第1章 行 列 式

线性代数是中学代数的继续和提高.第 1 和第 2 章就是中学代数解一元一次(线性)方程 $ax+b=0$ 的延伸和深化,是研讨多个变量多个线性方程组成的线性方程组的求解问题.为此要引入一些概念,作为预备知识备用.

1.1 数域与排列

本节讨论数域和排列.

1.1.1 数域

在研究某些问题时,常和所研究对象的取值范围有关.如求方程 $x^2+1=0$ 的根,不仅在有理数范围无解,就是在实数范围也无解,而在复数范围有解,解为 $\pm i$.又如在整数范围内,除法不是普遍可做的,因商不一定是整数,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可做的.另一方面,这些范围不同的有理数、实数、复数有着许多共同的性质,特别有着许多共同的运算(指加法、减法、乘法和除法)性质.如加法、乘法的可交换性,加法、乘法的可结合性等.为了在以后讨论中能把具有这些共同运算性质的数集统一处理,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1 设 P 是至少有两个不同复数组成的集合,若 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数,则 P 就称为一个**数域**.

如果数的集合 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中,就称数集 P 对这个运算是**封闭**的.因此数域的定义也可以说成:对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)均封闭的至少含有两个不同数的集合.

从定义 1.1.1 可推知:全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域.这三个数域分别用字母 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 来表示,且有 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

例 1.1.1 记全体整数的集合为 $\mathbf{Z}$,则 $\mathbf{Z}$ 不是数域.这是因为 $2,3\in\mathbf{Z}$,且 $3\neq 0$,但 $\frac{2}{3}\overline{\in}\mathbf{Z}$,这表明 $\mathbf{Z}$ 对于除法不封闭.

例 1.1.2 记 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b,\in\mathbf{Q}\}$,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是数域.

证* 容易看出 $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,且对任意的

$$a+b\sqrt{2},\quad c+d\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

有

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

此外,当 $a+b\sqrt{2}\neq0$ 时,$a-b\sqrt{2}$也不为零.这是因为若 $a-b\sqrt{2}=0$,导致 $a=0,b=0$,这与 $a+b\sqrt{2}\neq0$ 矛盾.故而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

综上可知,$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$是数域,而且从 $\sqrt{2}\overline{\in}\mathbf{Q}$, $\sqrt{3}\overline{\in}\mathbf{Q}(\sqrt{2})$知,

$$\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbf{R}.$$

类似可以阐明 $\mathbf{Q}(\sqrt{3}),\mathbf{Q}(\sqrt{5}),\cdots,\mathbf{Q}(\sqrt{p}),\cdots$,其中 p 是素数(质数)是互不相同的数域,因而存在着无穷多个数域.

今后我们常在数域 P 上讨论问题,对所涉及的 P 中的数进行四则运算,推导出结果.这样就使得该结果在数域 P 上成立,而数域 P 是泛指的,即可以是 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$,或其他某个数域,从而使结果有一般性.

为简单计,如把下文中提及的数域当作 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 来考虑,也无妨.

1.1.2 排列

定义 1.1.2 由 $1,2,\cdots,n$共 n 个数码组成的一个有序数组,称为一个 n 阶排列.

例如,15432,65(12)798(11)4(10)312,$n(n-1)\cdots21$ 依次分别为 5 阶排列,12 阶排列,n 阶排列.在上述 12 阶排列中我们把数码 12,11,10 用括号括起来是为了区分,类似的做法在 n 阶排列中也采用.

排列是有序数组,所以组成排列数码的顺序不同就是不同的排列,例如 132 和 213 就是不同的 3 阶排列.不同的 n 阶排列有多少个呢? n 阶排列的一般形式可表为 $i_1i_2\cdots i_n$,其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中某一个数,且互不相同,这时 $i_k(1\leqslant k\leqslant n)$的下标 k 表示 i_k 排在 n 阶排列的第 k 个位置上.这样按 n 阶排列的定义知,i_1 可有 n 种选取(n 个数码中任选一个),i_2 有 $n-1$ 种选取(去掉 i_1,余下 $n-1$ 个数码中任选一个),$\cdots$,i_{n-1}可有 2 种选取(去掉 $i_1,i_2,\cdots,i_{n-2}$,余下 2 个数码中任选一个),而 i_n 只能取余下的那个数码,故 n 阶排列共有

$$n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$$

个.例如 3 阶排列共有 $3!=6$ 个,它们是:123, 132, 213, 231, 312, 321.

在 $n!$ 个 n 阶排列中,惟有 $12\cdots(n-1)n$ 是按数码从小到大的自然顺序组成的一

个排列(称为**标准排列**).其余的排列或多或少会出现大的数排在小的数前面的情况,比如在5阶排列15432中,5排在4前,3排在2前.这样的排列顺序是与自然顺序相反的,为此引入概念:在排列 $i_1i_2\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_n$ 中,如果 $j<k$ 而 $i_j>i_k$,则称数对 i_j,i_k 构成一个**逆序**.一个排列的逆序总数称为排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.逆序数为偶数的称为**偶排列**,逆序数为奇数的称为**奇排列**.

下面寻求计算排列逆序数的方法.先看一个例子,排列35412构成逆序的数对有

$$\begin{aligned}&31,\quad 32;\\&54,\quad 51,\quad 52;\\&41,\quad 42.\end{aligned}$$

因而35412的逆序数为

$$\begin{aligned}&\ 2(3\text{ 后面比 }3\text{ 小的数的个数})\\&+3(5\text{ 后面比 }5\text{ 小的数的个数})\\&+2(4\text{ 后面比 }4\text{ 小的数的个数})\\&+0(1\text{ 后面比 }1\text{ 小的数的个数})\\&=7,\end{aligned}$$

所以35412为奇排列.

由此得出计算排列的逆序数的一个方法:

$$\begin{aligned}\tau(i_1i_2\cdots i_n)=&\ \tau_1(i_1\text{ 后面比 }i_1\text{ 小的数的个数})\\&+\tau_2(i_2\text{ 后面比 }i_2\text{ 小的数的个数})\\&+\cdots\cdots\\&+\tau_{n-1}(i_{n-1}\text{ 后面比 }i_{n-1}\text{ 小的数的个数}).\end{aligned}$$

据此方法计算得

$$\tau(15432)=0+3+2+1=6,$$

所以15432为偶排列.

注意到 $\tau(12\cdots(n-1)n)=0$,故 $12\cdots(n-1)n$ 为偶排列.

将一个排列中某两个数码的位置互换,而其余数码不动,就得到另一个排列,这样的变换称为**对换**.例如,经过1,3两数码对换,偶排列15432就变成奇排列35412.这表明对换会改变排列的奇偶性.一般有下列定理.

定理 1.1.1 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证* 首先证明对换排列中相邻两个数码的情况.设排列 $\cdots i_ki_{k+1}\cdots$ 经过数码 i_k,i_{k+1} 对换后变成排列 $\cdots i_{k+1}i_k\cdots$,这里"$\cdots$"表示排列中那些不动的数码.故排列"$\cdots i_ki_{k+1}\cdots$"与排列"$\cdots i_{k+1}i_k\cdots$"中 $\tau_1,\cdots,\tau_{k-1},\tau_{k+2},\cdots,\tau_n$ 是相同的,可能不同的只是 τ_k 与 τ_{k+1}.从而若 $i_k<i_{k+1}$,则排列"$\cdots i_{k+1}i_k\cdots$"比"$\cdots i_ki_{k+1}\cdots$"多1个逆

序；若 $i_k > i_{k+1}$，则排列"$\cdots i_{k+1} i_k \cdots$"比"$\cdots i_k i_{k+1} \cdots$"少1个逆序. 故不论如何排列的奇偶性改变了.

现再讨论一般情况. 设对换的两个数码 i_k 和 i_j 中间有 s 个数码，即设排列为

$$\cdots i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_j \cdots. \tag{1.1.1}$$

经过 i_k, i_j 对换后，变成排列

$$\cdots i_j i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_k \cdots. \tag{1.1.2}$$

从式(1.1.1)开始，把 i_j 依次与左边 $s+1$ 个数码 $i_{k+s}, \cdots, i_{k+1}, i_k$ 进行相邻数码的对换，排列式(1.1.1)变成排列

$$\cdots i_j i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} \cdots. \tag{1.1.3}$$

再对排列式(1.1.3)把 i_k 向右依次与 s 个数码 $i_{k+1}, \cdots, i_{k+s}$ 进行相邻数码对换，排列式(1.1.3)变成排列式(1.1.2). 这表明 i_k 与 i_j 的对换可通过 $2s+1$ 次相邻数码对换来实现，而每经一次相邻数码对换改变排列奇偶性. 现经奇数次相邻数码对换，最终必改变排列的奇偶性.

习 题 1.1

1. $\mathbf{R}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 是不是数域？它实际上是 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 中的哪一个数域？

2. 写出4个数码1,2,3,4的所有4阶排列.

3. 分别计算下列四个4阶排列的逆序数，然后指出奇排列是(　　).

(A) 4312；　(B) 4132；　(C) 1342；　(D) 2314.

4. 计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

(1) 314265；　(2) 314265789；　(3) 542391786；

(4) 987654321；　(5) 246813579；　(6) $n(n-1)\cdots 21$.

5. 在由1,2,3,4,5,6,7,8,9组成的下述9阶排列中，选择 i 与 j 使得

(1) $2147i95j8$ 为偶排列；　(2) $1i25j4896$ 为奇排列；

(3) $412i5769j$ 为偶排列；　(4) $i3142j786$ 为奇排列.

且均要求说明理由.

6. 写出全体形如 $5**2*$ 及 $2*5*3$ 的5阶排列. 总结一下，有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列有多少个？

7. 自学附录一：连加号 $\sum$ 与连乘号 $\prod$.

1.2 行列式的定义

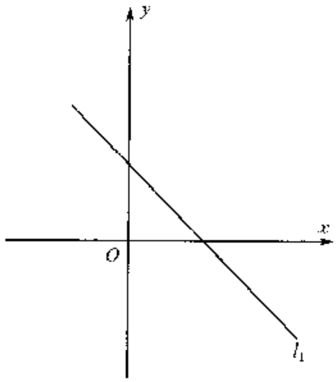
由中学数学知

1. 一元一次方程 $ax=b$，当 $a \neq 0$ 时，有惟一解：$x = a^{-1}b$.

2. 二元一次方程 $ax+by=c$，当 a, b 不全为零时，有无穷多解. 比如二元一次方程(I)：$x+y=1$ 的解为

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \end{cases}$$ 其中 t 为任意常数.

这些解的全体构成已建立直角坐标系 Oxy 的平面上的一条直线 l_1(参见右图),方程(Ⅰ)称为直线 l_1 的方程(正因为此,我们称一次方程为线性方程).同样直线 l_1 上点的坐标都是方程(Ⅰ)的解,l_1 可称为方程(Ⅰ)的直线.简言之,二元一次方程和平面上的直线是一一对应的.按照这种观点,讨论两个二元一次联立方程(即线性方程组)

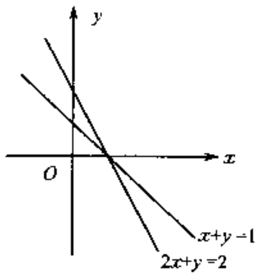


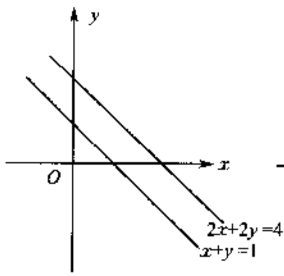
$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

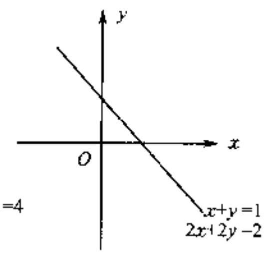
的解,其实就是寻求两条直线的公共点问题.比如考虑下述方程组的解

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases} \qquad (\text{Ⅳ})\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 4. \end{cases} \qquad (\text{Ⅴ})\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$$

可以在已建立直角坐标系 Oxy 的平面上画出相应的直线







这表明(Ⅲ)有惟一解:$x=1,y=0$;(Ⅳ)无解;(Ⅴ)有无穷多解.

中学数学还告诉我们凡方程组(Ⅱ)总是可以用消元法来解的.比如

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases} x + y = 1, & ① \\ 2x + y = 2, & ② \end{cases}$$

将①×(−2)加到②上得 $y=0$,将①×(−1)加到②上得 $x=1$.从而(Ⅲ)的惟一解为 $x=1,y=0$.

上述都是我们中学数学中熟知的结果,我们将在此基础上继续讨论,为此引进一些概念.

定义 1.2.1 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是变量,n 是一个正整数,形式表达式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 均为数,称为 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性方程**,线性方程

中的变量也称为**未知量**.

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时就是我们熟悉的一元一次方程和二元一次方程.

例 1.2.1 下列均为线性方程:

$$\sqrt{2}x+2y=7;\quad x_1+2x_2-\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)x_3+x_4=5;\quad y=4x-z+\lg 50.$$

例 1.2.2 下列均不是线性方程:

$$x+2y^2=7;\qquad x_1+2x_2-4x_3+x_1x_3=5;$$

$$y-\cos x=2;\qquad \sqrt{x_1}+2x_2-x_3=1.$$

上述两例表明线性方程是未知量均为一次的方程.

定义 1.2.2 线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的一个**解**是一组有序的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,当 $x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n$ 时,有

$$a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_nk_n=b.$$

线性方程解的全体所组成的集合称为**解集合**.

定义 1.2.3 含 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

称为**线性方程组**.若一组有序的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是方程组中每一个线性方程的解,则其称为线性方程组的一个**解**.线性方程组解的全体称为**解集合**.

按此定义上述线性方程组(Ⅲ)的解集合为$\{x=1,y=0\}$;(Ⅳ)的解集合为空集合;(Ⅴ)的解集合为$\{x=1-t,y=t\mid t$ 为任意常数$\}$.

下面我们来考察由含有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的求解问题.

这类方程组总是可以用消元法来求解的.消元法对具体的数字方程求解,虽然比较方便,但其解没有一个统一的公式.而解的公式的重要性只要回想中学代数一元二次方程的公式解的意义就能理解,所以我们有必要寻求含有 n 个未知量的 n 个线性方程组成的方程组的公式解.首先从 $n=2$、$n=3$ 做起,再推广到一般.

当 $n=2$ 时,用消元法解含有未知量 x_1,x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

即以 a_{22}乘第一个方程两边,以 a_{12}乘第二个方程两边.然后两式相减,消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

设 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

这就是二元线性方程组(1.2.1)的解的公式,但此公式不易记忆,为了简洁地表示上述结果,我们引进记号:$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.2.2}$$

称 D 为**二阶行列式**.横写的称为**行**,从上到下分别称第 1 行,第 2 行.竖写的称为**列**,从左到右分别称为第 1 列,第 2 列.行列式中的数,称为行列式的**元素**.每个元素有两个下标,第一个下标表示它所在的行,称为**行指标**;第二个下标表示它所在的列,称为**列指标**.如 a_{12}就是位于 D 的第 1 行、第 2 列上的元素.

从(1.2.2)式可知二阶行列式是两项的代数和.一项是从左上角到右下角连线(称为行列式的**主对角线**)上两元素的乘积,取正号.另一项是从右上角到左下角连线(称**副对角线**)上两元素的乘积,取负号.

据此定义,可计算出

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

这样当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.2.1)解的公式,可简洁明了地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1.2.3 解线性方程组

$$\begin{cases} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 = a, \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 = b. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & \cos\theta \end{vmatrix}=a\cos\theta+b\sin\theta,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \cos\theta & a \\ \sin\theta & b \end{vmatrix}=b\cos\theta-a\sin\theta.$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=a\cos\theta+b\sin\theta,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=b\cos\theta-a\sin\theta.$$

当 $n=3$ 时,含有未知量 x_1,x_2,x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}\tag{1.2.3}$$

可同样逐次消元,消去 x_3、x_2 可得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ =\ &b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.\end{aligned}$$

把 x_1 的系数记为 d,当 $d\neq0$ 时,得

$$x_1=\frac{1}{d}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).$$

类似可解得

$$x_2=\frac{1}{d}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}).$$

$$x_3=\frac{1}{d}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).$$

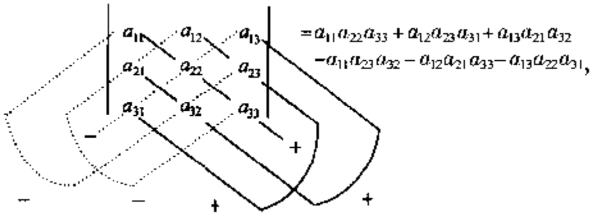
这就是三元线性方程组(1.2.3)的解的公式,此公式更难记忆,为此引进由三行,三列构成的**三阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

这规则可按下图来记忆



实线上三个数的积取正号：　$+a_{11}a_{22}a_{33}$

$+a_{12}a_{23}a_{31}$

$+a_{13}a_{21}a_{32}$

虚线上三个数的积取负号：　$-a_{11}a_{23}a_{32}$

$-a_{12}a_{21}a_{33}$

$+)\ \ -a_{13}a_{22}a_{31}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

现将方程组(1.2.3)中常数项 b_1,b_2,b_3 依次替换 D 中第 1 列(x_1 的系数)、第 2 列(x_2 的系数)、第 3 列(x_3 的系数)元素所得行列式分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

按规定计算 D_1, D_2, D_3,发现三者恰为用消元法解(1.2.3)所得 x_1,x_2,x_3 表达式的分子,而分母 d 均为D,故当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2.3)有简洁的公式解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2.4　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 \qquad = a, \\ \qquad x_2-x_3=b, \\ x_1 \qquad +x_3=c. \end{cases}$$

解　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0.$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}a & -1 & 0\\ b & 1 & -1\\ c & 0 & 1\end{vmatrix}=a+c+b,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & b & -1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix}=b-a+c,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 0 & 1 & b\\ 1 & 0 & c\end{vmatrix}=c-b-a.$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{2}(-a+b+c),$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{2}(-a-b+c).$$

上述讨论过程使我们感到要寻求 n 个未知量 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

便于记忆的公式解，在于如何恰当地定义 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=?$$

为此剖析二阶、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其共同特征可概括如下：

1．二阶行列式是 2！＝2 项的代数和，其中每一项是取自不同行不同列的两

个元素的乘积.三阶行列式是3! =6项的代数和,其中每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积,且任意三个不同行不同列的元素的乘积都是展开式中的一项.

2. 代数和中每一项的正负号是这样决定的:当行指标取成标准排列时,由列指标组成排列的奇偶性确定,偶者为正,奇者为负.

据此,我们可将上述概括表达为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对1,2这两个数所有排列 j_1j_2(2项)取和, $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对1,2,3这三个数所有排列 $j_1j_2j_3$(6项)取和.

推而广之,定义 n 阶行列式.

定义 1.2.4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.2.4}$$

称为 ***n* 阶行列式**.它是取自式(1.2.4)中所有属于不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$(称为**通项**)的代数和,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是某个 n 阶排列,故共有 $n!$ 项求和.每项前的符号按下述规则选取:当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$是偶数时取正号,当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为奇数时取负号.即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.2.5}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$($n!$ 项)取和.

特别规定**一阶行列式** $|a|=a$,并在 n 阶行列式中沿用二阶行列式所使用的术语,诸如行、列、行指标、列指标、主对角线、副对角线等.为方便计,n 阶行列式(1.2.4)可简记为 $D=|a_{ij}|_n$.由式(1.2.5)知,当 a_{ij} 均为数时,行列式 D 为一个数,如 $a_{ij}\in P(i,j=1,2,\cdots,n)$,这里 P 是某个数域,则 $D\in P$.当 a_{ij} 中含有变量

时,行列式 D 为此变量的多项式.故计算或求行列式就是把这个数或多项式求出来.

例 1.2.5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 据定义 1.2.4 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.该展开式通项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中 a_{nj_n} 取自 D 的第 n 行,现 D 第 n 行除 a_{nn} 外,其余元素全为零.故若 $j_n\neq n$,则对应的行列式展开式中那一项一定为零,求和时该项可不计.为此只要考虑 $j_n=n$ 的项.同样由于 D 的第 $n-1$ 行中除 $a_{n-1,n-1}$ 及 $a_{n-1,n}$ 外,其余元素全为零,且因 j_n 已取 n,从而只能取 $j_{n-1}=n-1$.依次类推,D 的 $n!$ 项中除了列指标 $j_1j_2\cdots j_n=12\cdots n$ 对应的项外,其余项全为零,又因 $\tau(12\cdots n)=0$,故 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这类行列式特点是主对角线下方元素全为零,称为**上三角形**,其值为其主对角线上元素的乘积.类似称主对角线上方元素全为零的行列式为**下三角形**.

例 1.2.6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 从通项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中 a_{1j_1} 着手,仿照上例从 j_1 开始逐一分析 $j_2,\cdots,j_n$ 的取值,可得 D 展开式的 $n!$ 项中,除去为零的项外,仅剩下一项为

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

这项列指标排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$.

利用例 1.2.5 和例 1.2.6 的结果可以容易地得出

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & b & c \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} 1 \times 2 \times 3 = -6.$$

例 1.2.5 和例 1.2.6 的结果下文将经常使用,务请熟记.

在行列式定义展开式(1.2.5)中,每一项相乘的 n 个元素的行指标固定取 n 阶标准排列.事实上,数的乘法是可交换的,这 n 个元素相乘的次序是可以改变的,故 n 阶行列式中通项一般可写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.2.6}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列.问题是此时该项的符号如何确定?

由于排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可经过若干次数码对换变为标准排列 $12\cdots n$,因此适当交换式(1.2.6)中元素的位置可得到

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

由于每交换式(1.2.6)中的两个元素,对应的行指标的排列,列指标的排列,均作了一次对换,因而它们逆序之和的奇偶性不变,于是有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} = (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

而 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$ 正是行列式展开式中项 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 的符号.从而有

$$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

这表明行列式中项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

据此 n 阶行列式可有下列表达式:

1. 取 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $12\cdots(n-1)n$ 标准排列时,此即为行列式定义中的(1.2.5)式

$$|a_{ij}|_n = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

2. 取 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $12\cdots(n-1)n$ 标准排列时,有

$$D = |a_{ij}|_n = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.2.7}$$

这表明了行列式中,行与列地位是平等的.

例 1.2.7 下述四项中是五阶行列式 $|a_{ij}|$ 的项,且带正号的是( ).

(A) $a_{11}a_{23}a_{14}a_{35}a_{42}$. (B) $a_{24}a_{42}a_{33}a_{15}a_{51}$.

(C) $a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{55}$. (D) $a_{22}a_{31}a_{14}a_{45}a_{53}$.

解 项 $a_{11}a_{23}a_{14}a_{35}a_{42}$ 中含有行列式 $|a_{ij}|$ 第 1 行的两个元素 a_{11} 和 a_{14},据行

列式的定义1.2.4，$a_{11}a_{23}a_{14}a_{35}a_{42}$不是五阶行列式的项.(B)，(C)，(D)都是五阶行列式$|a_{ij}|$的项．它们所带符号由下面的逆序数确定.

(B)$a_{24}a_{42}a_{33}a_{15}a_{51}=a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$，而$\tau(54321)=4+3+2+1=10$，故该项带正号.

(C)$a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{55}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$，而$\tau(43125)=3+2+0+0=5$，故该项带负号.

(D)$a_{22}a_{31}a_{14}a_{45}a_{53}=a_{14}a_{22}a_{31}a_{45}a_{53}$，而$\tau(42153)=3+1+0+1=5$，故该项带负号.

综上所述，本题应填B.

注记　(B)的符号也可由逆序数$\tau(24315)+\tau(42351)$确定，读者不妨一试.(C)与(D)也如此.

习　题　1.2

1. 按行列式定义，计算下列行列式(要求写出过程)：

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -x^2-1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} \tan\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　(9) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{vmatrix}$.

2. 在6阶行列式$|a_{ij}|$中，下列项应取什么符号？为什么？

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；　(2) $a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}a_{66}a_{25}$；

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$；　(4) $a_{51}a_{13}a_{32}a_{44}a_{26}a_{65}$.

3. 当$i=$____，$k=$____时$a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$成为5阶行列式$|a_{ij}|$中一个取负号的项，为什么？

4. 若$(-1)^{\tau(4k1i5)+\tau(12345)}a_{41}a_{k2}a_{13}a_{i4}a_{55}$是5阶行列式$|a_{ij}|$中的一项，则当$k=$____，$i=$____时该项的符号为正；当$k=$____，$i=$____时该项的符号为负，为什么？

5. 写出4阶行列式$|a_{ij}|$中包含因子$a_{42}a_{23}$的项，并指出正负号.

6. 写出4阶行列式$|a_{ij}|$中所有取负号且包含因子a_{23}的项.

7. 按行列式定义，计算下列行列式((4)中$n>1$，并均要求写出计算过程)：

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & b & -3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

8*. 问

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

为什么错？正确答案是什么？

9. 若 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为整数，则 D 必为整数，这结论对不对？为什么？

10. 计算 $n(n>1)$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.3 行列式的性质

计算 n 阶行列式是本章的中心课题之一，然而从定义出发，只有计算某些特殊的行列式才较为可行，比如说上三角形行列式. 对一般的行列式而言，随着行列式阶数 n 的增大，用定义来计算行列式，其计算量增加的比率是极其迅速的. 一个 n 阶行列式按定义展开，要做 $(n-1)\times n!$ 次乘法（请注意 $50! = 3.041\times10^{64}$，$60! = 8.321\times10^{81}$）. 而在天气预测，大地测量等实际问题中所需解的线性方程组，其未知量成百上千. 本节将研究行列式的性质，这些性质不仅能简化行列式的计算，而且在理论上也相当重要.

首先引入转置行列式的概念，设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^{T} 是由 D 的行列位置互换后得到的,称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质 1　$D = D^{\mathrm{T}}$(行列互换,行列式的值不变).

证　将 D^{T} 记为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 将 D^{T} 按式(1.2.7)展开,有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} = D. \end{aligned}$$

这再次表明行列式中行与列地位平等.因而下面对于行成立的性质,对列相应性质也成立.所以以下性质只对行进行证明是可以的.

注意到例 1.2.5 所说的上三角形行列式转置后为下三角形,所以利用性质 1 可得下述重要结果

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

即下三角形行列式为主对角线上元素的乘积.

性质 2　如果行列式中两行(列)互换,行列式的值只改变一个符号,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ k\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ k\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

证 引入记号

$$b_{st}=\begin{cases}a_{st}, & s\neq i,k,\\ a_{kt}, & s=i,\\ a_{it}, & s=k.\end{cases}$$

则

$$右端=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[展开]{按(1.2.5)}-\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots b_{kj_k}\cdots b_{nj_n}$$

$$=-\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$\xlongequal{(1.2.5)}左端.$$

推论 1 行列式若有两行(列)对应元素全相等,则行列式为零.

证 设行列式 D 的第 i 行与第 k 行相同,若将 D 的第 i 行与第 k 行互换,所得仍为 D.但由性质 2 知,两者要反号,即 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 以数 k 乘行列式中某一行(列)中所有元素,等于用 k 去乘此行列式.换言之,行列式某一行(列)所有元素有公因子 k,可将 k 提到行列式记号外相乘,即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

证 $左端=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=右端.$$