



世纪

高等学校数学辅导教材



- 本科学习同考研复习的有机对接
- 同步训练与应试模拟的紧密配合

线性代数

全程

(同济大学·线性代数第三版)

学 → 练 → 考

闫家斌 韩志涛 编著

- ★ 本科生：同步训练的良师益友
- ★ 考研者：全程复习的首选读本
- ★ 自学者：学习提高的最佳选择



NEUPRESS
东北大学出版社

21 世纪高等学校数学辅导教材

线 性 代 数

全 程 学 · 练 · 考

(同济大学·线性代数第三版)

闫家斌 韩志涛 编著

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

© 闫家斌 韩志涛 2003

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数全程学·练·考 / 闫家斌, 韩志涛编著. — 沈阳: 东北大学出版社, 2003.9

(21 世纪高等学校数学辅导教材)

ISBN 7-81054-848-4

I. 线… II. ①闫… ②韩… III. 线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 058688 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024-83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024-83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市政二公司印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸: 140mm×203mm

印 张: 8.25

字 数: 277 千字

出版时间: 2003 年 9 月第 1 版

印刷时间: 2003 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000 册

责任编辑: 郭爱民 张德喜

责任校对: 文 韬

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定 价: 12.00 元

前言

本书是为高等学校非数学专业本科生及全国硕士研究生入学统一考试的应试者而编写的“线性代数”辅导教材。编写本书的目的是使读者能够系统地复习“线性代数”的基本内容,全面掌握并灵活运用所学知识,以取得良好的考试成绩。

本书内容的选取参照了原国家教委组织制定的《全国普通高等学校工科本科专业教学计划》中的“线性代数课程教学基本要求”,以及教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中“线性代数”部分的考试要求。本书是编著者根据二十年的教学经验,结合学生在学习线性代数课程及应试中所出现的问题,在大量积累和研究的基础上而编写的。

本书的结构特点是,首先指出各章节的教学要求、考研要求以及各章节内容的重要知识点、难点和考点,然后由浅入深地向读者展示了大量有价值的具有典型意义的例题精析和练习题以及考场模拟题。

本书从国内外多种有关线性代数的教材及参考书中精选了大量具有代表性的典型例题,并选取了近十年来全国硕士研究生入学统一考试题(包括数学一、二、三、四)。对这些典型例题进行详尽的解题思路分析和方法技巧上的指导,这对读者深刻理解有关基本概念,灵活运用基本方法,提高综合分析问题和解决问题的能力等方面都将有极大的益处。

本书教材同步习题全解是对教材(同济大学·线性代数第三版)各章节后的习题的全部解答,便于读者学习教材时分析和自检。

本书的编写工作得到了东北大学出版社有关同志的大力支持。他们为本书的编写提出了许多好的建议,并为全书的编审做了大量出色的工作,这里谨致谢意。

本书中“教材同步习题全解”部分由韩志涛同志编写,其他部分内容由闫家斌同志编写。

由于编著者水平所限,书中难免存在一些缺点和错漏之处,恳请读者批评指正。

编著者

2003 年 7 月

目 录

前 言

第一章	行列式	1
一	教学要求·考研要求	1
二	知识点·难点·考点	2
三	全程典型例题精析	5
四	教材同步习题全解	16
五	全真模拟试题检测	29
	全真模拟试题答案	33
第二章	矩阵及其运算	35
一	教学要求·考研要求	35
二	知识点·难点·考点	36
三	全程典型例题精析	40
四	教材同步习题全解	57
五	全真模拟试题检测	69
	全真模拟试题答案	73

第三章	矩阵的初等变换与线性方程组	77
一	教学要求·考研要求	77
二	知识点·难点·考点	78
三	全程典型例题精析	82
四	教材同步习题全解	102
五	全真模拟试题检测	115
	全真模拟试题答案	121
第四章	向量组的线性相关性	125
一	教学要求·考研要求	125
二	知识点·难点·考点	126
三	全程典型例题精析	131
四	教材同步习题全解	164
五	全真模拟试题检测	179
	全真模拟试题答案	185
第五章	相似矩阵及二次型	190
一	教学要求·考研要求	190
二	知识点·难点·考点	191
三	全程典型例题精析	198
四	教材同步习题全解	225
五	全真模拟试题检测	246
	全真模拟试题答案	251

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念,在线性代数的研究中起着重要作用.引进行列式的概念,有效地与线性方程组的求解结合起来,使线性方程组的求解系统化.



● 一 教学要求·考研要求 ●



(一) 大学本科教学基本要求

1. 了解全排列及其逆序数的概念,会求全排列的逆序数.理解排列的对换性质.
2. 理解 n 阶行列式的概念.
3. 掌握行列式的性质,会利用行列式的性质计算行列式.
4. 掌握行列式按行(列)展开定理,会利用行列式按行(列)展开性质计算行列式,会计算行列式的余子式,代数余子式.
5. 理解 Cramer 法则,会利用行列式求线性方程组的解.掌握齐次线性方程组有非零解的条件和非齐次线性方程组有惟一解的条件.



(二) 全国硕士研究生入学统一考试数学中 线性代数部分(数学一至数学四)的考 试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.



● 二 知识点·难点·考点 ●



(一) 知 识 点

⇨ 1. 全排列及其逆序数、对换

把 n 个不同的元素排成一列, 叫做这 n 个元素的全排列(简称排列).

n 个不同元素的所有排列的总数 $P_n = n!$

对于 n 个不同的元素, 先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数, 可规定由小到大为标准次序), 于是在这 n 个元素的任一排列中, 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时, 就说有一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列为奇排列; 逆序数为偶数的排列叫偶排列.

【注】 对排列中任何元素 p_i , 如果 p_i 与排在 p_i 前面的元素间有 t_i 个逆序, 就称 p_i 这个元素的逆序数是 t_i , 则排列的逆序数就等于此排列中所有元素的逆序数的总和.

将排列中任意两个元素对调, 称为对排列进行一次对换.

【注】 对排列进行一次对换, 排列改变奇偶性.

⇨ 2. n 阶行列式

n 阶行列式是行列式中所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和, 各项的符号是: 将这一项中 n 个元素的行标按标准次序排列, 对应的列标的排列若是偶排列则取正号; 若是奇排列则取负号.

【注】 二阶、三阶行列式可按对角线法则进行计算, 但四阶以上行列式, 对角线法则不再成立.

n 阶行列式具有下述性质:

(1) 行列式与它的转置行列式相等. 即对任何行列式 D , 有 $D^T = D$.

(2) 互换行列式的两行(列), 行列式变号. 如, 交换 i, j 两行记做 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记做 $c_i \leftrightarrow c_j$.

(3) 行列式中某行(列)公因子, 可以提到行列式符号外面. 如, 第 i 行(或列)提出公因子 k , 记做 $r_i \div k$ (或 $c_i \div k$).

(4) 行列式中若有两行(列)元素成比例, 则此行列式等于 0.

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

【注】 利用行列式性质,将行列式转化为三角行列式,是计算行列式的重要方法之一.

行列式等于它的任何一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j$$

如果线性方程组

[illegible]

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则此方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式.

由 Cramer 法则可得方程组的下述性质.

(1) 如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组一定有解, 且解是惟一的.

(2) 如果线性方程组无解或有两个不同的解, 则它的系数行列式必为零.

(3) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$, 则齐次线性方程组没有非零解.

(4) 如果齐次线性方程组有非零解, 则它的系数行列式必为零.



(二) 难 点

⇨ 1. 排列的对换及奇偶性

对排列进行一次对换, 排列改变奇偶性, 从而奇排列调成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

• n 阶行列式中, 项 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 前的符号为 $(-1)^t$, 其中 t 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

• n 阶行列式中, 项 $a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$ 前的符号为 $(-1)^{t_1+t_2}$, 其中 t_1, t_2 分别是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 和排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

⇨ 2. 行列式的计算

4 阶以上的行列式, 用定义计算非常复杂, 通常都采用以下几种方法计算.

(1) 利用行列式性质转化成三角行列式.

主要注意性质 6 的应用, 即把某行(列)的 k 倍加到另一行(列)对应元素, 行列式不变, $r_i + kr_j$ 是把第 j 行元素的 k 倍加到第 i 行. 但 $kr_i + r_j$ 是指把第 i 行元素乘以数 k , 再加上第 j 行, 这时行列式将改变.

(2) 降阶法

若行列式某行(列)仅有一个或两个非零元素时, 则按此行(列)展开, 可化为低一阶的行列式.

• 降阶法中, 经常通过建立行列式 D_n 与低阶行列式间的递推关系来计算行列式的值.

【注】行列式的计算中,要注意一些特殊行列式所采用的特殊技巧.

⇒ 3. Cramer 法则

应用 Cramer 法则建立方程组解和方程组系数行列式间的关系.



(三) 考 点

⇒ 1. 排列及其逆序数、对换

- 求排列的逆序数和排列的奇偶性
- 确定行列式中某一项的符号

⇒ 2. 计算行列式

- 利用行列式性质化简行列式
- 求解行列式中含有变量形式的方程
- 用降阶法、递推公式法计算行列式
- 利用行列式中元素的代数余子式的关系计算行列式

⇒ 3. Cramer 法则

- 利用 Cramer 法则求方程组的解
- 讨论方程组解和系数行列式间的关系



三 全程典型例题精析



(一) 求排列的逆序数, 确定行列式中项的符号

【例 1-1】排列 $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$ 的逆序数为_____.

【解】 $t = 0 + 0 + 0 + \cdots + n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$,

故应填: $\frac{n(n+1)}{2}$.

【例 1-2】在五阶行列式中, 项 $a_{31} a_{53} a_{12} a_{45} a_{24}$ 的符号取_____.

【解法一】将 $a_{31} a_{53} a_{12} a_{45} a_{24}$ 写成 $a_{12} a_{24} a_{31} a_{45} a_{53}$, 对应列标的排列 24153 为偶排列, 故符号取正号.

【解法二】行标排列 35142 的逆序数为 6, 列标排列 13254 的逆序数为 2,

$6+2$ 为偶数,故符号取正号.

【例 1-3】 若 $a_{13} a_{3k} a_{52} a_{4l} a_{24}$ 是五阶行列式中的一项,则当 $k = \underline{\hspace{1cm}}$, $l = \underline{\hspace{1cm}}$ 时,该项符号为负号.

【解】 将 $a_{13} a_{3k} a_{52} a_{4l} a_{24}$ 改写成 $a_{13} a_{24} a_{3k} a_{4l} a_{52}$, 问题变为确定 k, l 使排列 $34kl2$ 为奇排列. 由于 34152 是奇排列, 34512 是偶排列, 故取 $k = \underline{1}$, $l = \underline{5}$.

【注】 也可以先求行标 13542 为偶排列, 将问题变成确定 k, l 使排列 $3k2l4$ 为奇排列.

【题型解法小结】 求排列的逆序数总是转化成求元素的逆序数. 自然数的排列中, 元素的逆序数就等于位于该元素前而且比该元素大的元素的个数. 行列式中, 求某项前面的符号的问题总是转换成求排列的逆序数来解决.



(二) 行列式的计算

【例 1-4】(1997(四)3 分) n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解题思路】 这是一类典型的行列式问题, 特点是对角线元素全相同, 非对角线元素全相同. 只要把第 2 行(列) 至最后一行(列) 都加到第 1 行(列), 然后提出第 1 行(列) 的公因子, 然后再让其他各行(列) 都减去第 1 行(列) 的若干倍就可化成三角行列式.

【解】

$$\text{原式} \xrightarrow[r_1 \div (n-1)]{r_1 + r_i (i=2, \cdots, n)} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_i - r_1}{i = 2, \dots, n} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

故填“ $(-1)^{n-1}(n-1)$ ”.

【例 1.5】(2001(四)3 分) 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

则第四行各元素余子式之和的值为_____.

$$\text{【解法一】 } M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -56 + 0 + 42 - 14 = -28. \text{ 故填“-28”.}$$

$$\text{【解法二】 } M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} =$$

$$-A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.$$

【解题技巧】 解法二应用了行列式按行展开的逆运算,这在计算与代数余子式相关的行列式中是比较有效的方法之一.

【例 1.6】 设五阶行列式 $D = m$,依下列次序变换:先转置再将第 4 列与第 2 列互换,将第 1 列的公因子 2 提出,再用 3 乘所有元素,用 (-2) 乘第 1 行加到第 5 行,变换后的行列式等于_____.

【解题思路】 每一次变换相当于对行列式用一次行列式性质,只要把每次变换结果合到一起即可.

【解】 转置后行列式不变,仍为 m ;互换两列位置值变为 $(-m)$;提出公因子 2 行列式变为 $-\frac{m}{2}$;再用 3 乘所有元素,相当于 $1 \sim 5$ 行都乘常数 3,其值变为

$-\frac{3^5 m}{2}$;最后用 (-2) 乘第1行加到第5行行列式不变,故填“ $-\frac{3^5 m}{2}$ ”.

【例 1-7】(1996(一)3 分) 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

的值等于

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$.

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$.

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$.

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$.

【 】

【解题思路】 四阶行列式若按定义计算容易丢项,应根据行列式性质转化成特殊行列式,由于此行列式有较多零元素,按降阶法计算也是比较有效的方法之一.

【解法一】

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \leftrightarrow c_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}]{\substack{c_2 \leftrightarrow c_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3), \text{故应选(D).}$$

【解法二】 按第1列展开,降阶计算:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - \\ &b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3). \end{aligned}$$

【解题技巧】 选择题常可选特殊值法.如令 $b_1 = b_4 = 0$,可得原式 $= a_1 a_4(a_2 a_3 - b_2 b_3)$.经比较,选项(A),(B),(C)全错,只有(D)正确.

【例 1-8】 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ x & 1 & -x & x \\ -3 & 2 & 1 & 2x \\ 1 & -2 & 4 & -x \end{vmatrix}$ 为_____次多项式,常数项为_____.

【解题思路】 包含变量 x 的行列式一定是变量 x 的多项式, 计算出行列式便可求出行列式对应的多项式, 但对具体问题可由行列式展开法得到解决.

【解】 按第一列展开, 可见该行列式是二次多项式. 为求常数项, 第 1 行只能取 -1 , 而第 2 行只能取 1 , 所以常数项为

$$(-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

故应填为“二”次多项式, 常数项为“13”.

【解题技巧】 由多项式的性质, 常数项就是 $x = 0$ 时的行列式值, 同样可得常数项为 13.

【例 1-9】 设 $P(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -x & x & x \\ 3 & x & -x & 1 \\ x & -3 & 3x & 4 \end{vmatrix}$, 则 x^4 项的系数为_____.

【解】 求 x^4 项的系数, 行列式中第 1 行只能取元素 $2x$ (相当于 a_{11}), 第 4 列只能取元素 x (a_{24}), 从而第 4 行只能取元素 $3x$ (a_{43}), 第 3 行就只能取元素 x (a_{32}) 了. 而对于项 $a_{11} a_{24} a_{32} a_{43}$, 由于 1423 是偶排列, 故应取正号, 从而 x^4 项为:

$$2x \cdot x \cdot 3x \cdot x = 6x^4,$$

故应填“6”.

【例 1-10】(1999(二)3 分) 记行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. 【 】

【解】 $f(x) \xrightarrow[i=2,3,4]{c_i - c_1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4 + c_2}$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = 5x(x-1),$$

由此可见, $f(x) = 0$ 的根有 2 个, 故选(B).

【例 1-11】 若 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M \neq 0$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2a_{11} & -a_{12} & 3a_{11} - a_{13} \\ 2a_{21} & -a_{22} & 3a_{21} - a_{23} \\ 2a_{31} & -a_{32} & 3a_{31} - a_{33} \end{vmatrix}, \text{ 则 } D_1 =$$

(A) $6M$. (B) $-6M$. (C) $-2M$. (D) $2M$. 【 】

【解题思路】 这里就是将行列式 D_1 化简成与行列式 D 相同形式的行列式, 其方法就是应用行列式的性质, 考查对行列式性质的灵活运用.

【解法一】 首先将 D_1 按第 3 列分成两个行列式:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2a_{11} & -a_{12} & 3a_{11} \\ 2a_{21} & -a_{22} & 3a_{21} \\ 2a_{31} & -a_{32} & 3a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 2a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 2a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1)M = 2M.$$

【解法二】 $D_1 \xrightarrow{c_3 - \frac{3}{2}c_1} \begin{vmatrix} 2a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 2a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 2a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-1)M = 2M$. 故选(D).

【例 1-12】 证明: 在 n 阶行列式中等于零的元素的个数, 如果比 $n^2 - n$ 多, 则此行列式必等于零.

【解题思路】 按定义, 行列式是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和, 这些项共有 $n!$ 项, 在没有其他条件下, 若使行列式等于零, 必须每一项都等于零, 就是任意取自不同行不同列的 n 个元素乘积都为零.

【解】 由于 n 阶行列式中共有 n^2 个元素, 故由题可知, 行列式中非零元素个数少于 $n^2 - (n^2 - n) = n$. 也就是说, 任意 n 个元素乘积必为零, 故行列式等于零.

【例 1-13】 已知 1443, 1469, 2730, 4173 都能被 13 整除, 不计算结果, 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \text{ 可被 13 整除.}$$