志的共同努力，提高了译文质量，我们在此深表感谢。

1981.4.21

目　录

第1章 概 述

近年来，从土木工程这一领域来看，应用数学在理论、设计、规划、施工等各方面已获得日益广泛的、多种多样的应用。换句话说，和其他工程的发展一样，应用数学的发展也成了土木工程发展的一个原动力。处在这样的时代背景之下，本应用数学篇编入的内容不是单纯一般数学公式与数表的罗列，而是力图体现出以土木技术应用为主体的这一特征。

第2至第5章是代数学、几何学、解析学，即所谓基础的、古典的内容。对于在力学应用中有重要性的群论、张量分析、微分几何、图论等等本书也简要地作了介绍。特别是几何学这一章占了较多的篇幅，这是因为近来颇重视这方面应用的缘故。第6章是数值分析方法，考虑到最近电子计算机应用的发展，所以相当详细地阐明其计算步骤，并兼述程序系统。第7、第8章是概率、统计、随机过程论，第9章是最优化方法，这些内容已在土木工程各分支的解析、规划中广泛应用，是受到各方注视的新领域，为了便于了解其内容在本篇中以近二分之一的篇幅稍作介绍。这样一来，从一般应用数学角度看似乎本篇的侧重点稍偏了一些，不过，这样做依然是出自前述的理由。

和本篇有关的公式、数表（主要与第2～第5章有关）见附录。

第2章 代 数 学

2.1 集合，群论

2.1.1 集合论的符号

集合论符号说明：

$a \in M$ 元素 a 属于集合 M，

$M=\{a_i\}$ M 是元素 a_i 组成的集合，

$M=\{a;\ \cdots\}$ M 是具有……性质的元素 a 的集合，

$M \subset N$，$N \supset M$ 集合 N 包含集合 M，

$M=N$ 集合 M 和集合 N 相等（$M \subset N$，且 $M \supset N$），

$M \cup N$ 集合 M 和 N 的并集（或称并，或和）$\{a,\ a \in M$ 或 $a \in N\}$，

$M \cap N$ 集合 M 和 N 的交集（或称交，或积）$\{a,\ a \in M$ 且 $a \in N\}$，

$\underset{\cdots}{\cup} M$ 具有……性质的集合 M 的并集，

$\underset{\cdots}{\cap} M$ 具有……性质的集合 M 的交集，

$M-N$ $\{a;\ a \in M,\ a \notin N\}$，

ϕ 空集合。

2.1.2 群的定义[11)]

（1）群

群（group）是具有以下性质的集合：

① 集合 G 中任意两个元素 a 和 b 在 G 中有一个唯一确定的、叫做乘法的运算 ab，且 $ab \in M$。

② 对于乘法，结合律 $(ab)c=a(bc)$ 成立。

③ G 中有一个单位元素存在，即对于任一元素 a，总存在（左）单位元素 e，使 $ea=a$ 成立。

④ G中有一个逆元存在，即对于每一个元素a总存在(左)逆元 a^{-1}，使$a^{-1}a=e$成立。

根据以上定义，则 $ae=a$，$aa^{-1}=e$ 成立（因此，限定词“左”可以省去）。这样也就证明了单位元素、逆元的唯一性。

如果一个群中只有有限个元素，就叫有限群，所含元素的个数叫此有限群的阶数。

（2）可换群

在上述计算中，如果特别规定有$ab=ba$ 成立时，这个群 G 就叫可换群（commutative group）或阿贝尔（Abel）群。并且，这种情况下的代数运算通常用加法表示（即把 ab 改写成 $a+b$），所以有时也叫加群。加群的单位元素用 0 来表示，逆元用 $-a$ 来表示。在群论中，加法的运算常假设成有可换性。

（3）环与体

环（ring）与体（field）是具有以下性质的集合。

① 环R定义有两种代数运算（加法和乘法）。

② 对第一种运算来说，R是一个可换群。

③ 对于第二种运算（乘法），满足结合律：$(ab)c=a(bc)$；满足两个分配律：$(a+b)c=ac+bc$，$a(b+c)=ab+ac$。

设R的可换群的单位元素为 0，并具有下列性质时，则R叫做体。

④ R的全部非 0 元素构成一个乘法群，这个乘法群的单位元素叫做R的单位元素，通常用 1 来表示。

对于R的第二种运算（乘法）来说，一般情况下是不满足交换律的，如果在特殊情况下可换，就叫可换体。如，全部实数就组成一个可换体（实数体）。

2.1.3 群的例子、群的表示

（1）对称群

设（i_1，i_2，…，i_n）是（1，2，…，n）的一个排列，通常把施行$1\to i_1$，$2\to i_2$，…一一对应的置换记为

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ i_1 & i_2 \cdots i_n \end{pmatrix}$。任何两个 n 次置换 a 和 b，它们的乘积 ab 定义为：在施行置换 b 之后再施行置换 a。（1，2，$\cdots n$）的不同置换的个数为$n!$，这些置换对于上述乘法来说作成一个群，显然这个群的单位元素是 $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ 1 & 2 \cdots n \end{pmatrix}$。这样的群叫做对称群或者置换群，用$S_n$表示。$S_n$是有限群，因$S_n$含有 $n!$ 个元素，故其阶数是$n!$。例如，S_n含有下面 6 个元素：

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

作乘法运算的结果如表 2－1 所示（例如 $ca=d$）。这样的表叫做群的群表。从表 2.1 可以看出，仅仅由 e，a，b 作成的一个群（可换群），叫做原来那个群的子群。子群的阶数是原来群阶数的因数。$\{e\}$，$\{e, c\}$，$\{e, d\}$，$\{e, f\}$，$\{e, a, b\}$ 等都是S_3的子群。

S_3 的 群 表　　　表2.1

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

（2）同构、群的表示

考查下面 6 个矩阵：

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\-\dfrac{\sqrt{3}}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\-\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Lie群与Lie环[2] 表2.2

群	符号	群的元素	Lie环	Lie环的元素
(复) 一般1阶变换群	$GL(n,C)$	复正则矩阵	$\mathfrak{gl}(n,C)$	任意的矩阵
实 一般1阶变换群	$GL(n,R)$	实正则矩阵	$\mathfrak{gl}(n,R)$	任意的实矩阵
(复) 特殊1阶变换群	$SL(n,C)$	行列式1的复矩阵	$\mathfrak{sl}(n,C)$	迹=0的矩阵
实 特殊1阶变换群	$SL(n,R)$	行列式1的实矩阵	$\mathfrak{sl}(n,R)$	迹=0的实矩阵
酉群	$U(n)$	酉矩阵 $U^*=U^{-1}$	$\mathfrak{u}(n)$	厄密特反对称矩阵 $X^*=-X$
特殊酉群	$SU(n)$	行列式1的酉矩阵	$\mathfrak{su}(n)$	迹=0的厄密特反对称矩阵
复正交(变换)群	$O(n,C)$	复正交矩阵 $^tA=A^{-1}$	$\mathfrak{o}(n,C)$	复反对称矩阵 $^tA=-A$
正交群	$O(n)$	实正交矩阵 $^tA=A^{-1},\overline{A}=A$	$\mathfrak{o}(n)$	实反对称矩阵 $^tA=-A,\overline{A}=A$
旋转群(特殊正交群)	$SO(n)$	行列式1的实正交矩阵	$\mathfrak{so}(n)$	实反对称矩阵 $^tA=-A,\overline{A}=A$

(摘自山内·杉浦：连续群论入门，培风馆)

就乘法而言，这些矩阵遵循和表 2.1 完全相同的法则。对于这样的有限群，其乘法运算法则遵循同一群表，叫做同构（isomorphic）群。如果把某个群表示成和它同构的具体数学表达式（数、运算、矩阵等），就叫这个群的表示，前面 6 个矩阵就是S_3的表示。

（3）Lie群[11) 12)]

由无限个元素构成的群，同是又是 C^∞ 流形（参照（3.5.3（1））），叫做Lie 群。Lie群G可用矩阵表示，对于 $A\in G$来说，由ex p$tX=A$（参照2.2.5）的矩阵X（t 为实参数）的集合$\mathfrak{g}$作成一个环，叫做G的Lie环，即$\mathfrak{g}=\{X;\ \exp\ tX\in G\}$。有代表性的Lie群及相应的Lie环如表2.2所示

2.2 矩阵、行列式

2.2.1 矩阵

$m\times n$ 个数（一般形式为复数）或者函数a_{ij}($i=1$, 2, …, m; $j=1$, 2, …, n）排成横行纵列的表

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots & & a_{1m} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

叫做矩阵。

为了表示更明确，A 有时也简写成〔A〕。将式（2.1）的行和列互换而得的矩阵叫转置矩阵（transposed m.），记作${}^tA$或〔A〕^{T}。假如$m=1$或者$n=1$时，通常称为n元行矢量或者m元列矢量。这时，为了明确不是〔A〕而是矢量，故记作$\{A\}$。通常,$\{A\}$表示列矢量，$\{A\}^T$表示行矢量。当$m=n$时，叫做方阵。一个方阵，如果除主对角线元素外，其余的元素都是0，叫对角矩阵。

由矩阵A的元素构成的p阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}$$

叫A的p阶子式。如果有非0的p阶子式存在，而（$p+1$）阶子式全为0时，就说矩阵A的秩数是p。

2.2.2 矩阵的运算

关于相等、加法、数乘矩阵，从略。

（1）乘法

对于$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$和$p\times q$矩阵$B=(b_{kl})$，只限于$n=p$时才能相乘。设$C=AB$，则有

$$c_{il}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jl} \tag{2.2}$$

A、B相乘的结果，得到一个$m\times q$矩阵。

（2）乘法的性质

$$\left.\begin{aligned}&(AB)C=A(BC)\\&(A+B)C=AC+BC\\&(\alpha A)B=A(\alpha B)=\alpha(AB)\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

当A、B能相乘时，B、A未必能相乘。假设能相乘，一般地说

$$AB\neq BA\ （交换律不成立） \tag{2.4}$$

但是，阶数相等的两个对角矩阵相乘是可以交换的。

（3）单位矩阵

$E=(\delta_{ij})$，（i，$j=1$，2，…，n），叫做n阶的单位矩阵。这里，（δ_{ij}）表示克朗内克符号（Kronecker delta）。设A为n阶方阵，则

$$AE=EA=A \tag{2.5}$$

（4）逆矩阵

对一个方阵A来说，使$AB=E$的矩阵B，叫A的逆矩阵

(inverse m.)，记为 A^{-1}。逆矩阵只在 $|A|$（A的行列式）$\neq 0$（称A为正则）时才存在。

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \tag{2.6}$$

逆矩阵的具体求法是：

$$A^{-1}=\left(\frac{\Delta_{ji}}{|A|}\right) \tag{2.7}$$

这里，Δ_{ij}表示矩阵A的余因子（参照2.2.6（3））。

（5）性质1

$$\left.\begin{array}{l} {}^t(AB)={}^tB\,{}^tA,\ {}^t({}^tA)=A \\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},\ (A^{-1})^{-1}=A \\ ({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})\ \text{（因此可写成}{}^tA^{-1}\text{）} \\ |AB|=|A|\ |B|,\ |{}^tA|=|A|,\ |A^{-1}|=|A|^{-1} \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

（关于复矩阵）

（6）共轭矩阵

称$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$为$A$的共轭矩阵（conjugate m.）。这里，$\overline{a_{ij}}$表示$a_{ij}$的共轭复数。当$a_{ij}$都是实数时，则$A$和$\overline{A}$没有区别。

（7）伴随矩阵

$A^*={}^t\overline{A}$叫做A的伴随矩阵（adjoint m.）。若a_{ij}是实数，则${}^tA$和A^*没有区别。

（8）性质2

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B},\ \overline{\overline{A}}=A \\ (AB)^*=B^*A^*,\ (A^*)^*=A \\ (\overline{A})^{-1}=(\overline{A^{-1}}),\ (A^*)^{-1}=(A^{-1})^* \\ |\overline{A}|=|A^*|=\overline{|A|} \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

2.2.3 特殊矩阵

（1）对称矩阵

一个方阵A，若$'A=A$时，则称A是对称矩阵。这时，独立的元素有$\frac{n(n+1)}{2}$个。

（2）反对称矩阵（也叫交代矩阵）

一个方阵A，若$'A=-A$时，则称A为反对称矩阵。这时主对角线元素全为0，独立的元素有$\frac{n(n-1)}{2}$个。

（3）方阵的分解1

任一个方阵A，可以分解为对称部分A_s和反对称部分A_a，即

$$\left.\begin{aligned}
&A=A_s+A_a\\
&A_s=\frac{1}{2}(A+{}'A)\\
&A_a=\frac{1}{2}(A-{}'A)
\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

（4）正交矩阵

一个方阵A，若$A^{-1}={}'A$时，则称A为正交矩阵。假设A是正交矩阵，那末$|A|=\pm1$。当$|A|=+1$时，叫第一类正交矩阵（旋转矩阵）；当$|A|=-1$时，叫第二类正交矩阵（映射矩阵）。

（关于复矩阵）

（5）厄密特矩阵

一个方阵满足$A^*=A$时，则称A为厄密特矩阵，这时，对角线元素都是实数。厄密特矩阵的乘积是一个厄密特矩阵的必要与充分条件是其乘积可以交换。

（6）厄密特反对称矩阵

一个方阵A满足$A^*=-A$时，则称A为厄密特反对称矩阵，这时，对角线元素都是纯虚数。

（7）方阵的分解2

一个方阵，若用两个厄密特矩阵H，K表示，则可分解成下列的厄密特部分和厄密特反对称部分：

$$\left.\begin{aligned} &A=H+iK \\ &H=\frac{1}{2}(A+A^*) \\ &K=\frac{1}{2i}(A-A^*) \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

（8）酉矩阵（unitary m.）

一个方阵，若$A^{-1}=A^*$时，则称A为酉矩阵。

如果A是酉矩阵，那末，它的行列式的绝对值等于1（如果A的元素为实数，则为正交矩阵）。如果A是酉矩阵，则$'A$、A^{-1}，$\overline{A}$，A^*都是酉矩阵。设A、B为酉矩阵，则AB也是酉矩阵。

（9）正规矩阵（normal m.）

假如A和A^*可交换，即$AA^*=A^*A$成立时，则称A为正规矩阵。

厄密特矩阵、酉矩阵是正规矩阵的特殊情况。

（10）正则矩阵的分解

一个正则矩阵A，可以用酉矩阵U、U'、特征值全为正数的厄密特矩阵H、H'表示成如下唯一的乘积的形式：

$$\left.\begin{aligned} &A=UH \text{或} A=H'U' \\ &H^2=AA^*, \quad (H')^2=A^*A \\ &U=AH^{-1}, \quad U'=(H')^{-1}A \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

A为正规矩阵的必要与充分条件是$UH=HU$。

2.2.4 特征值和特征矢量

对一个方阵A来说，满足条件

$$[A]\{x\}=\lambda\{x\} \tag{2.13}$$

的λ、$\{x\}$分别叫矩阵A的特征值、特征矢量。式（2.13）表明矢量$\{x\}$的方向不随线性变换〔A〕发生变化。$\{x\}$只是方向确定，而模是任意的，故通常取成标准形（即以$\dfrac{x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}}$为分

量，使模等于1）。

n阶方阵A的特征值λ可根据n次方程式（特征方程式）

$$|A-\lambda E|=0 \tag{2.14}$$

求出。当A为高阶方阵时，可用迭代法求出（参照6.7.3）。如把重根考虑在内，则n阶方阵A有n个特征值。

当A有不相等的特征值λ_i时，其标准形的特征矢量$\{x\}_i$构成n维矢量空间的标准正交基，即

$$\{x\}_i^T\{x\}_j=\delta_{ij} \tag{2.15}$$

又，若用$\{x\}_i$表示，则A可展开为（谱分解）：

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\{x\}_i\{x\}_i^T \tag{2.16}$$

特殊矩阵的特征值如表2.3所示。

矩阵的特征值　　　　表2.3

矩　阵　种　类	特　征　值
厄密特矩阵（对称矩阵）	实　数
厄密特反对称矩阵（反对称矩阵）	纯虚数
酉矩阵（正交矩阵）	绝对值为1的复数

2.2.5 矩阵的幂级数[14)]

假设 $f(a)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i a^i$ 在 $|a|<\delta$ 收敛，则对应的n阶方阵A的无穷级数

$f(A)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i A^i$（这里$A^i$的意思是 $A^i=\underbrace{AA\cdots A}_{i个}$）在

$\|A\|\left(=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\overline{a}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}\right)<\delta$ 也收敛，即收敛于一个n阶的方阵。