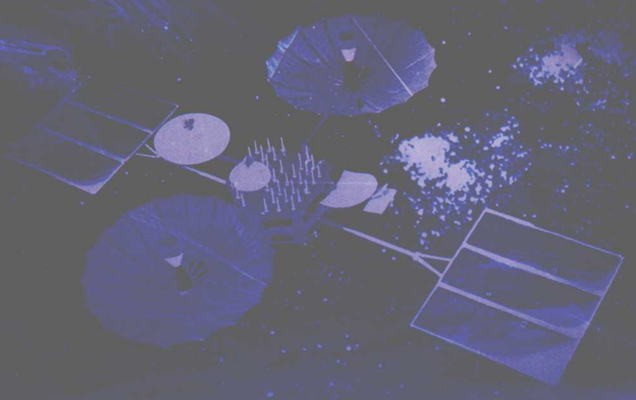
普通高等教育“十二五”规划教材



王文福　税正伟　编

大学物理学（下册）（第二版）

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

大学物理学

（下册）

（第二版）

王文福　税正伟　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书在满足教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会颁布的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求》的前提下，从现代科学技术的发展及工程技术人才培养的总体要求出发，精选了大学物理课程的教学内容. 针对一般院校大学物理教学的要求和方便课堂教学，本书在课程内容现代化、突出工程意识、突出能力和素质的培养等方面作了较大幅度的改革. 全书分为上、下册，主要内容包括力学、电磁学、振动和波、光学、气体动理论及热力学、相对论和量子物理等部分.

本书既可作为一般院校理工科非物理类专业大学物理课程的教学用书，又可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学. 下册/王文福，税正伟编. —2 版. —北京：科学出版社，2011
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-031793-3

Ⅰ.①大… Ⅱ.①王…②税… Ⅲ.①物理学-高等学校-教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 131753 号

责任编辑：窦京涛 唐保军 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：张克忠 / 封面设计：北京蓝正广告设计有限公司

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 2 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 7 月第 二 版 印张：34 1/2
2011 年 7 月第四次印刷 字数：710 000
印数：13 001—18 500

定价：59.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第7章　振动学基础

物体在某一位置附近作来回往复的运动,称为**机械振动**. 机械振动的显著特点是运动具有周期性. 例如,儿童游戏中的荡秋千、人体心脏的跳动、运行的机器机身的振动、火车过桥时引起桥梁的振动、一切发声体的振动、海浪翻腾、地震等都是机械振动.

振动是物质运动的一种基本形式,在自然界中广泛存在. 物理学中的振动,不只是物体位置的振动,而是泛指物理量作周期性变化的运动形式. 常见的除机械振动以外,还有电磁振动,例如电磁波发射中的电磁振荡等. 广义地讲,凡描述物体运动状态的物理量在某一数值附近作周期性的变化,都称为**振动**. 尽管机械振动和电磁振动在本质上不同,但是机械振子与电磁振子不仅具有相似的运动形式,而且有相似的运动方程,因而遵从的运动规律可以用统一的数学形式来描述. 这实际上反映了自然界的统一性,以及各种现象之间的相互联系.

机械振动广泛存在,有利有弊. 人们可以利用其有利的一面为人类造福,例如选矿筛、混凝土捣固机等就是利用振动原理设计而成. 但其有害的一面也可能造成巨大损失,例如振动会降低机床加工精度、影响机械设备的寿命等,地震的能量巨大、波及面广,会给人类造成毁灭性的灾难.

机械振动的基本规律不仅可以推广到其他形式的振动中,而且也是研究波动、声学、地震学、建筑工程、波动光学、无线电技术、信息科学以及现代物理学等的基础.

本章主要研究机械振动. 从介绍简谐振动的基本规律入手,进而讨论振动的合成、阻尼振动、受迫振动和共振现象等.

7.1　简谐振动

在各种振动现象中,最简单的振动是简谐振动. 由于任何复杂的振动都可以看成是由几个或很多个简谐振动的叠加,因此简谐振动又是振动学中最基本的振动. 本节以理想的弹簧谐振子模型为例,研究简谐振动的基本规律.

7.1.1　简谐振动方程　基本特征

物体振动时,其位置坐标随时间按余弦(或正弦)规律变化,这种振动称为**简谐振动**. 例如,在忽略阻力的情况下,弹簧振子的振动,单摆、复摆的小角度振动等都是简谐振动.

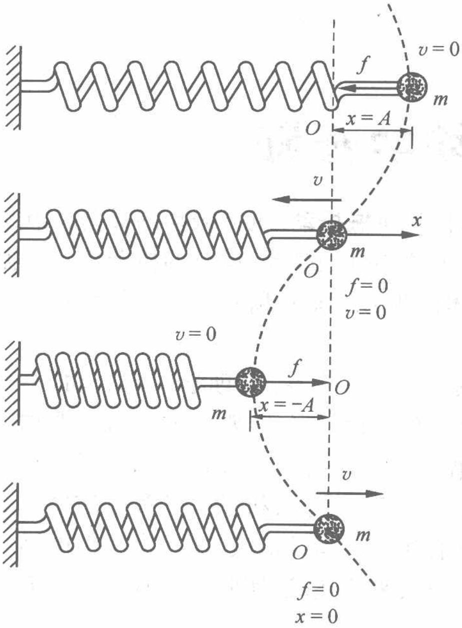


图 7.1　简谐振动

如图 7.1 所示，一轻弹簧左端固定，右端与质量为 m 的物体(被看作质点)相连. 物体被限制在光滑的水平面内运动. 在外力作用下弹簧发生形变后，物体在弹力作用下，在水平面内左右来回振动.

设平衡位置(即弹簧具有自然长度时物体 m 的位置)为 O 点，取平衡位置 O 为坐标原点，沿弹簧伸长的方向为 x 坐标轴的正方向. 在这种坐标系中，弹簧的净伸长即为物体 m 的位移 x.

当物体在平衡位置的右边(或左边)时，弹簧被拉长(或压缩)，相应地物体受到指向左方(或右方)即指向平衡位置的弹力作用.

在弹性限度范围内，物体所受的弹簧的弹性力(又称为回复力)满足胡克定律，故

$$f=-kx \tag{7.1}$$

式中，k 为弹簧的劲度系数，负号表示力与位移的方向相反. 由牛顿第二定律，在回复力的作用下，质量为 m 的振动物体的加速度为

$$a=\frac{f}{m}=-\frac{k}{m}x$$

令 $\omega^2=k/m$，则上式变为 $a=-\omega^2x$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \tag{7.2}$$

(7.2)式称为**简谐振动的运动微分方程**. 这是一个二阶常系数线性齐次常微分方程，可以用分离变量法求解.

作变量代换$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$并代入(7.2)式中可得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\omega^2x$$

分离变量可得 $v\mathrm{d}v=-\omega^2x\mathrm{d}x$，其积分表示式为

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=-\omega^2\int_A^x x\,\mathrm{d}x$$

式中已经假设 $v=0$ 时，$x=A$(恒量). 积分可得

$$v^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\omega^2(A^2-x^2) \tag{7.3}$$

再一次分离变量,(7.3)式变为$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2-x^2}}=\omega\mathrm{d}t$,积分后可得

$$x = A\sin(\omega t + \varphi')$$

式中 φ'是积分过程中引入的另一个积分常量. 令 $\varphi'=\varphi+\frac{\pi}{2}$,则有

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{7.4}$$

式中积分常量 A、φ 实际上是简谐振动的**振幅**和**初相**,其物理意义随后讨论. 这种物体位移 x 随时间 t 的余弦(或正弦)函数变化的关系式,称为**简谐振动的运动方程**. 质点在回复力作用下的运动是周期性运动,这是振动区别于平动和转动的最根本的特点.

(7.1)式、(7.2)式和(7.4)式表述了简谐振动的基本特征,可用于判断物体是否作简谐振动,也称这三式为简谐振动的判据. (7.1)式是简谐振动的**第一个判据**,表明:当物体所受的合外力与位移成正比且反向时,物体的振动是简谐振动. (7.2)式是简谐振动的**第二个判据**,表明:物体作简谐振动时,加速度 $\boldsymbol{a}$ 与位移 $\boldsymbol{x}$ 成正比并且反方向. (7.4)式是简谐振动的**第三个判据**,表明:作简谐振动的物体,其位移 x 是时间 t 的余弦(或正弦)函数. 很显然,上述三个判据是等价的,彼此是相互联系的. 若质点运动规律满足其中任意一个判据,则质点作简谐振动.

由简谐振动的运动方程(7.4)式可以求出作简谐振动的物体的振动速度和加速度分别为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \tag{7.5}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \tag{7.6}$$

图 7.2 表示了作简谐振动的物体位移、速度、加速度随时间都是周期性变化关系. 通常把其中的 x-t 曲线称为振动曲线.

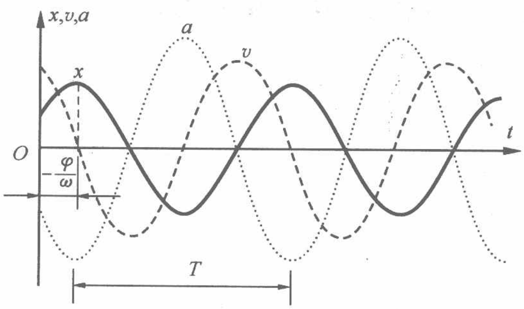


图 7.2　简谐振动的 x,v,a 随时间的变化曲线

一般来说,无论 x 代表什么物理量,只要它的变化规律遵循微分方程(7.2)式,就表示这个物理量在作简谐振动,其中的 ω 是由系统本身性质决定的参量.

7.1.2 描述简谐振动的物理量

简谐振动的运动方程(7.4)式、速度方程(7.5)式和加速度方程(7.6)式中出现的三个特征物理量 A、ω 和 φ，分别称为振幅、圆(角)频率和初相位.

1. 振幅

在简谐振动的运动方程(7.4)式中，由于余弦(或正弦)函数的绝对值不可能大于1，因而作简谐振动的质点(简称为**谐振子**)离开平衡位置的最大位移为

$$|x_{\max}| = A$$

即 A 表示振动物体偏离平衡位置的最大距离，称为**振幅**. 振幅恒为正，它给出了振动质点的运动范围. 由 7.1.4 节的分析可知，振幅 A 也表示了质点振动的强弱，与振动系统的能量有关，并由振动的初始条件决定.

2. 周期和频率

简谐振动方程满足正弦或余弦函数的变化规律，是周期性运动，即每隔一个固定的时间间隔 T，运动状态重复一次. 谐振子完成一次全振动所经历的时间称为**周期**，用 T 表示. 根据余弦函数的周期性质有

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t + T) + \varphi] = A\cos(\omega t + \varphi + \omega T)$$

由于余弦函数的周期是 2π，因此

$$\omega T = 2\pi \quad 或 \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{7.7}$$

单位时间内物体完成全振动的次数，称为**频率**，用 ν 表示. 它和周期成倒数关系，即 $\nu = 1/T$. 将(7.7)式代入可得

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad 或 \quad \omega = 2\pi\nu \tag{7.8}$$

由于 ω 与 ν 成正比，通常称 ω 为**圆频率**或**角频率**. ω、T 或 ν 都是表示简谐振动周期性的物理量.

在国际单位制(SI)中，T 的单位是秒(s)，ν 的单位是赫兹(Hz)，ω 的单位是弧度・秒$^{-1}$($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

因此，简谐振动方程(7.4)式还可以表示为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \tag{7.9}$$

或

$$x = A\cos(2\pi\nu t + \varphi) \tag{7.10}$$

对于弹簧振子系统，因为 $\omega^2 = k/m$，所以周期和频率分别为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{7.11}$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.12}$$

因此 T 和 ν 只与振动系统自身的性质有关，与简谐振动的初始状态无关，分别称为弹簧振子的**固有周期**和**固有频率**.

3. 相位

由(7.4)式～(7.6)式知，当作简谐振动物体的振幅 A 和角频率 ω 一定时，振动物体在任意时刻的坐标、速度、加速度都由 $\omega t+\varphi$ 决定，它能够表示振动物体在任一时刻的运动状态，因而定义 $\Phi=\omega t+\varphi$ 为简谐振动在 t 时刻的**相位**(又称为**位相**或**周相**). $t=0$ 时，相位 $\Phi=\omega t+\varphi=\varphi$. φ 表示振动物体初始时刻的相位，称为**初相**. 它是决定初始时刻振动质点运动状态的物理量.

对一个以确定频率和振幅作简谐振动的质点来说，在一个周期内振动质点在各时刻的运动状态都不相同. 从相位来说，这相当于相位经历了从 0 到 2π 的变化. 在振动过程中，凡是位移、速度和加速度都相同的状态，它们所对应的相位之间必然相差 2π 或 2π 的整数倍，因此质点在各时刻的运动状态完全由振动相位 Φ 决定. 用相位 Φ 表征质点振动状态的优点在于它充分地反映了振动的周期性特征.

相位之所以重要，还在于用相位来描述质点的振动状态可以很方便地比较两个同频率的简谐振动的步调.

设两个同方向、同频率的简谐振动分别表示为

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)=A_1\cos\Phi_1$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)=A_2\cos\Phi_2$$

式中，$\Phi_1=\omega t+\varphi_1$ 和 $\Phi_2=\omega t+\varphi_2$ 分别为两振动的相位. 同频率的两振动的相位之差 $\Delta\Phi$ 为 $\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1=\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi$. 根据相差 $\Delta\varphi$ 的值可以判断两个同方向同频率的简谐振动的振动步调是否相同.

当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，两振动质点将同时达到各自位移同方向的极大值或极小值，也同时越过平衡位置向同方向运动. 也就是说，这两振动质点在任何时刻的振动步调相同，称这两振动为**同相**，如图 7.3(a)所示.

当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，两振动质点同时经过平衡位置向相反方向运动，同时达到各自反方向的最大位移. 也就是说，这两振动质点在任何时刻的振动步调相反，称这两振动为**反相**，如图 7.3(b)所示.

当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，两振动**不同相**，如图 7.3(c)所示. 当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1>0$ 时，第二个振动质点将先于第一个振动质点到达振动的任意给定点，所以说第二个振动质点的振动相位超前于第一个振动质点的振动相位；反之，当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1<0$ 时，则第二个振动质点的振动相位落后于第一个振动质点的振动相位.

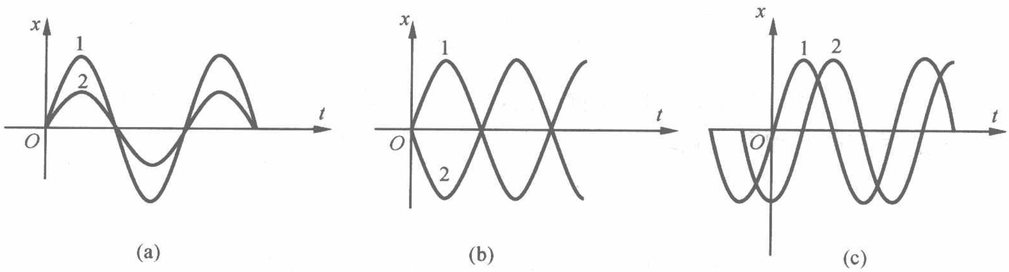


图 7.3　两同方向同频率简谐振动相位比较

前已述及，振幅 A 和初相 φ 是求解简谐振动微分方程时必然出现的常量. 振幅 A 和初相 φ 可以通过振动质点的初始运动状态来确定. 当 $t=0$ 时，设质点的初位移为 x_0，初速度为 v_0，由(7.4)式和(7.5)式可以分别得到

$$x_0 = A\cos\varphi$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi$$

由此可得振幅和初相的解析式为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \tag{7.13}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \tag{7.14}$$

知道了谐振子的初位移 x_0 和初速度 v_0，就可以用(7.13)式和(7.14)式得到振幅 A 和初相 φ.

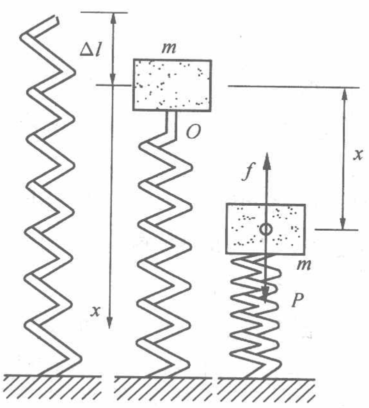


图 7.4　例 7.1 图

例 7.1　一劲度系数为 k 的轻弹簧，下端固定，上端与一质量为 m 的物体相连. 平衡时，弹簧被压缩 Δl，Δl 称为静止形变，如图 7.4 所示. 如果再用力下压物体，然后无初速地释放. 试写出物体 m 的运动微分方程，并求出振动系统的频率和周期.

解　以物体 m 为研究对象，在竖直方向上弹簧振子受到重力 P 和弹簧的弹力 f 这两个力的作用. 当物体在重力和弹性力的作用下处于平衡时，弹簧被压缩 Δl，物体位于 O 点. 由此可得 $mg-k\Delta l=0$，即 $k/m=g/\Delta l$. 以平衡位置 O 为坐标原点，竖直向下方向为正，建立坐标 Ox.

在任意时刻，若物体 m 的位置坐标为 x，则弹簧发生的形变为 $\Delta l+x$，物体所受的合力表示为

$$F = mg - k(\Delta l + x) = -kx$$

即物体所受的合外力与 x 成正比且反向，因此物体将作简谐振动. 其运动微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad 或 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega^2=k/m=g/\Delta l$，则物体 m 的运动微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

由此可得振动系统的周期和频率分别为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}},\quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$

讨论 (1) 只要知道了弹簧的形变 Δl,就能求出振动系统的固有频率. 这一表达式在工程上有重要的意义. 例如,客车和货车车厢引起支持弹簧的静止形变分别为$(\Delta l)_{客}=0.24\text{m}$和$(\Delta l)_{货}=0.030\text{m}$,则每分钟客车和货车车厢振动的次数分别为

$$n_{客}=60\nu_{客}=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{(\Delta l)_{客}}}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.24}}\approx 61\ 次\cdot\text{min}^{-1}$$

$$n_{货}=60\nu_{货}=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{(\Delta l)_{货}}}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.030}}\approx 173\ 次\cdot\text{min}^{-1}$$

客车每分钟振动次数与人体脉搏跳动次数接近,人坐在客车车厢内比较舒适;货车每分钟振动次数较人体脉搏跳动次数高得多,人坐在货车车厢内时感到不舒适.

(2) 通过例题 7.1 的求解可以知道,尽管物体 m 受到了轻弹簧的弹性力和恒力——重力的作用,但是物体仍作简谐机械振动. 因此,**恒力的存在不改变系统作简谐振动的振动性质和振动频率,改变的只是简谐振动的平衡位置**. 由此可以断言,弹簧振子放在无摩擦的斜面上,在匀加速升、降的电梯上,或在等效的引力场中,若取物体所受合力为零的位置作为坐标原点,沿振动方向为坐标轴的方向,则系统仍作简谐机械振动. 例如,在例 7.1 中,需要将质点作简谐振动的平衡位置由轻弹簧的原长位置处移到 $\Delta l=mg/k$ 位置处.

7.1.3 简谐振动的旋转矢量表示法

(7.4)式~(7.6)式分别表示了作简谐振动的物体的位移、速度和加速度. 它们说明在简谐振动中物体作变加速运动. 如果能利用某种均匀运动来描述这种非均匀运动,显然会带来很大的方便.

简谐振动余弦解的形式,使人们很自然地会想到圆周运动. 若一个质点以恒定的速率 v 作圆周运动,则圆心指向质点的矢径所转过的圆心角 $\Delta\theta$ 与经历的时间成正比,即角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{R}$ 为常量(其中 R 是圆半径). 如果以圆心为坐标原点建立直角坐标系,则质点圆周运动的位置在直角坐标系中可以表示为

$$x=R\cos\theta,\quad y=R\sin\theta$$

利用任一时刻质点的角位置表达式 $\theta=\omega t+\varphi$ 可以得到

$$x=R\cos(\omega t+\varphi),\quad y=R\sin(\omega t+\varphi)$$

显然,这两个分量表示作圆周运动的质点在 x 轴或 y 轴上的投影是在作简谐振动,因此可以用它在 x 轴上的投影来描述简谐振动. 这种方法就是简谐振动的矢量图表示法——**旋转矢量法**.

如图 7.5 所示,取参考轴 Ox. 设有一长度等于振幅 A 的矢量 OM 在平面内绕 O

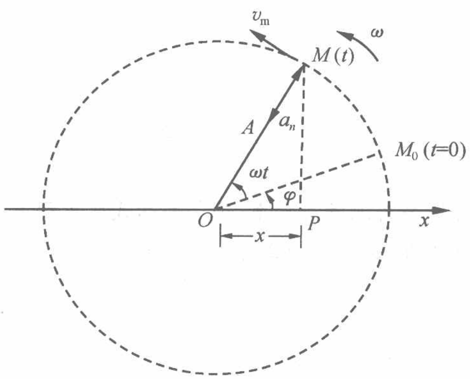


图 7.5 旋转矢量

点作逆时针方向的匀角速率转动，其角速度等于简谐振动的角频率 ω，OM 矢量称为**振幅矢量**.

设初始时刻($t=0$ 时)该矢量的位置与 Ox 轴之间的夹角等于初相位 φ，则任意时刻 t，矢量 OM 与 Ox 轴之间的夹角为 $\omega t+\varphi$，与作简谐振动的质点在该时刻的相位相同. 矢量 OM 的端点 M 在 Ox 轴上投影点 P 的位移为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

因此当旋转矢量 OM 匀速转动时，其端点 M 在 Ox 轴上的投影点的运动是简谐振动.

旋转矢量法可以把描述简谐振动的振幅、角频率、相位及初相等物理量形象地表示出来，给简谐振动的讨论带来方便. 不仅如此，旋转矢量法还广泛地用于振动的合成、波的干涉等方面.

用旋转矢量法还可以表示简谐振动的速度和加速度. 由于以 A 为半径、角速度为 ω 的质点作匀速圆周运动的速率是 $v_m=\omega A$(沿该点的切向)，向心加速度是 $a_n=\omega^2 A$(指向圆心)，所以在时刻 t 它们在 x 轴上的投影分别是

$$v=-v_m\sin(\omega t+\varphi)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$
$$a=-a_n\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$$

正是(7.5)式、(7.6)式给出的结果.

由此可以得到计算简谐振动中任一点 P 的相位的两种方法.

(1) 解析法. 在给定时刻 $t=t_0$，借助于位移公式 $x_P=A\cos(\omega t_0+\varphi)=A\cos\Phi_P$，由简谐振动中任一点 P 的位移值 x_P 的大小可以定出相位 Φ_P 一般有两个值. 再由速度公式 $v_P=-A\omega\cos\Phi_P$ 和该点速度的正负可以确定该点的相位.

(2) 旋转矢量法. 由简谐振动的方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 可得简谐振动的速度为

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=A\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=A\omega\cos\left(\Phi_x+\frac{\pi}{2}\right)=A\omega\cos\Phi_v$$

其中 Φ_v 是简谐振动中任一点 P 的速度 v 的相位. 由此可得点 P 的位移矢量与速度矢量的相位差为

$$\Delta\Phi=\Phi_v-\Phi_x=\frac{\pi}{2}$$

因此在**简谐振动中，任一点的速度矢量超前位移矢量** $\pi/2$.

由此可以用旋转矢量法确定简谐振动中任一点 P 的相位. 根据简谐振动中任一

点 P 的位移值 x_P 的大小可以定出该点的振幅矢量一般有两个位置，再根据该点的速度矢量超前振幅矢量 $\pi/2$ 和该点速度的正负可以确定该点的相位.

例 7.2　一质点作简谐振动的振动曲线如图 7.6(a)所示，写出它的振动表达式，并指出 a、b、c、d、e 各点对应的相位.

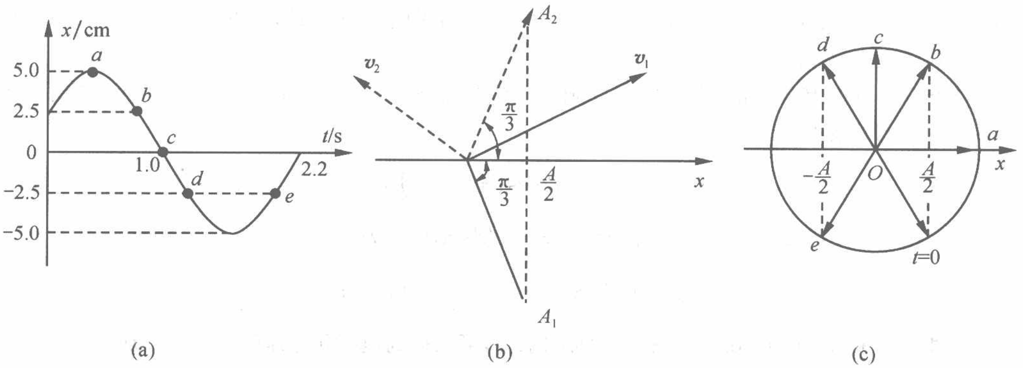


图 7.6　例 7.2 图

解　由图 7.6(a)可知，振幅为 $A=5.0\text{cm}$，周期为 $T=2\times(2.2-1.0)=2.4\text{s}$. 由此可得角频率为

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2.4}=\frac{5\pi}{6}$$

初相 φ 可以用两种方法求出.

(1) 解析法. 设质点作简谐振动的方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$. 由图 7.6(a)知，当 $t=0$ 时的位移 $x_0=2.5\text{cm}$，因此 $x_0=A/2$. 由公式 $x_0=A\cos\varphi$ 可得 $\varphi=\pm\pi/3$，再由 $v_0=-A\omega\sin\varphi>0$ 可得 $\varphi=-\pi/3$.

(2) 旋转矢量法. 由图 7.6(a)知，当 $t=0$ 时，由位移 $x_0=A/2$ 可以作出该点的振幅矢量有如图 7.6(b)所示的两个位置，再由该点的速度矢量超前振幅矢量 $\pi/2$ 和该点的速度 $v_0>0$ 可以确定该点的相位为 $\varphi=-\pi/3$.

由此可得振动方程为

$$x=0.05\cos\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\text{m}$$

用类似的方法可以得 a、b、c、d 和 e 点的旋转矢量如图 7.6(c)所示. 由此可知 a、b、c、d 和 e 点的相位分别为

$$\Phi_a=0,\quad \Phi_b=\frac{\pi}{3},\quad \Phi_c=\frac{\pi}{2},\quad \Phi_d=\frac{2\pi}{3},\quad \Phi_e=\frac{4\pi}{3}$$

例 7.3　质点沿 x 轴作简谐振动，振幅为 12cm，周期为 2s. 当 $t=0$ 时，位移为 6cm，且向 x 轴正方向运动. 求：

(1) 简谐振动的振动方程；

(2) $t=0.5\text{s}$ 时质点的位移、速度和加速度；

(3) 质点从 $x=-6\text{cm}$ 向 x 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需要的时间.

解　(1) 求初相位 φ 可以有两种方法.

方法一　用解析法. 由于质点沿 x 轴作简谐振动,因此可以设振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$. 由题设条件可知 $A=0.12\text{m}$, $T=2\text{s}$, $\omega=2\pi/T=\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

将初始条件 $t=0$ 时, $x=0.06\text{m}$ 代入振动方程,得

$$0.06=0.12\cos\varphi$$

即 $\cos\varphi=1/2$. 由此可得 $\varphi=\pm\pi/3$. 因为 $t=0$ 时质点向 x 轴正方向运动,所以 $v_0=-A\omega\sin\varphi>0$,即 $\sin\varphi<0$,故 $\varphi=-\pi/3$.

方法二　用旋转矢量法. 据初始条件画出振幅矢量的初始位置,如图 7.7(a)所示,得出 $\varphi=-\pi/3$. 由此可得振动方程为

$$x=0.12\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\text{m}$$

(2) 由 $x=0.12\cos(\pi t-\pi/3)$ 可得 $t=0.5\text{s}$ 时的振动位移为

$$x=0.12\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0.104\text{m}$$

将振动方程 $x=0.12\cos(\pi t-\pi/3)$ 对时间求导,可以得到速度和加速度表达式分别为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-0.12\pi\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-0.12\pi^2\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$$

由此可得 $t=0.5\text{s}$ 时的速度和加速度分别为

$$v=-0.12\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-0.188\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a=-0.12\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-1.03\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(3) 求质点从 $x=-6\text{cm}$ 向 x 轴负方向运动,第一次回到平衡位置所需要的时间也有两种方法.

方法一　用解析法.

设 $x=-6\text{cm}$ 处为 a 点,平衡位置为 b 点. 由"质点从 $x=-6\text{cm}$"可知

$$-0.06=0.12\cos\Phi_a$$

由此可得该点的相位为 $\Phi_a=2\pi/3$ 或 $\Phi_a=4\pi/3$. 再由"向 x 轴负方向运动"可知该点的速度 $v_a=-A\omega\sin\Phi_a<0$. 由此可知该点的相位为 $\Phi_a=2\pi/3$.

由平衡位置处的位移为 $x_b=A\cos\Phi_b=0$ 可知 $\Phi_b=\pm\pi/2$. 再由"第一次回到平衡位置"可知, $v_b=-A\omega\sin\Phi_b>0$,由此可得该点的相位为 $\Phi_b=3\pi/2$.

方法二　用旋转矢量法. 由"质点从 $x=-6\text{cm}$ 向 x 轴负方向运动"可知,这一运动状态对应的旋转矢量位置如图 7.7(b)所示,振幅矢量与 x 轴的夹角,即该点的相位为 $\Phi_a=2\pi/3$;若质点第一次回到平衡位置,则旋转矢量沿逆时针转动到与 x 轴的夹角(即该点的相位)为 $\Phi_b=3\pi/2$.

由 $\Phi_a=\omega t_a+\varphi$ 和 $\Phi_b=\omega t_b+\varphi$,可得质点从 $x=-6\text{cm}$ 向 x 轴负方向运动,第一次回到平衡位置所需要的时间为

$$\Delta t=t_b-t_a=\frac{\Phi_b-\Phi_a}{\omega}=\frac{\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}}{\pi}=\frac{5}{6}\text{s}$$