高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版 · 同济大学数学系编

九章丛书

工程数学

线性代数

（第五版）

同步辅导及习题全解

主 编 郭志梅 王曙东

· 知识点窍 · 逻辑推理 · 习题全解

[illegible] [illegible]师执笔 · 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

线性代数（第五版）同步辅导

及习题全解

主　编　郭志梅　王曙东

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是为了配合同济大学应用数学系编写的《工程数学·线性代数》（第五版）教材而编写的配套辅导书。

本书由学习导引、知识点归纳、典型例题与解题技巧、课后习题全解四部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法与技巧，提高学习能力及应试能力。

本书可作为高等院校数学课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（第五版）同步辅导及习题全解 / 郭志梅，王曙东主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2011.2
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-8353-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①郭… ②王… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第012689号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：张玉玲　　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 线性代数（第五版）同步辅导及习题全解
作　者	主　编　郭志梅　王曙东
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16 开本　15 印张　306 千字
版　次	2011 年 2 月第 1 版　2011 年 2 月第 1 次印刷
印　数	0001—8000 册
定　价	16.80 元

前言

“线性代数”是大学数学课程中的一门重要的必修课程，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于该课程自身的抽象性以及特有的语言符号系统，引入了许多新的概念和思维方式，且解题方法灵活多变，使得该课程成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好线性代数，我们根据原国家教委审定的普通高等学校《线性代数》课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试大纲编写了《线性代数（第五版）同步辅导及习题全解》。本书按照《工程数学·线性代数》（第五版）（同济大学编，高等教育出版社出版）的章节顺序，分为六章，各章具体体系及特点如下：

学习导引：说明该章包括的主要内容、学习的侧重点、需要掌握的知识点。

知识点归纳：阐述每一章中重要的性质定理、公式和结论，并对一些难以理解但又是大纲所要求的、考研经常涉及的内容进行了详细归纳和解释，目的是使读者站在一个更高的角度去分析问题、解决问题。

典型例题与解题技巧：该部分选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题，对其先进行分析，再给出详细解答，并在最后做出点评，意在抛砖引玉。

课后习题全解：该部分对教材中的习题做了详细分析，希望读者能够掌握解题的思路、方法和技巧，从而能举一反三，以不变应万变。

由于时间仓促及编者水平有限，书中难免有疏漏甚至错误之处，敬请各位同行和读者批评指正。

编者

2010 年 12 月

目 录

第一章 行列式

学习导引

本章内容包括全排列及其逆序数，n 阶行列式的定义、基本性质，以及常见 n 阶行列式的计算方法，最后讲解行列式的一个应用——克拉默法则. 其中对行列式的定义及其性质的掌握是重点，它是线性代数的一个基础部分.

知识点归纳

重要概念

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列），或称一个 n 级排列. 所有全排列的个数记作 P_n，则 $P_n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$.

2. 排列的逆序数

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如从小到大），于是在这几个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序，一个排列中所有逆序的总和叫做这个排列的逆序数. 逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

3. 对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的变换叫做对换. 将相邻两个元素对换叫做相邻对换.

4. n 阶行列式

由 n^2 个数 a_{ij}，$1\leqslant i,j\leqslant n$，排成的 n 行 n 列的方形阵列决定的一个数，这里的脚标

i,j 表示这个数的位置，定义如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1_{p1}}a_{2_{p2}}\cdots a_{n_{pn}}$$

或

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1_{p1}}a_{2_{p2}}\cdots a_{n_{pn}}$$

其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；t 为这个排列的逆序数；$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列（共有 $n!$ 个）取和. n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (ij) 元.

5. 代数余子式

(1) 行列式按一行(列)展开.

在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则 A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按某 k 行(列)展开.

在 n 阶行列式 D 中，任选 k 行、k 列，位于这些行与列交叉处的 k^2 个元素按原来相对位置组成的 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式，在 D 中划去 M 所在的行与列后得到的 $n-k$ 阶行列式 N，称为 M 的余子式，如果 M 所在的行的序数是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，所在列的序数是 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则称 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}N$ 为 M 的代数余子式.

基本性质

1. 排列的性质

(1) 对换改变排列的奇偶性.

(2) 在全部 $n(n\geqslant 2)$ 阶排列中奇偶排列各占一半.

(3) 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

2. 行列式的性质

(1)（对称性）行列式与其转置行列式相等，即若

$$D=\left|\alpha_1\cdots\alpha_k\cdots\alpha_n\right|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$D^{\mathrm{T}}=\left|\alpha_1^{\mathrm{T}}\cdots\alpha_k^{\mathrm{T}}\cdots\alpha_n^{\mathrm{T}}\right|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{n1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

则
$$D=D^{\mathrm{T}}$$

注　行列式的这一性质表明，凡对行成立的性质，对列也成立.

(2)(交错性)互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3)以数乘行列式，等于以这个数乘该行列式的任一行或任一列. 行列式中某一行(列)的所有元素有公因子，则这个公因子可以提到行列式符号的外面.

即
$$\left|\alpha_1,\cdots,a\alpha_k,\cdots,\alpha_n\right|=a\cdot\left|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n\right|$$

(4)$D=0\begin{cases}\text{当 } D \text{ 中某一行(列)元素全为零.}\\\text{当 } D \text{ 中某两行(列)元素对应成比例.}\end{cases}$

(5)行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数之和，则这个行列式等于两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{i1}+b_{i1}&a_{i2}+b_{i2}&\cdots&a_{in}+b_{in}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

即　$\left|\alpha_1,\cdots,\alpha_k+\beta_k,\cdots,\alpha_n\right|=\left|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n\right|+\left|\alpha_1,\cdots,\beta_k,\cdots,\alpha_n\right|$

(6)将行列式某一行(列)的所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

即
$$\left|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots ka_k+a_l,\cdots,a_n\right|=\left|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots\alpha_l,\cdots,\alpha_n\right|$$

常用方法

1. 排列逆序数的计算

(1)$t(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$后面比 i_{n-1}小的数的个数.

(2)$t(i_1i_2\cdots i_n)=i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数 $+\cdots+i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数.

2. 行列式按行(列)展开的计算

(1)行列式按一行(列)展开.

设 D 为 n 阶行列式,则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D,i=j\\0,i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D,i=j\\0,i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中,A_{ij}是 D 中元素 a_{ij}的代数余子式.

(2)行列式按某 k 行(列)展开:设 D 为 n 阶行列式,在 D 中任取 $k(k\leqslant n)$行,这时行中所有 k 阶子式(共有 C_n^k 个)为 $M_1,M_2,\cdots,M_s$,相应的代数余子式为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$,则 $D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_sA_s$.

注 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除(i,j)元 a_{ij}外都为零,那么这个行列式等于 a_{ij}与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

3. 几种由定义可直接计算的特殊行列式

(1)二阶行列式:$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

(2)三阶行列式:
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{12}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(3)上三角形行列式:
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

(4)下三角形行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$

(5)反上三角行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

(6)反下三角行列式：$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

4. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \cdot \cdots (x_n - x_n - 1)$$

5. 克拉默(Cramer)法则

(1)非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (b_i \text{ 不全为零})$$

的系数行列式 $D \neq 0$ 时，该方程组有唯一解，即 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$.

$$\text{其中}\quad D_i=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\cdots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

反之,如果非齐次线性方程无解或有两个不同解,则它的系数行列式必为零.

(2)齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组有唯一零解,即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

反之,如果齐次线性方程组有非零解,则系数行列式 $D=0$.

注 ①克拉默法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

②n 元非齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq0$ 时有唯一解,当系数行列式 $D=0$ 时克拉默法则失效,方程组可能有解,也可能无解.

③n 元齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq0$ 时有唯一零解,当系数行列式 $D=0$ 时,齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

典型例题与解题技巧

题型 1 排列逆序数的计算

题型分析 在求排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数时,可以从第 2 个数开始.依次统计 $j_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数(即前面比 j_i 大的数的个数)t_i,则排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $t_2+t_3+\cdots+t_n$.

例 1 求下列排列的逆序数,并确定其奇偶性.

(1)21736854 (2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

解 (1)**解法 1** 2 的后面有 1 小于 2,故 2 的逆序数为 1,1 的后面没有小于 1 的数,1 的逆序数为 0,7 的后面有 3,6,5,4 小于 7,故 7 的逆序数为 4,依此方法逐个计算,知排列逆序数为:

$t(21736854)=1+0+4+0+2+2+1+0=10$,偶排列

解法2 1 的前面比 1 大的数有 1 个 2，故 1 的逆序数为 1，2 排在首位没有逆序，3 的前面有一个 7 比 3 大，逆序数为 1，依此计算可得

$$t(21736854)=1+0+1+4+3+1+0+0=10$$

(2) $t(n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

由于$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性由 n 而定，故讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$，为偶数.

当 $n=4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$，为偶数.

当 $n=4k+2$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$，为奇数.

当 $n=4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$，为奇数.

综上，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，k 为任意非负整数.

题型 2 n 阶行列式的概念

题型分析 对于 n 阶行列式的概念要注意以下几点：

(1) 每一项的构成是不同行、不同列的几个元素相乘，n 阶排列总数是 $n!$，所有排列求和，共有 $n!$ 项.

(2) 每一项的符号，当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定符号.

(3) 行列式的值最终是一个具体的数.

例 2 填空题

(1) 如果 n 阶行列式中，负项的个数为偶数，则 $n\geqslant$______.

(2) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n，那么行列式的值为______.

(3) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ x & 1 & 0 & x\end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是______.

分析 (1)n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n \geqslant 4$.

(2)n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数小于 n；又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积，所以每一项必定为零，从而此行列式值为零.

(3)按行列式定义，对于 x^3，有 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$，$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 三次出现 x_3，此时各项的系数分别是 $a_{24}=-1$，$a_{21}=1$，$a_{14}=2$，即 $-x^3$，x^3，$2x^3$；又各项逆序数分别为 $t(2431)=4$，$t(2134)=1$，$t(4231)=5$，故所带符号分别为正、负、负，因此系数是 -4.

答案 (1)4 (2)0 (3)-4

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2007 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2008 \end{vmatrix}$$

分析 对于含零元素较多的行列式，可直接用定义计算. 因行列式的项中有一元素为零时，该项值为零，故只需求出所有非零项即可，为求出非零项 $a_{1_{j1}}a_{2_{j2}}\cdots a_{n_{jn}}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码；再由第 2,3,…,n 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码，进而求出 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，非零项 $a_{1_{j1}}a_{2_{j2}}\cdots a_{n_{jn}}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的 n 级排列有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式的值为零.

解 D 中第一行的非零元素只有 $a_{1\,2007}$，因而 j_1 只能取 2007. 同理由第 2,3,…,2008 行知，$j_2=2006$，$j_3=2005$，…，$j_{2007}=1$，$j_{2008}=2008$，于是 $j_1,j_2,\cdots,j_{2008}$ 在可能取的数码中只能组成一个 2008 级排列(2007)(2006)…2 1(2008)，即 D 中非零项只有一项，故

$$\begin{aligned}&(-1)^{t(2007\cdots2\ 1\ 2008)}a_{1\,2007}\cdots a_{2007\,1}a_{2008\,2008}\\ &=(-1)^{2008+\cdots+2+1}1\times2\times\cdots\times2007\times2008\\ &=2008!\end{aligned}$$

题型 3 低阶(3~5 阶)行列式的计算

题型分析 可采用两种方法：

(1)根据行(列)元素的特点,利用行列式性质化为上(下)三角形行列式.

(2)根据行列式按一行(列)展开公式降阶求解.

例 4　计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}$$

解　观察行列式中元素的特点,第 4 行提出公因子 b_4 后再把第 4 行的 $-b_1$, $-b_2$, $-b_2$ 倍分别加到第 1,2,3 行可得

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix} = b_4 \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-b_3r_4]{r_1-b_1r_4,\,r_2-b_2r_4} b_4 \begin{vmatrix} 0 & a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3a_3b_1 & a_1b_4-a_4b_1 \\ 0 & 0 & a_2b_3-a_3b_2 & a_2b_4-a_4b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3b_4-a_4b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4 \begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & a_1b_4-a_4b_1 \\ 0 & a_2b_3-a_3b_2 & a_2b_4-a_4b_2 \\ 0 & 0 & a_3b_4-a_4b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4\prod_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)$$

题型 4　行列式按行(列)展开定理应用

题型分析　根据行列式按行(列)展开定理,n 阶行列式可通过 $n-1$ 阶行列式计算. $n-1$ 阶行列式可通过 $n-2$ 阶行列式计算,…,直到可通过 2 阶行列式计算. 主要对零元素较多的行列式用此方法比较简便,所以往往先利用行列式性质将行列式的第一行(列)出现较多的零元素,再利用此定理.

例 5　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

分析　由定义知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项的一般形式为 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_2)}a_{1_{p1}}a_{2_{p2}}\cdots a_{n_{pn}}$. 若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零，由于本行列式中零元素较多，因而为零的项就较多，故只需找出那些不为零的项就可以求得该行列式的值.

解　所给行列式中，第一行元素除了 a_{12}（即 $p_1=2$）以外其余都为零，而第二行元素除了 a_{23}（即 $p_2=3$）以外其余都为零. 继续分析第三行、第四行…第 n 行，可知在 $n!$ 项中只有一项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 不为零，且它的列标排列 $2\ 3\cdots n\ 1$ 的逆序数为 $n-1$，于是

$$D_n=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!$$

例 6　已知 $\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&1&0\\z&0&0&1\end{vmatrix}=1$，求 x,y,z.

分析　虽然是一个解方程的题，但归根到行列式的计算，行列式最后一行只有两个非零数，故可按该行展开计算此行列式.

解　$$\text{左边}=-z\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&x&y\\x&1&0\\y&0&1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}x&z\\1&0\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}x&y\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&x\\x&1\end{vmatrix}$$

$$=-z^2-y^2-x^2+1$$

则 $x^2+y^2+z^2=0$，故 $x=y=z=0$.

题型 5　关于余子式的计算

题型分析　根据行列式展开定理知，对 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$，有结论 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\begin{cases}D_n,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$，有时也可将定理反过来使用，可将某些低阶行列式（代数余子式或余子式）