College
高等学校经典教材配套辅导丛书

高等代数

辅导及习题精解

上册

滕加俊 罗 剑
吴 红 陈 莉 主编

知识归纳
习题全解
经典考题
名师执笔
精准解答

陕西师范大学出版社

高等学校经典教材配套辅导丛书

高等代数

辅导及习题精解

（上册）

滕加俊　罗　剑
吴　红　陈　莉　编著

陕西师范大学出版社

图书代号:JC4N0112

图书在版编目(CIP)数据

高等代数辅导及习题精解(上册)/滕加俊,罗剑,吴红,陈莉主编.一西安:陕西师范大学出版社,2004.7

(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7-5613-3022-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①滕…②罗…③吴…④陈… Ⅲ.高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065543 号

责任编辑 史 进
装帧设计 王静婧
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师大 120#(邮政编码:710062)
网　　址 http://www.snuph.com
经　　销 新华书店
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 14
字　　数 350 千
印　　数 5000 册
版　　次 2004 年 10 月第 1 版
印　　次 2004 年 10 月第 1 次印刷
定　　价 33.00 元(上册:16.50 元,下册:16.50 元)

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

E-mail:if-centre@snuph.com

前　　言

高等代数是数学学科中一门重要基础课，也是数学专业硕士研究生入学考试必考科目。高等代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和广泛的应用性。大多数学生在学习过程中感到高等代数抽象难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路、难以下手。为了帮助读者掌握高等代数的基本理论和基本方法，掌握综合运用各种解题的技巧和方法、提高分析问题和解决问题的能力，我们根据丘维声教授编写的《高等代数》(上、下册)编写了本辅导教材(上、下册)。

本辅导教材由以下几部分组成：

1. 主要概念及公式：列出各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握和理解的核心内容。

2. 重点难点解疑：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出相应的解释说明，以帮助读者对相应的内容理解得更加透彻。

3. 课后习题全解：教材中课后习题数量大、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论，锤炼读者的基本方法，许多层次较高的问题有助于广大读者进一步的提高和应用，不少问题具有独特的解题思路和方法。针对以上两点，我们对教材课后全部习题给出了详细的解答，由于高等代数解题方法千变万化，大多数习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。

4. 考研试题精解：精选历年各院校研究生入学考试试题中具有代表性的试题进行了详细的解答，这些例题涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三、触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握高等代数的基本内容和解题方法。需要说明的是教材的课后习题中有相当一部分题目都是历年各院校高等代数研究生入学考试的试题。

本书由滕加俊、罗剑、吴红、陈莉、王璞、张亮等同志编写，许扬灵、史顺文等同志参加了部分编写工作。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了陕西师范大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

作　者

2004 年 8 月 20 日

目　　录

第一章　线性方程组的解法

【基本要求、重点与难点】

基本要求：

1. 了解高斯(Gauss)消去法的理论根据，掌握解线性方程组的消元法。

2. 会用矩阵行初等变换求线性方程组的一般解。

3. 理解数域的基本概念。

重点：高斯(Gauss)消去法求线性方程组的一般解。

难点：解线性方程组的消元法。

【主要概念及公式】

1. 矩阵

(1) 由 sn 个数排成 s 行 n 列的表：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$ 称为一个 $s\times n$ 矩阵。记为 $A_{s\times n}$。其中 A 的 (i,j) 元记为

$a_{ij}(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n)$，有时记 $A=(a_{ij})$。

(2) 数域 K 上一切 $s\times n$ 矩阵组成的集合，记为 $M_{s\times n}(K)$。当 $s=n$ 时，$M_n(K)$ 称为 n 级方阵组成的集合。

(3) 对角线元素都是 1，其余元素都是 0 的方阵称为单位阵，记为 I_n。有时，简记为 I。

(4) $M_{n\times 1}(K)$ 或 $M_{1\times n}(K)$ 中元素都称为 n 维向量。

(5) 元素全为 0 的 $s\times n$ 矩阵，称为零矩阵，记为 $O_{s\times n}$，有时，简记

为 O。

(6) 阶梯形矩阵。它们的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在下方及左下方全为零；如果某一行全为零，则它的下面各行全为零，这样的 $s\times n$ 矩阵称为阶梯形矩阵。

(7) A 的转置矩阵记为 A'(或 A^T)。若 A 是 $s\times n$ 矩阵，则 A' 为 $n\times s$ 矩阵。

2. 高斯(Gauss) 消元法

(1) 设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \quad ①$$

则矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$；$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$

分别为方程组的系数矩阵和增广矩阵，当 $b_i=0(i=1,2,\cdots,s)$ 时，即齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad ②$$

称为方程组 ① 的导出组(或称为 ① 对应的齐次方程组)。

(2) 矩阵行(列) 初等变换是指下列三型之一：

1° 型：把一行(列) 的倍数加到另一行(列) 上；

2° 型：互换两行(列) 的位置；

3° 型：用一非零的数乘某一行(列)。

(3) 结论：

(i) 一个线性方程组经过若干次初等变换所得到的新的线性方

程组与原方程组同解。

(ii) 对一个方程组进行初等变换，实际上就是对它的增广矩阵进行矩阵的初等行变换。

(iii) 对增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换，可转化为阶梯矩阵

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{12} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad ③$$

则方程组 ① 与由阶梯形矩阵 ③ 为增广矩阵的方程组为同解方程组。

3. 线性方程组的解的情况

(1) 由阶梯形矩阵 ③ 知方程组 ① 有解的条件是：

(i) 若 $d_{r+1} \neq 0$，则方程组无解，因为此时第 $r+1$ 个方程 $0 = d_{r+1} \neq 0$ 产生矛盾；

(ii) 若 $d_{r+1} = 0$，且 $r = n$，则方程组有唯一解，此时独立的方程个数与未知量个数相等；

(iii) 若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$，则方程组有无穷多个解，此时独立的方程个数小于未知量个数。任给 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 一组值，就唯一地定出 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的值。一般地，可以把 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 通过 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 表示出来，这样一组表达式称为方程组 ① 的一般解，而 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 称为一组自由未知量。

(2) 方程组 ① 的导出组 ② 必有解，当 $r = n$ 时，只有唯一零解；当 $r < n$ 时，有非零解，且有无穷多个解。

(3) 解线性方程组 $AX = B$ 的步骤：

① 分离出增广矩阵 $\overline{A} = (A, B)$；

② 将 $\overline{A}=(A,B)$ 通过行初等变换化为阶梯形矩阵；

③ 原方程组与阶梯形矩阵表示的线性方程组同解；

④ 判断有无解，并在有解的情况下，得出一般解。

4. 数域

(1) 定义　复数集的子集 **K** 称为一个数域，如果它满足：

(i) $0,1\in\mathbf{K}$；

(ii) $\forall a,b\in\mathbf{K}$，都有 $a\pm b,ab\in\mathbf{K}$，并且当 $b\neq 0$ 时，有 $\frac{a}{b}\in\mathbf{K}$。

性质(ii) 称为 **K** 对于加、减、乘、除四种运算封闭。

(2) 设 **K** 是至少包含两个数的数集，如果 **K** 中任两数的和、差、积、商(除数不等于零) 均仍属于 **K**，则称 **K** 是一个数域。

(3) 任何数域都包含有理数域。

【重点、难点解答】

1. 对于具体地解线性方程组，消元法是最有效且最基本的方法，用消元法解线性方程组的具体步骤分三步：

① 对方程组的增广矩阵作初等行变换，化为阶梯形。

② 由阶梯形矩阵判断方程组解的情况。

③ 在有解的情形下，由阶梯形矩阵写出同解方程组，求出方程组的解。

2. 初等变换分两大类：行初等变换和列初等变换，每一类分三型，不同问题可允许使用的初等变换是有所不同，如解线性方程组只能进行行初等变换等。另外注意初等变换是变换，不是运算，所以联系符号不能用等号，只能用箭头或“$\backsim$”。

3. 数域 **K** 是我们讨论问题的前提，取定数域 **K** 后，解线性方程组时其全部系数和常数项都属于 **K**，讨论矩阵时其全部元素都属于 **K**，进行行初等变换时，“倍数”“非零数”都属于 **K** 等。常用的数域有：有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C**。它们都是数域。但整数集 **Z** 不是数域。除了 **Q**、**R**、**C** 外，还有许多数域。

【课后习题全解】

习题 1.1

1. 解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

解：

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & -8 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -12 \\ -1 & 4 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③+2①\\④+①}]{②+(-3)①}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+(-1)②]{③+5②}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & -90 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow[\left(-\frac{1}{2}\right)④]{\frac{1}{3}③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-\frac{5}{9}③]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ x_2 + 7x_3 + 8x_4 = -18 \\ 9x_3 + 13x_4 = -30 \\ -\frac{11}{9}x_4 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x_4 = -3 \\ x_3 = (-30 - 13x_4)\frac{1}{9} = 1 \\ x_2 = -18 - 8x_4 - 7x_3 = -1 \\ x_1 = 6 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} x_4 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 2 \end{cases}\text{或}\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 - 12x_3 = -15 \end{cases}$

解：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -7 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -12 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+(-1)①]{③+3①}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & -1 & 18 & 20\\0 & 2 & -23 & -27\\0 & 1 & -5 & -7\end{bmatrix}\xrightarrow{(②,③)}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & 1 & -5 & -7\\0 & 2 & -23 & -27\\0 & -1 & 18 & 20\end{bmatrix}\xrightarrow[④+②]{③-2②}\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & 1 & -5 & -7\\0 & 0 & -13 & -13\\0 & 0 & 13 & 13\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{④+③}\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & 1 & -5 & -7\\0 & 0 & -13 & -13\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{③\left(-\frac{1}{13}\right)}\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & 1 & -5 & -7\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1+3x_2-7x_3=-8\\x_2-5x_3=-7\\x_3=1\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}x_1=5\\x_2=-2\\x_3=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3+2x_4-x_5=4\\5x_1+8x_2+4x_3+3x_4-2x_5=-4\\-2x_1-5x_2+x_3-5x_4+4x_5=-12\\3x_1+7x_2-x_3+x_4-3x_5=-4\\-x_1-4x_2+5x_3-x_4+5x_5=-6\end{cases}$

解：$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 4\\5 & 8 & 4 & 3 & -2 & -4\\-2 & -5 & 1 & -5 & 4 & -12\\3 & 7 & -1 & 1 & -3 & -4\\-1 & -4 & 5 & -1 & 5 & -6\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{③+2①\\④+(-3)①\\⑤+①}]{②+(-5)①}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 4\\0 & -7 & +14 & -7 & 3 & -24\\0 & 1 & -3 & -1 & 2 & -4\\0 & -2 & 5 & -5 & 0 & -16\\0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(②,③)}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 4\\0 & 1 & -3 & -1 & 2 & -4\\0 & -7 & 14 & -7 & 3 & -24\\0 & -2 & 5 & -5 & 0 & -16\\0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{④+2②\\⑤+②}]{③+7②}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 4\\0 & 1 & -3 & -1 & 2 & -4\\0 & 0 & -7 & -14 & 17 & -52\\0 & 0 & -1 & -7 & 4 & -24\\0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(③,④)}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 4\\0 & 1 & -3 & -1 & 2 & -4\\0 & 0 & -1 & -7 & 4 & -24\\0 & 0 & -7 & -14 & 17 & -52\\0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+③(-7)]{③(-1)}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 4\\0 & 1 & -3 & -1 & 2 & -4\\0 & 0 & 1 & 7 & -4 & 24\\0 & 0 & 0 & 35 & -11 & 116\\0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -4 \\ x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 24 \\ +35x_4 - 11x_5 = 116 \\ 6x_5 = -6 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 3 \\ x_5 = -1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

解：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -11 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \\ 0 & 0 & -28 & 60 & -168 \\ 0 & 0 & -19 & 38 & -114 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 42 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -11 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 33 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

由下到上逐个回代，就得到唯一解：$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

当概念比较清楚时。可不写出同解方程组，而直接由最后的阶梯形矩阵求解即可。

习题 1.2

1. 解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$

解：$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

阶梯方程出现 $0 = 11$，因此此方程组无解。

(2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$

解：$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & -11 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$