

中学数学基础
ZHONGXUE SHUXUE JICHU

$$y=f(x)$$



解析几何 习题解答

史素 任学

人民教育出版社

中学数学基础

解析几何习题解答

史素 任学

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是《中学数学基础·解析几何》(人民教育出版社1981年2月第一版)的习题解答。为了便于查对,在练习、习题和复习题的标题后和题号前面的括号内列出了原书上的页次。

中学数学基础
解析几何习题解答
史素任学

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11.5 字数 235,000
1981年4月第1版 1981年9月第1次印刷
印数 1-315,000
书号 7012·0125 定价 0.84元

目 录

上篇 平面解析几何

第一章 平面直角坐标系	
曲线与方程 ……………1	
第一节 平面直角坐标系……………1	
练习 (第5页)……………1	
习题 (第18页)……………2	
第二节 曲线与方程……………14	
习题 (第30页)……………14	
复习题 (第31页)……………23	
第二章 直线 ……………37	
第一节 直线的方程……………37	
练习 (第36页)……………37	
练习 (第40页)……………39	
习题 (第43页)……………40	
第二节 直线基本问题……………46	
练习 (第54页)……………46	
习题 (第64页)……………52	
复习题 (第66页)……………61	
第三章 二次曲线 ……………81	
第一节 圆……………81	
习题 (第75页)……………81	
第二节 椭圆……………89	
习题 (第87页)……………89	
第三节 双曲线……………102	
习题 (第100页)……………102	
第四节 抛物线……………110	
习题 (第107页)……………110	
第五节 二次曲线的切线……………117	
习题 (第120页)……………117	
第六节 一般二次方程……………128	
练习 (第124页)……………128	
练习 (第130页)……………132	
练习 (第135页)……………138	
习题 (第147页)……………140	
复习题 (第149页)……………158	
第四章 极坐标和参数	
方程 ……………201	
第一节 极坐标……………201	
练习 (第157页)……………201	
练习 (第161页)……………204	
练习 (第173页)……………208	
习题 (第173页)……………210	
第二节 参数方程……………218	
习题 (第186页)……………218	
复习题 (第188页)……………225	

下篇 空间解析几何

第五章 向量代数246	习题 (第 234 页).....292
第一节 空间直角坐标系...246	第三节 直线.....298
习题 (第 198 页).....246	习题 (第 241 页).....298
第二节 向量.....251	第四节 三平面间的关系
习题 (第 204 页).....251	平面束.....311
第三节 两向量的数量积...255	习题 (第 249 页).....311
习题 (第 209 页).....255	复习题 (第 249 页).....315
第四节 两向量的向量积...258	第七章 空间曲面和曲
习题 (第 215 页).....258	线346
第五节 混合积.....264	第一节 曲面与方程.....346
习题 (第 220 页).....264	习题 (第 261 页).....346
复习题 (第 220 页).....266	第二节 曲线与方程.....349
第六章 空间平面和直	习题 (第 266 页).....349
线286	第三节 二次曲面.....352
第一节 平面.....286	习题 (第 277 页).....352
习题 (第 229 页).....286	复习题 (第 278 页).....360
第二节 平面基本问题.....292	

上 篇

第一章 平面直角坐标系 曲线与方程

第一节 平面直角坐标系

练 习(第 5 页)

[5] 1. 如图, 试求

(1) AB, BC, CD, DA 各等于什么?

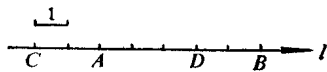
(2) $AB+BC+CD=?$

$AB+BC+CD+DA=?$

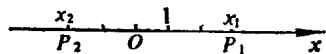
解: (1) $AB=5, BC=-7, CD=5, DA=-3;$

(2) $AB+BC+CD=AD=3,$

$AB+BC+CD+DA=0.$



(第 1 题)



(第 2 题)

[6] 2. 如图, 试求

(1) $x_1=? x_2=?$ (2) $P_1P_2=? P_2P_1=?$

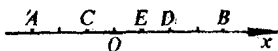
解: (1) $x_1=3, x_2=-2;$

(2) $P_1P_2=x_2-x_1=5, P_2P_1=x_1-x_2=-5.$

[6] 3. 如图, x 轴上每一格等于一个单位长度, 写出有向

线段 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、

EA 的数量和长度.



解: 设 A 、 B 两点的坐标分

(第 3 题)

别为 x_A 、 x_B , 有向线段 AB 的数量:

$$AB = x_B - x_A = 4 - (-3) = 7.$$

有向线段 AB 的长度:

$$|AB| = |x_B - x_A| = |4 - (-3)| = 7.$$

同理, 有向线段 BC 、 CD 、 DE 、 EA 的数量和长度分别为:

$$BC = -1 - 4 = -5, \quad |BC| = 5;$$

$$CD = 2 - (-1) = 3, \quad |CD| = 3;$$

$$DE = 1 - 2 = -1, \quad |DE| = 1;$$

$$EA = -3 - 1 = -4, \quad |EA| = 4.$$

[6] 4. 设 P 是 A 、 B 、 C 三点所在的直线上任意一点, 求证
不论它们的位置如何, 总有

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0.$$

证明: 取 A 、 B 、 C 、 P 所在的直线为数轴, 以 A 为原点,
设 B 、 C 、 P 的坐标分别为 b 、 c 、 p . 根据有向线段数量
的计算公式, 有

$$\begin{aligned} & PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB \\ &= -p(c-b) + (b-p)(0-c) + (c-p)b \\ &= -pc + pb - bc + cp + bc - pb \\ &= 0. \end{aligned}$$

习 题(第 18 页)

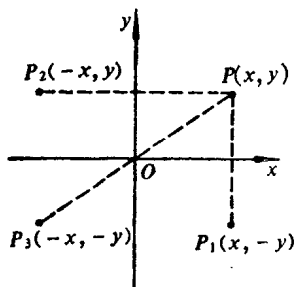
[18] 1. 在直角坐标系中描出下列各点:

(1, 3); (1, -3); (-1, 3); (-1, -3);
 (0, 4); (0, -4); (4, 0); (-4, 0).

作图略.

[18] 2. (1) 求 $P(x, y)$ 关于 x 轴、 y 轴的对称点的坐标;

(2) 求与 $P(x, y)$ 对称于原点的点的坐标. 并指出第 1 题中哪些点是互相对称的 (关于 x 轴、 y 轴或原点).



(第 2 题)

解: 如图.

(1) $P_1(x, -y)$ 点与 $P(x, y)$ 点关于 x 轴对称.
 $P_2(-x, y)$ 与 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称.

(2) $P_3(-x, -y)$ 与 $P(x, y)$ 关于原点对称.

第一题中, (1, 3) 与 (1, -3)、(-1, 3) 与 (-1, -3)、(0, 4) 与 (0, -4) 关于 x 轴对称. (1, 3) 与 (-1, 3)、(-1, -3) 与 (1, -3)、(4, 0) 与 (-4, 0) 关于 y 轴对称. (1, 3) 与 (-1, -3)、(-4, 0) 与 (4, 0)、(0, 4) 与 (0, -4)、(-1, 3) 与 (1, -3) 关于原点对称.

[18] 3. y 轴上 A, B 两点的纵坐标分别是 y_1 和 y_2 , 设

(1) $y_1=8, y_2=6$; (2) $y_1=5, y_2=-3$;

(3) $y_1=-4, y_2=0$; (4) $y_1=-9, y_2=-11$.

求 AB, BA 和 $|AB|$.

解: (1) $AB=y_2-y_1=6-8=-2$,

$$BA = y_1 - y_2 = 8 - 6 = 2,$$

$$|AB| = 2.$$

$$(2) AB = -3 - 5 = -8,$$

$$BA = 5 - (-3) = 8,$$

$$|AB| = 8.$$

$$(3) AB = 0 - (-4) = 4,$$

$$BA = -4 - 0 = -4,$$

$$|AB| = 4.$$

$$(4) AB = -11 - (-9) = -2,$$

$$BA = -9 - (-11) = 2,$$

$$|AB| = 2.$$

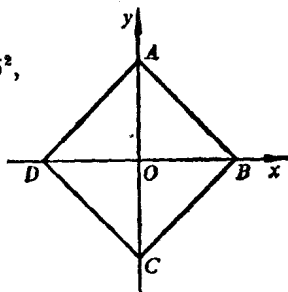
- 【19】 4. 正方形的边长为5, 以两条对角线为坐标轴, 写出四个顶点的坐标.

解: $\because |OA|^2 + |OB|^2 = 5^2,$

$$|OA| = |OB|,$$

$$\therefore |OA| = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$|OB| = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$



(第4题)

又 A、C 关于 x 轴对称, B、

D 关于 y 轴对称, A、B、C、D 四点的坐标分别为

$$A\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right), \quad B\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

$$C\left(0, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right), \quad D\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

- 【19】 5. 边长为5的菱形, 有一条对角线的长为6, 如果把菱形的两条对角线作为坐标轴, 求它各个顶点的

坐标.

解: (1) 以长为 6 的对角线为 x 轴(图 1).

$\because \triangle AOD$ 是直角三角形, $|AD|=5$, $|AO|=3$,

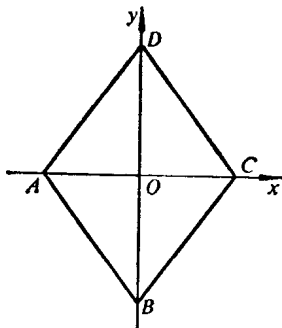
$\therefore |OD|=4$.

由菱形的对称性, 得 A 、 B 、 C 、 D 的坐标分别是

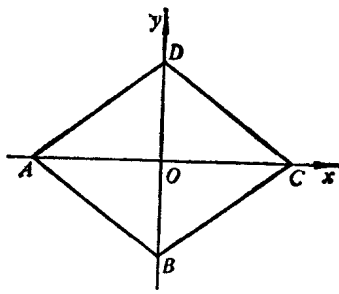
$A(-3, 0)$, $B(0, -4)$, $C(3, 0)$, $D(0, 4)$.

(2) 以长为 6 的对角线为 y 轴(图 2), 同理可得各点坐标分别是

$A(-4, 0)$, $B(0, -3)$, $C(4, 0)$, $D(0, 3)$.



(1)



(2)

(第 5 题)

- [19] 6. 一个质点从 $A(-3, 2)$ 点到 $B(4, 5)$ 点作直线运动, 求它经过的距离.

解: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 $= \sqrt{(4+3)^2 + (5-2)^2}$
 $= \sqrt{58}$.

- [19] 7. 求证: 以 $A(0, 0)$ 、 $B(3, 1)$ 、 $C(1, 7)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

$$\begin{aligned} \text{证明: } \because AB^2 &= (3-0)^2 + (1-0)^2 = 10, \\ BC^2 &= (1-3)^2 + (7-1)^2 = 40, \\ AC^2 &= (1-0)^2 + (7-0)^2 = 50, \\ \therefore AB^2 + BC^2 &= 10 + 40 = 50 = AC^2. \end{aligned}$$

因此, $\triangle ABC$ 是直角三角形.

- [19] 8. 已知 $A(3, -4)$ 、 $B(a, 3)$ 两点间的距离为 $7\sqrt{2}$, 求 a .

$$\begin{aligned} \text{解: } \because |AB| &= 7\sqrt{2}, \\ \text{即 } (a-3)^2 + (3+4)^2 &= 98, \\ \therefore a_1 &= 10, a_2 = -4. \end{aligned}$$

- [19] 9. 在 x 轴上有一点 P , 它和 $A(1, -3)$ 点的距离等于 5, 求 P 点的坐标.

$$\begin{aligned} \text{解: 设 } P \text{ 点的坐标是 } (x, 0). \\ \text{由 } \sqrt{(x-1)^2 + (0+3)^2} &= 5, \\ \text{得 } (x-1)^2 + 9 &= 25, \\ x-1 &= \pm 4, \\ \therefore x_1 &= 5, x_2 = -3. \end{aligned}$$

因此, 所求的点是 $P_1(5, 0)$, $P_2(-3, 0)$.

- [19] 10. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a, 0)$ 、 $B(a, 0)$ 、 $C(0, \sqrt{3}a)$, 求证这个三角形是等边三角形.

$$\begin{aligned} \text{证明: } \because |AB| &= \sqrt{(a+a)^2 + (0-0)^2} = 2|a|, \\ |BC| &= \sqrt{(0-a)^2 + (\sqrt{3}a-0)^2} = 2|a|, \\ |CA| &= \sqrt{(0+a)^2 + (\sqrt{3}a-0)^2} = 2|a|, \\ \therefore |AB| &= |BC| = |CA|, \\ \therefore \triangle ABC &\text{ 是等边三角形.} \end{aligned}$$

- [19] 11. 三角形的三个顶点是 $A(2, 1)$ 、 $B(-2, 3)$ 、 $C(0, -1)$, 求三条中线的长.

解: AB 、 BC 、 AC 三边中点 E 、 F 、 D 的坐标分别为

$$x_E = \frac{2 + (-2)}{2} = 0,$$

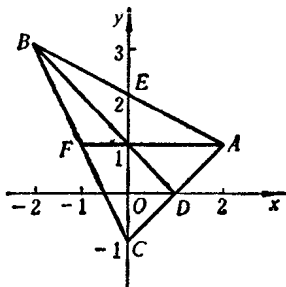
$$y_E = \frac{1 + 3}{2} = 2;$$

$$x_D = \frac{2 + 0}{2} = 1,$$

$$y_D = \frac{1 + (-1)}{2} = 0;$$

$$x_F = \frac{-2 + 0}{2} = -1,$$

$$y_F = \frac{3 + (-1)}{2} = 1.$$



(第 11 题)

$$\begin{aligned} \therefore |AF| &= \sqrt{(1+2)^2 + (1-1)^2} = 3, \\ |BD| &= \sqrt{(1+2)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}, \\ |CE| &= \sqrt{(0-0)^2 + (2+1)^2} = 3. \end{aligned}$$

- [19] 12. 连结 $P_1(2, y)$ 和 $P_2(x, 6)$ 两点的线段的中点是 $P(3, 2)$, 求 x 和 y .

解: $\because P$ 点是 P_1P_2 的中点,

$$\therefore 3 = \frac{2+x}{2}, \quad 2 = \frac{6+y}{2}.$$

即 $x = 4, y = -2$.

- [19] 13. 设有 $P_1(-2, 4)$ 和 $P_2(5, 3)$ 两点, P 点在 P_1P_2 的延长线上, 且 $|P_1P| = 2|P_2P|$, 求 P 点的坐标.

解法 1: 设 P 点的坐标为 (x, y) .

∵ P 在 P_1P_2 的延长线上, 且 $|P_1P| = 2|P_2P|$,

∴ P_2 为 P_1P 的中点.

由线段中点坐标公式, 有

$$5 = \frac{-2+x}{2}, \quad 3 = \frac{4+y}{2}.$$

解得 $x=12, y=2$.

所以 P 点的坐标为 $(12, 2)$.

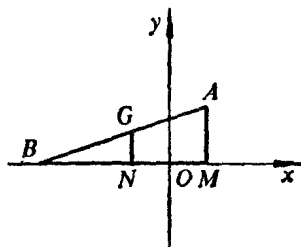
解法 2: 因为 P 在 P_1P_2 的延长线上, 所以 P 为 P_1P_2 的外分点, 由 $|P_1P| = 2|P_2P|$ 可知外分比 $\lambda = -2$,

$$\therefore x = \frac{-2 + (-2) \times 5}{1 - 2} = 12, \quad y = \frac{4 + (-2) \times 3}{1 - 2} = 2.$$

即点 P 的坐标是 $(12, 2)$.

- [19] 14. 在 $A(2, 3)$ 和 $B(-7, 0)$ 处, 分别有重量是 5 克和 4 克的两个质点, 求它们的重心坐标.

解: 如图, 设 $G(x, y)$ 为两质点 A, B 的重心. 因为两质点对重心的力矩大小相等, 所以有



(第 14 题)

$$5|GA| = 4|BG|,$$

即重心 G 分 BA 为定比 $\lambda, \lambda = \frac{5}{4}$.

$$\therefore x = \frac{-7 + \frac{5}{4} \times 2}{1 + \frac{5}{4}} = -2, \quad y = \frac{0 + \frac{5}{4} \times 3}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{3},$$

即重心 G 的坐标为 $(-2, \frac{5}{3})$.

- [19] 15. 两条均匀细棒, 各长 6 厘米和 8 厘米, 連結成直角, 求它們的重心.

解: 細棒 OA 、 OB 的位置如图. 設 OA 长 6 厘米, OB 长 8 厘米, 取 O 为坐标原点, OA 、 OB 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 則細棒 OA 、 OB 的重心分别是 $C(3, 0)$ 、 $D(0, 4)$. 設細棒 OA 、 OB 的质量分别为 $6k$ 、 $8k$, 求細棒 OA 、 OB 的重心, 相当于求 C 、 D 处质量分别为 $6k$ 、 $8k$ 的两个质点的重心.

設重心 G 的坐标为

(x, y) , 同前題一样, 有

$$6k \cdot |GC| = 8k \cdot |DG|,$$

$$\frac{|DG|}{|GC|} = \frac{6k}{8k} = \frac{3}{4},$$

即重心分 DC 为定比 λ , $\lambda = \frac{3}{4}$.

(第 15 題)

$$\therefore x = \frac{0 + \frac{3}{4} \times 3}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{9}{7}, \quad y = \frac{4 + \frac{3}{4} \times 0}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{16}{7},$$

即重心 G 的坐标为 $(\frac{9}{7}, \frac{16}{7})$.

如果 OA 长为 8 厘米, OB 长 6 厘米, 則重心坐标为 $(\frac{16}{7}, \frac{9}{7})$.

- [19] 16. 在 $P_1(2, 3)$ 、 $P_2(-3, 8)$ 、 $P_3(-5, 0)$ 处, 分别有重量是 2 克、3 克和 5 克的三个质点, 求它們的重心.

解: 先求在 P_1, P_2 处两质点的重心,

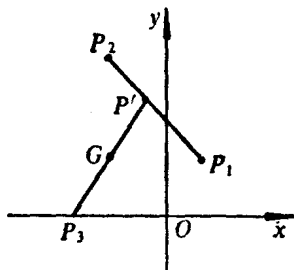
设重心为 $P'(x', y')$,

$$\therefore \frac{P_1 P'}{P' P_2} = \frac{3}{2} = \lambda,$$

$$\therefore x' = \frac{2 + \frac{3}{2} \times (-3)}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$= -1,$$

$$y' = \frac{3 + \frac{3}{2} \times 8}{1 + \frac{3}{2}} = 6,$$



(第 16 题)

所求重心 P' 的坐标是 $(-1, 6)$.

再求在 P', P_3 处两质量分别为 $2+3, 5$ 的两个质点的重心. 设重心 G 的坐标为 (x, y) ,

$$\therefore \frac{P' G}{G P_3} = \frac{5}{5} = 1, \therefore G \text{ 是 } P', P_3 \text{ 的中点.}$$

$$\therefore x = \frac{-1 + (-5)}{2} = -3, \quad y = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

即 P_1, P_2, P_3 处三个质点的重心坐标是 $(-3, 3)$.

[19] 17. 求以 $A(0, 1), B(3, 4), C(-1, -1)$ 为顶点的三角形的面积.

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}.$$

[19] 18. 求以(1, 1)、(3, 4)、(5, -2)和(4, -7)为顶点的四边形的面积.

解: 四边形的面积相当于以(1, 1)、(3, 4)、(5, -2)为顶点和以(1, 1)、(5, -2)、(4, -7)为顶点的两个三角形面积的和.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -18, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -23,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四边形}} &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 9 + 11.5 \\ &= 20.5. \end{aligned}$$

[19] 19. 证明三角形三边中点所成三角形的面积等于原三角形面积的四分之一.

证明: 设三角形三个顶点的坐标(按逆时针顺序)为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$, 则 AB 、 BC 、 CA 中点的

坐标分别为 $D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 、 $E\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ 、

$F\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$, 并且 D 、 E 、 F 也是逆时针排列.

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\triangle DEF} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_2+x_3}{2} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1 \\ \frac{x_3+x_1}{2} & \frac{y_3+y_1}{2} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1 \\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & 1 \\ x_3+x_1 & y_3+y_1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8} [(x_1+x_2)(y_2-y_1) + (x_2+x_3)(y_3-y_2) \\
&\quad + (x_3+x_1)(y_1-y_3)] \\
&= \frac{1}{8} (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2),
\end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}.$$

[19] 20. 检查(2, 3)、(5, 7)、(11, 15)三点是否在一直线上?

解: 因为 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 11 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 所以由三点(2, 3)、(5, 7)、

(11, 15) 为顶点的三角形的面积等于零. 即此三点在一条直线上.

[19] 21. 用解析法证明:

- (1) 直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等;
- (2) 平行四边形的对角线互相平分;
- (3) 平行四边形各边平方的和等于各对角线平方的和.