李根水 编著

高中数学题型分析

GAOZHONG SHUXUE TIXING FENXI

北京师范大学出版社

高中数学题型分析

李根水　编著

北京师范大学出版社

高中数学题型分析

李根水　编著

*

北京师范大学出版社出版发行

全 国 新 华 书 店 经 销

朝 阳 展 望 印 刷 厂 印 刷

开本：787×1092　1/32　印张：9.5　字数：200千

1990年1月第1版　　　1991年3月第2次印刷

印数：15 001—32 500

ISBN7-303-01037-8/G·618

定价：3.10元

内 容 简 介

本书根据高中数学教学内容和教学要求，高考数学命题的要求，按照典型题型与重点方法相结合，纵向贯穿与横向联系相结合的原则，进行解题分析与解题指导.

全书共分两部分，第一部分是题型分析，第二部分是复习测试题设计，选例典型且有新意，注重分析与评注.书中配有适量的练习题，注意习题的新颖、灵活和综合性，书末附录给出了全部练习题的答案、提示或解题分析，对于难度较大的题目还给出了较为详细的解答，便于教师教学和读者自学.

前　言

学习数学，总是离不开解题.如何提高解题能力?这是大家都关注的问题.

中学数学的内容十分丰富，题目千变万化，不计其数，浩如“题海”.如果以多做题，用“题海”战术来提高数学解题能力，那么往往是花尽精力，收益不大，得不偿失.提高数学解题能力的一个有效途径：**在解题中选择那些基本的、典型的、具有代表性的题目来仔细推敲揣摹，通过对一道题或少数题的分析，掌握一类题或许多题的规律，以逐步达到“举一反三”，“触类旁通”的境界**.为此，我们不仅应当学会如何解一道题，还应当学会如何分析题目的类型特点，从题目的类型特点上去掌握题目，这是我们的数学思维过程由量变到质变的一个重要转折.本书从这个角度出发，根据现行高中数学教学内容和教学要求，以及近几年来高中毕业会考与高考数学命题的要求，**重点探讨高中数学题型的分析，揭示数学题型的解题思路、方法与技巧，以利于提高数学解题能力**.这也是从茫茫“题海”中解脱出来的一条有效途径.

题型的划分与题目的结构密切相关，影响题目结构的因素是多种多样的，如答题要求、题设与题断、命题意图、考查目的、语言形式等等因素的改变都可以使得题目的“型”发生变化，因而题型的分类可以从不同的角度展开.

从答题的要求分，我们通常把数学题划分成两类：

(1) 标准化题型，又称为客观题型(评分时客观).如选

择题、填空题与简答题．这种题型的特点是：题目较小，检查面宽，解法灵活，答卷简单，评分客观，批阅方便．因此，近几年来在各种各样知识和能力的书面考试中，都将这类题型作为一类命题形式，它有利于发展思维的灵活性，提高正确迅速的判断能力、辨析能力和运算能力．

(2) 论述式题型，又称为主观题型（评分时受阅卷人主观因素影响）．如证明题、计算题、求解题、作图题、讨论题、探究题等．这种题型的特点是：题目较大，知识面较宽，解答时要有论述过程．这类题型利于培养逻辑思维能力与逻辑表达能力，这是学习数学必需培养的能力．

在数学教学中，上述两种题型各有利弊，应当互相补充，不能偏废，都应重视．

本书共分两部分，第一部分是题型分析：(一)标准化题型的分析．一是重点介绍选择题的类型与解法，剖析选择题误解的病因．二是填空题与简答题的解法；(二)论述式题型中，函数、数列、复数、轨迹、定值、最值、讨论、探究等几类题的解法；(三)论述式题型中，综合题的解题分析，重点介绍代数、三角、立体几何、解析几何综合题的例选与评注．第二部分是复习测试题设计，设计了七套综合练习．书末附录给出了全部练习题的答案、提示或解题分析，便于教师教学或读者自学练习时作参考．

在本书的撰写过程中，得到了北京师范大学出版社、苏州大学《中学数学》编辑部、天津师范大学《中等数学》编辑部，中学数学行家与中学高级教师的热情关心、帮助和指导，在此谨致诚挚的感谢．

作　者

目　　录

第一部分　题型分析

第一章　标准化题型的分析

§1　选择题的类型与解法

在一个题中给出了一定的条件和几个结论，同时给出了解答要求，要你将适合要求的结论前的代号填在括号内，这类题目通常叫做选择题.下面介绍选择题的类型和解法.

一、选择题的类型

选择题的种类很多，可以从不同的角度进行分类.

从题目的性质来分，选择题一般可分为三种类型.

1．　定量型　要求从题目的条件，运用相应的数学公式、定理、法则等，来确定某些数学元素的数量关系，此类选择题偏重于计算和验证.

2．　定性型　要求从命题的条件出发，通过相应的数学定义、定理、某种性质或关系等，来判定所考察的数学元素是否具有某种性质或关系.此类选择题往往偏重于概念辨析、推理论证与空间想象.

3．　混合型　定量与定性两个方面都有要求，此类选择题常要用到多方面的数学知识.

从题目的形式来分，常见的选择题可分为三种类型.

1. 是非题 这类题目实际上是从“是与非两项中选出一项”的选择题，或者说是从“正确与错误两项中选出一项的二项选择题，在语法结构上看，这类题常由一个未写明的一般疑问句和一个写明的判断句作答句构成.

例1 下列说法是否正确，正确的在括号内填“√”，错误的填“×”.

(1) 在两个不同平面内的两条直线叫做异面直线；

(2) 若$M=\{$正四棱柱$\}$，$N=\{$长方体$\}$，则$M\supset N$；

(3) $\lg x^2$可以等于$2\lg(-x)$；

(4) 若$x>y$，则$a^x>a^y$；

(5) $\alpha\neq90°$是$\sin\alpha\neq1$的充要条件；

(6) 复数$z=i\sin10°$是三角式.

用是非题便于考查学生对数学概念和性质的理解，学生答题比较简单.在例1中，(1)、(2)、(4)、(5)、(6)都是错误的，(3)是正确的.

学生解答是非题时，应该联想有关的数学概念和性质，细心推敲，周密思考，通过这类题目的练习，提高对有关概念和性质的辨析能力与判断能力. 但由于选择仅有“是”与“非”二项，所以猜对的可能性较大，因而用是非题作为试题时信度不高.

2. 配对题 这类题目给出了几个条件和几个结论，要你将其中某个条件正确地与某个结论搭配成一个正确的命题.

例2 已知函数(1)、(2)、(3)、(4)、(5)与函数性质(A)、(B)、(C)、(D)、(E)、(F)、(G)、请你将具有这些

函数性质的所有字母标号，填入所列函数后面的(　)内，答案可以用一次、几次或者一次也不用.

函数：(1) $y=x^2$, (　　)；　　(2) $y=2^{-x}$, (　　)；

(3) $y=\lg x$, (　　)；　　(4) $y=\sin x$, (　　)；

(5) $y=\arcsin x$, (　　).

性质：(A) 偶函数；　　(B) 奇函数；

(C) 增函数；　　(D) 减函数；

(E) 周期函数；　　(F) 函数的图象过原点；

(G) 函数$y=f(x)$满足$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+(x_2)$

解答这道选择题时，我们必须对函数(1)、(2)、(3)、(4)、(5)分别考察(A)～(G)，可以得出如下答案：

(1) $y=x^2$　(A, F)；　　(2) $y=2^{-x}$, (D)；

(3) $y=\lg x$, (C, G)；　　(4) $y=\sin x$, (B, E, F)；

(5) $y=\arcsin x$, (B, C, F).

用配对题便于考查某一部分基础知识之间的联系与区别，解答此类题目时应该看清题目的要求，联想有关的基础知识，重视同类对象的结构和性质上的区别，周密分析，作出配对选择.

3. 多项选择题　这是一种有多个选择项的选择题，它是配对题的特例.多项选择题的条件只有一个对象，这个对象叫做题干；它的结论通常有三个、四个或五个对象，这几个对象叫做选择项，其中不正确的对象叫做干扰项，每一道多项选择题总是由题干和选择项构成，同时给出解答要求，在考题中还规定了什么方法，从能力上要求，此类选择题优于是非题.

如果给出的选择项，其解答要求中指出“正确的结论至

少有一个”.那么我们就要将所给的每个结论都要周密思考，将所有正确的结论都选出来.

例3 若$x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$y=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则下列关系式中正确的是(　　)

(A)　$x^7+y^7=-1$.　　(B)　$x^9+y^9=-1$.

(C)　$x^{11}+y^{11}=-1$.　　(D)　$x^{13}+y^{13}=-1$.

例4 如图1-1．过正方体AC'的一个顶点A作的平面截正方体所得的截面形状，可能是(　　)

(A)　三角形.

(B)　四边形.

(C)　五边形.

(D)　六边形.

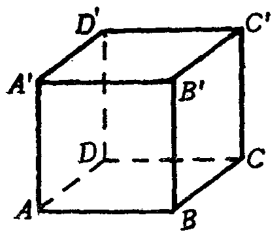

图　1-1

以上两题的答案是：3(A、C、D)；4(A、B、C).

在多项选择题中，有时要你将“不正确的关系”，或“不满足的条件”，或“不可能的图形”选出来，例如，上面例3、4的题目的解答要求改为：

“则下面不正确(或不可能)的是(　　)”

解答要求改变后，其答案是：3(B)；4(D).

二、解答选择题的常用方法

解答选择题不同于解答论述题，应该根据选择题的特点和要求，多观察，勤思考，善于联想和类比，才能迅速地作出正确的判断．如果不善于利用选择题的特点解题，而随便

猜答案，或当作常规题来解，解题不得法，往往会浪费时间.

解答选择题的方法有多种，下面我们以“结论中有且只有一个正确”这类多项选择题为例，介绍解答选择题的几种常用方法.

（一）直接法

直接从条件出发，运用定义、定理、公式、性质进行推理，得出某一个正确的结论，再与所给的结论核对，选择相同结论的题号，这种判断方法叫做直接法.

例1 如有条件：(1)有反函数；(2)为奇函数；(3)定义域集合等于值域集合．那么同时满足这三个条件的函数只能是（　　）

(A) $f(x)=-x^3$.　　(B) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

(C) $f(x)=(10^x+10^{-x})/2$.

(D) $f(x)=\lg[(1-x)/(1+x)]$.

分析：考察(A)：(1)有反函数 $f^{-1}(x)=-x^{\frac{1}{3}}$；(2)是奇函数；(3)定义域与值域都为实数集．根据有且只有一个结论正确的信息，用直接法得出(A)是正确的.

例2 设 $z_1=\sin345°+i\cos345$；　$z_2=-i$；

$z_3=(1+i)^{-1}$；

$z_4=(\cos70°-i\sin70°)^5$.

上述四个复数中，幅角主值最大的复数是（　　）

(A) z_1.　(B) z_2.　(C) z_3.　(D) z_4.

分析：本例考察复数的三角式，幅角主值的概念，棣莫佛定理等知识，可将所给四个复数化为三角式，然后加以比较.

$z_1=\sin345°+i\cos345°$

$=-\sin 15^\circ+i\cos 15^\circ$

$=\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ$,

$z_2=-i=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ$,

$z_3=(1+i)^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(-45^\circ)+\sin(-45^\circ)]$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)$.

$z_4=(\cos 70^\circ-i\sin 70^\circ)^5$

$=[\cos(-70^\circ)+i\sin(-70^\circ)]^5$

$=\cos(-350^\circ)+i\sin(-350^\circ)$

$=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ$

故z_3的幅角主值最大，应选(C).

例3 平行四边形两邻边的长为a和b，当它分别绕边a、b旋转一周后，所形成的几何体的体积之比为(　　)

(A) $\frac{b}{a}$. (B) $\frac{a}{b}$. (C) $\left(\frac{b}{a}\right)^3$. (D) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.

分析： 设a、b边上的高分别为h_a、h_b，则其旋转体的体积为$V_a=\pi h_a^2\cdot a$，$V_b=\pi h_b^2\cdot b$，于是

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{\pi h_a^2\cdot a}{\pi h_b^2\cdot b}=\frac{(h_a\cdot a)^2}{(h_b\cdot b)^2}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}.$$ 故应选(A)

学生解答本例时，往往无从着手而乱猜答案，误选(B)(C)、(D).

例4 设$k<9$，且$k\neq 5$，则椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$与曲线$E$：$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{5-k}=1$始终有相同的(　　)

(A)顶点. (B)焦点. (C)准线. (D)离心率.

分析：当$k<5$时，曲线E为椭圆，此时

$C=\sqrt{(9-k)-(5-k)}=2$，于是焦点为$(2,0)$，$(-2,0)$；

当$5<k<9$时，曲线E为双曲线：$\frac{x^2}{9-k}-\frac{y^2}{k-5}=1$，此时

$C=\sqrt{(9-k)+(k-5)}=2$，焦点为$(2,0)$，$(-2,0)$.

在以上两种情况下，都有椭圆与曲线E共焦点，故应选(B).

例5 数列$\{x_n\}$是由$x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{3x_n+1}{x_n+3}$ $(n\in N)$给出的. 设$y_n=\frac{x_n-1}{x_n+1}$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$等于( )

(A)-1. (B)$-\frac{1}{3}$. (C)0. (D)$\frac{1}{3}$.

分析：本例可由题设条件求出数列$\{y_n\}$的通项，再求其极限，即由$x_{n+1}=\frac{3x_n+1}{x_n+3}$得$x_{n+1}+1=\frac{4x_n+4}{x_n+3}$.

$\because$ $x_n>0$，

$\therefore$ $y_{n+1}=\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=\frac{2(x_n-1)}{4(x_n+1)}=\frac{1}{2}y_n$.

故数列$\{y_n\}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

$\because$ $y_1=\frac{x_1-1}{x_1+1}=\frac{1}{3}$，$\therefore$ $y_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$，故应选(C).

由上可知，直接法解答选择题从条件到结论直接推理，这与常规题的解法相同，要求推理正确，方向明确.

（二）筛选法

对于明显错误的结论，通过逐步“筛选”予以剔除，从而获得正确的结论，这种判断方法叫做筛选法.

例6 在下列各图中（如图1-2），$y=ax^2+bx$与$y=ax+b$（$ab\neq 0$）的图象只可能是（　　）

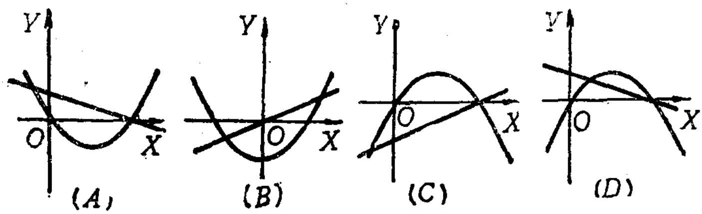

图　1-2

分析：因为a是直线的斜率，又决定抛物线的开口方向，所以，（A）、（C）可以剔除.

又因为已知二次函数的图象过原点，所以（B）也可剔除.从而应选（D）.

例7 复平面内两点A，B分别对应于非零复数α，β且$\alpha^2+\beta^2=0$，则$\triangle OAB$为（　　）

（A） 等腰三角形，但非直角三角形.

（B） 直角三角形，但非等腰三角形.

（C） 等腰直角三角形.

（D） 等腰三角形或直角三角形.

思考方法一：直接法选（C）.

思考方法二：用筛选法.

由题设条件，得

$\alpha^2=-\beta^2 \Longrightarrow |\alpha^2|=|-\beta^2| \Longrightarrow |\alpha^2|=|\beta^2| \Longrightarrow |\alpha|=|\beta|$，从而否定$(B)$；由$\alpha^2=-\beta^2 \Longrightarrow \alpha=\pm\beta i$，从而否定$(A)$；再由$|\alpha|=|\beta|$且$\alpha=\pm\beta i$，从而又否定$(D)$，故应选$(C)$.

例8 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ （$A\neq 0$，$\omega\neq 0$）的奇偶性（　）

（A） 仅与A有关.　　（B） 仅与ω有关.

（C） 仅与φ有关.　　（D） 与A，ω，φ都有关.

分析：本例的函数式的结构中含有字母，比较抽象. 用直接法判断很困难. 因此，我们用特殊的数值探路，取$\varphi=0$时，函数$y=A\sin\omega x$对任何$A\neq 0$，$\omega\neq 0$均为奇函数；取$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，函数$y=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right)=A\cos\omega x$对任何$A\neq 0$，$\omega\neq 0$均是偶函数. 从而可否定（$A$），（$B$），（$D$），所以应选（$C$）.

例9 已知方程为 $\begin{cases} x=\cos^2\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ （θ为参数）

那么它所表示的大致图形是（　）

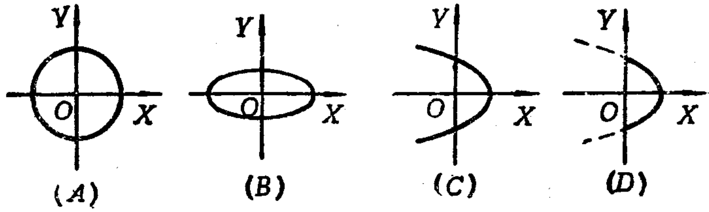

图 1-3

思考方法一：将参数方程化为普通方程$y^2=1-x$（$0\leqslant x$