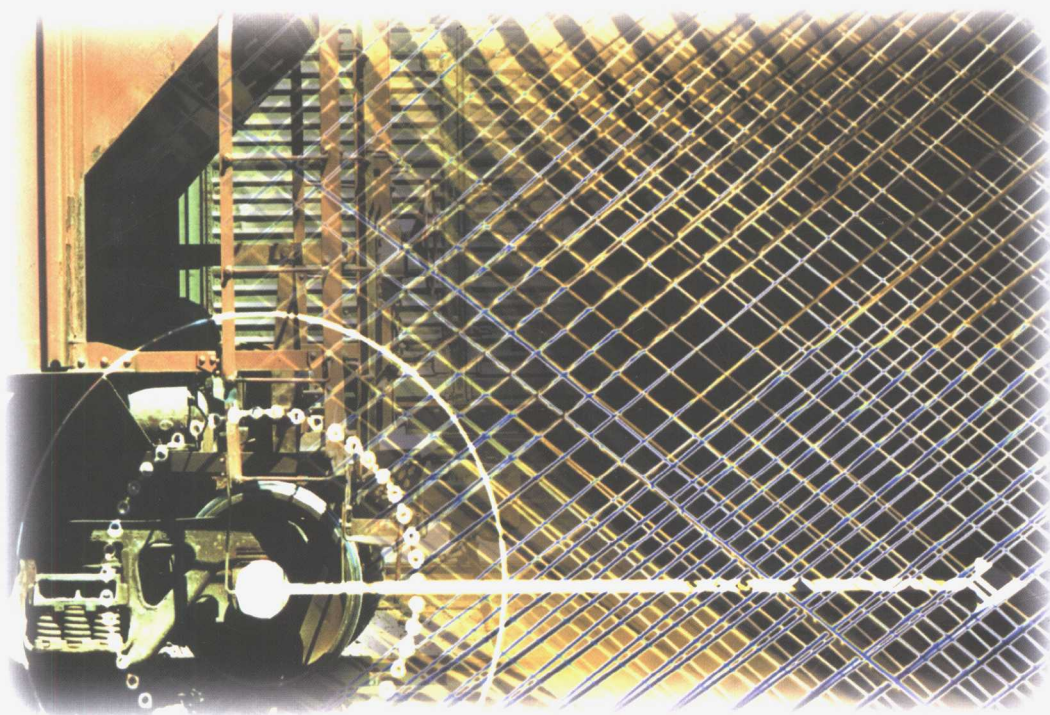




机械科学与工程研究生系列教材

现代机械强度 理论及应用

王德俊 何雪泓 编著



 科学出版社
www.sciencep.com

机械科学与工程研究生系列教材

现代机械强度理论及应用

王德俊 何雪滢 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要介绍了现代机械强度基础理论及其实际应用,其内容包括:现代机械强度的基本概念及其与传统机械强度的区别,应力-应变分析的基本理论和方法,含裂纹体的强度理论,疲劳理论和疲劳寿命估算等问题。本书将目前机械强度主要涉及的弹性理论、塑性理论、断裂理论和疲劳理论以及应用实例有机地融为一体,系统全面地介绍了机械强度理论。

本书可作为机械工程领域中机械设计,机械设备管理、维修等专业研究生教材,亦可供从事相关专业教学、科研的工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代机械强度理论及应用/王德俊,何雪焘编著. —北京:科学出版社, 2003

(机械科学与工程研究生系列教材)

ISBN 7-03-011655-0

I. 现… II. ①王… ②何… III. 机械-强度-研究生-教材
IV. TH114

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 048126 号

责任编辑:段博原/文案编辑:邱璐 贾瑞娜/责任校对:柏连海

责任印制:刘秀平/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年9月第一版 开本:BS(720×1000)

2003年9月第一次印刷 印张:12 3/4

印数:1—2 000 字数:243 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

机械强度是机械工程中一门重要的应用基础学科,是保证现代机械设计在实现其功能的前提下达到高质量、高水平、高可靠性的基础,是现代机械工程技术工作者必须掌握的基础知识。严格地说,强度问题包括狭义强度和广义强度两种含义,狭义强度主要研究各种断裂和变形过大问题,而广义强度则包含强度、刚度和稳定性,有时还包括机械振动问题。本教材主要介绍狭义强度的内容。

本书的内容考虑了机械学科硕士研究生课程的总体设置和安排。全书共分6章,第1章介绍了现代机械强度的基本概念及其与传统机械强度理论的区别;第2~4章着重介绍应力-应变分析的一些基本理论与方法,这些内容是机械强度的基础理论;第5章介绍含裂纹体的强度理论;第6章讨论疲劳理论和疲劳寿命估算问题。每一章的内容,都是从基本概念入手,然后引入机械强度理论和计算方法。为了更好地引导读者掌握本书的主要内容,针对其中的重点和难点,我们精心选编了例题和习题。这样,通过本书的学习,不仅能够掌握扎实的机械强度基础知识,还能学会如何应用这些基本理论和方法去解决工程中的问题,达到学以致用目的。

本教材在编写、出版过程中得到了东北大学研究生院和机械工程与自动化学院领导的大力支持,并得到东北大学研究生院教材资助项目和机械学院的出版资助,在此表示诚挚的谢意。

本教材是我们多年科研实践及教学经验的积累,虽经过不断修改完善,其疏漏之处在所难免。诚望广大读者及同行对本书的不足之处提出宝贵意见,使本书更臻完善。

编 者

2003.4 于东北大学

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 学习机械强度的目的和意义	1
1.2 机械强度研究的内容	1
1.2.1 材料强度	1
1.2.2 结构强度	2
1.3 常规机械强度理论	3
1.4 现代机械强度理论	4
习题	5
第 2 章 弹性平面问题基本方程	6
2.1 弹性力学的基本假设	6
2.2 平面应力概念及方程	7
2.2.1 平面应力问题的基本概念	7
2.2.2 平衡方程	8
2.2.3 几何方程	9
2.2.4 物理方程	11
2.2.5 边界条件——圣维南原理	12
2.2.6 变形协调方程	14
2.3 平面应变概念及解法	15
习题	17
第 3 章 弹性应力-应变状态下强度理论	18
3.1 应力状态分析	18
3.1.1 任意平面上的应力	18
3.1.2 主应力、主平面及应力不变量	20
3.1.3 最大剪应力及最大剪应力平面	22
3.1.4 八面体应力	24
3.2 应变状态分析	26
3.3 弹性的应力-应变关系	30
3.3.1 广义胡克定律	30
3.3.2 应力张量及应变张量、应力偏量及应变偏量	32

3.3.3 体积的弹性变化规律及形状的弹性变化规律	34
3.4 应变能	35
3.5 机械强度理论	37
3.5.1 最大剪应力理论	38
3.5.2 形变能理论	41
习题	44
第4章 弹塑性应力-应变关系及屈服准则	46
4.1 弹塑性应力-应变关系的特点及几种理想模型	46
4.2 增量理论	49
4.2.1 弹性应变增量与塑性应变增量	50
4.2.2 增量理论的基本假定	53
4.2.3 塑性应力-应变关系方程	53
4.2.4 本构方程	54
4.2.5 讨论	56
4.3 全量理论——弹塑性小变形理论	57
4.3.1 本构方程	58
4.3.2 适用条件	60
4.4 两个常用的屈服准则	63
4.4.1 Tresca 屈服准则	63
4.4.2 Mises 屈服准则	66
4.4.3 Tresca 和 Mises 屈服准则的比较	69
4.5 圆轴的弹塑性扭转问题	71
4.5.1 弹性扭转分析	71
4.5.2 弹塑性扭转分析	72
4.6 梁的弹塑性弯曲问题	75
习题	79
第5章 含裂纹体的强度理论	80
5.1 裂纹的基本类型	81
5.2 裂纹尖端附近的应力场和位移场	82
5.2.1 张开型裂纹尖端附近的应力和位移	82
5.2.2 滑开型裂纹尖端附近的应力和位移	84
5.2.3 撕开型裂纹尖端附近的应力和位移	85
5.3 应力强度因子及其求法	86
5.3.1 应力强度因子及其一般表达式	86
5.3.2 应力强度因子的求法和叠加原理	87

5.3.3 几种常用的应力强度因子公式	89
5.4 脆性断裂的 K 准则	92
5.4.1 应变能释放率与 G 准则	93
5.4.2 应力强度因子与应变能释放率之间的关系	95
5.4.3 脆性断裂的 K 准则	96
5.4.4 K 准则的工程应用	97
5.4.5 复合型断裂准则	100
5.5 线弹性断裂力学在小范围屈服中的推广	106
5.5.1 等效模型概念	107
5.5.2 塑性区的形状和尺寸	108
5.5.3 应力松弛的修正	110
5.5.4 等效裂纹长度及应力强度因子的修正	111
5.6 弹塑性断裂力学	113
5.6.1 塑性区条形简化模型	114
5.6.2 裂纹张开位移 COD 准则	116
5.6.3 J 积分准则	120
5.7 疲劳裂纹扩展速率	123
5.7.1 疲劳裂纹扩展速率的概念	124
5.7.2 疲劳裂纹扩展速率的经验公式	124
5.7.3 影响裂纹扩展速度的因素	126
5.7.4 裂纹扩展分析实例	130
习题	132
第 6 章 零构件的疲劳寿命估算	134
6.1 疲劳破坏与疲劳分析	134
6.1.1 疲劳破坏的特点	134
6.1.2 疲劳破坏过程	135
6.1.3 疲劳分析的一般方法	136
6.2 疲劳载荷谱的编制	137
6.2.1 疲劳载荷及其分类	137
6.2.2 随机疲劳载荷的处理	138
6.2.3 累积频数曲线	141
6.2.4 疲劳载荷谱的编制方法	143
6.3 循环载荷下金属材料的特性	145
6.3.1 金属材料的拉伸特性	145
6.3.2 材料的强度-寿命曲线	147

6.3.3	材料的循环硬化和循环软化	151
6.3.4	循环应力-应变曲线	153
6.3.5	材料的记忆特性	155
6.3.6	玛辛效应	155
6.3.7	载荷顺序的影响	155
6.3.8	影响材料疲劳特性的因素	156
6.4	疲劳裂纹形成寿命估算	170
6.4.1	疲劳寿命估算方法概述	170
6.4.2	缺口处局部应力应变的确定	171
6.4.3	损伤计算	178
6.4.4	疲劳累积损伤理论	179
6.4.5	裂纹形成寿命估算步骤	181
6.4.6	计算实例	181
6.5	疲劳裂纹扩展寿命估算	186
6.5.1	基本方法	186
6.5.2	初始和临界裂纹尺寸的确定	188
6.5.3	计算实例	189
	习题	192
	参考文献	193

第 1 章 绪 论

1.1 学习机械强度的目的和意义

机械强度是机械工程中一门重要的应用基础学科。它是以机械学和力学为基础,将光学、电学、磁学、声学等现代测试手段与计算机信息处理及图像处理等高新技术相结合的高度综合的工程技术学科。

现代机械所受的工况、载荷及环境条件越来越苛刻,所遇到的机械强度问题也越来越复杂。在制造和使用过程中,机械零构件中经常存在着微观缺陷和微裂纹,在研究其裂纹的产生、成长及破坏机制时,除了需要固体力学、计算力学、实验力学知识外,还需要细观力学、损伤力学、断裂力学的知识来进行分析研究。为确定机械零构件的使用寿命以及延寿和安全评估等问题,还必须具有随机理论、疲劳强度、统计分析及可靠性方面的知识。因此,在研究现代机械强度问题时,需要多种学科知识的综合应用。

机械强度理论具有基础学科和应用学科的双重性,应用范围非常广泛,如机械设计中的常规应力-应变分析、局部应力-应变分析、失效分析、故障诊断、安全监测、寿命评估以及结构的完整性分析等。

研究机械强度的最终目的是为了保证和提高机械产品的质量,消除机械产品使用中潜在的隐患,达到安全可靠、经济合理的要求。因此,机械强度科学研究是现代化机械设计达到高质量、高水平所不可缺少的基础和条件,是从事机械工程的科技人员必须具备的基础知识。

1.2 机械强度研究的内容

机械设计的基本要求之一就是满足强度要求,机械强度包括材料强度和结构强度两个方面的内容。所谓强度,是指材料、机械零件和构件抵抗外力而不失效的能力。狭义的强度是研究各种断裂和塑性变形过大的问题;广义的强度则包括了强度、刚度和稳定性,有时还包括机械振动问题。

1.2.1 材料强度

材料强度是指在不同的影响因素下,材料的各种力学性能指标。影响材料强度的因素包括材料的化学成分、加工工艺、热处理制度、应力状态、载荷性质、加载

速率、温度和介质等。

在研究材料强度问题时,根据材料性质、载荷性质和环境强度等的不同,可以做不同的分类。

按材料性质的不同,可分为脆性材料强度、塑性材料强度和带裂纹材料强度。脆性材料强度研究的是脆性材料的强度问题。如铸铁等脆性材料,受载后几乎没有塑性变形就突然断裂。这种脆性材料的强度计算以强度极限 σ_b 为标准。塑性材料强度研究塑性材料的强度问题。如软钢等塑性材料,在断裂前有较大的塑性变形,卸载后不消失,又称残余变形。塑性材料的强度计算以屈服极限 σ_s 为标准。对于没有屈服现象的塑性材料,取与 0.2% 的塑性变形相对应的应力作为名义屈服极限,用 $\sigma_{0.2}$ 表示,以此为强度计算的标准。带裂纹材料的强度是研究含裂纹体材料的强度问题,由断裂力学中的 K_c 、 K_{Ic} 、 δ_c 或 J_c 作为强度计算的标准。

按载荷性质的不同,材料强度又分为静强度、冲击强度和疲劳强度。静强度指材料在静载荷下的强度,根据材料性质的不同,分别以屈服极限 σ_s 或强度极限 σ_b 作为强度计算的标准。冲击强度指材料在冲击载荷下的强度,是金属材料抵抗冲击破坏的能力。冲击载荷在零件中产生的冲击应力除与零件的形状、体积和局部弹塑性变形等有关外,还同与其连接的物体有关。因此,冲击载荷作用下的强度计算比静载荷下的强度计算要复杂得多。一般情况下,在引入动载系数后,按静强度情况进行计算。结构钢的强度极限和屈服极限随冲击速度的增大而提高。疲劳强度指材料在循环载荷作用下的强度。在循环载荷作用下,材料产生疲劳失效,通常以材料的疲劳极限 σ_r 作为强度计算的标准。

按环境条件的不同,材料强度又分为高温强度、低温强度、腐蚀强度,等等。

1.2.2 结构强度

结构强度是指机械零件和构件的强度,它涉及力学模型的简化、应力分析方法、材料强度、强度准则、寿命估算以及安全系数等问题。

在进行结构强度计算时,需要根据零件和构件的不同形状,将其简化为杆、杆系、板、壳、块和无限大物体等力学模型,不同的力学模型有不同的强度计算方法。

通常杆是指零构件横截面的两个方向尺寸远小于长度方向尺寸的物体。板和壳的特点是厚度远小于另外两个方向的尺寸,平的称为板,曲的称为壳。

杆的强度问题,一般由材料力学来研究和计算。杆系(桁架、刚架等)强度问题由结构力学来分析其内力和变形。其他形状物体的强度皆由弹塑性力学来处理 and 解决。

循环载荷下零构件的强度问题,既与材料强度有关,又与零构件的尺寸大小、应力集中系数和表面状态等因素有关。

1.3 常规机械强度理论

随着科学技术的不断发展和进步,人们对机械强度的认识也在不断深入。

人们最早认识到对机械零构件起破坏作用的外在因素是外载荷,后来又提出了应力的概念。早期对强度的认识是材料抵抗破坏的能力仅取决于材料本身的力学性质,并且只限于静强度破坏这一现象,相应地发展了静载荷作用下的材料强度理论、屈服极限研究、弹塑性应力分析等,从而得出了材料力学、弹性力学、塑性力学等一系列学科理论知识,形成了传统的也称为常规的强度理论体系。

与现代强度理论比较而言,常规机械强度理论具有两个明显的特点:一是假设制造机械零构件的材料性能是均匀的、各向同性的、连续的实体;二是承受静载荷作用。

常规机械强度设计的计算步骤是:由理论力学确定零构件所受外力,材料力学(有时采用弹性力学或塑性力学)计算其内力,再由机械原理和机械零件确定其结构尺寸和形状,最后计算该零构件的工作应力或安全系数。

一般以公式表示,即零件计算工作应力为

$$\sigma \leq [\sigma] \quad (1-1)$$

或零件计算安全系数

$$n \geq [n] \quad (1-2)$$

式中, $[\sigma]$ 、 $[n]$ 分别称为许用应力、许用安全系数。满足式(1-1)和式(1-2),则构件是安全的;反之,则不安全。

对于塑性材料

$$[\sigma] = \sigma_s / [n]_s \quad (1-3)$$

式中, $[n]_s$ 为以屈服极限为基准的许用安全系数。

对于脆性材料

$$[\sigma] = \sigma_b / [n]_b \quad (1-4)$$

式中, $[n]_b$ 为以强度极限为基准的许用安全系数。

安全系数 n 是考虑到实际结构中可能存在的缺陷和其他意想不到的或难以控制的因素(如计算方法的不准确性、载荷估计的不准确性等),用来保证所设计的机械零构件有足够的强度安全储备量,保证在最大工作载荷下,其工作应力不超过制造零构件材料的极限应力。

对于轴类零件,要求挠度不能过大,即刚度计算应满足

$$f \leq [f] \quad (1-5)$$

式中, f 为零件的计算挠度, $[f]$ 为许用挠度。对于轴, $[f] = (0.0001 \sim 0.0005)L$, L 为轴的跨度。

对于受轴向载荷的柱、杆等零构件, 要求工作满足稳定性, 即

$$n_{sw} = [n]_{sw} \quad (1-6)$$

式中, n_{sw} 为零件的弹性失稳安全系数, $[n]_{sw}$ 为许用失稳安全系数。

通常机械零构件的安全系数为 $n > 1.0$, 目前一般取 $[n] = 1.0 \sim 10$ 。

在确定安全系数时, 一般遵循如下原则: 对重要零构件, $[n]$ 取大值; 对非重要零构件, $[n]$ 取小值, 但必须满足 $n > 1.0$ 的要求。

传统的常规强度设计方法, 虽然不适用于含裂纹和缺陷材料及复合材料等制造的零构件, 也不适用于循环随机载荷作用下的零构件, 但由于其经过长期的发展已形成一套较为完整的体系, 比较实用、简便, 因而到现在仍然是一种应用广泛的工程计算方法, 也是现代机械强度设计计算的基础。

1.4 现代机械强度理论

工程中绝大多数机械是在动载荷作用下工作的, 疲劳破坏普遍存在于各种机械之中。

19 世纪 40 年代, 人们从大量火车轴断裂事故中, 了解到在交变应力作用下的疲劳破坏现象。德国工程师 Wöhler 通过大量试验研究, 奠定了疲劳研究的基础, 开创了疲劳强度研究的新纪元。现代的机械零构件的强度计算都是根据疲劳强度理论进行的。疲劳强度理论已经成为现代机械强度理论的主要内容, 成为每个机械设计人员必须掌握的基础知识。

20 世纪 20 年代, 动力机械开始应用于高压、高温蒸气等恶劣环境中, 材料蠕变成为这些机械零构件的主要破坏形式。从此, 蠕变以及蠕变与疲劳的交互作用成了强度问题中的一个重要研究领域。

随着对疲劳和蠕变研究的深入, 人们又发现零件抵抗破坏的能力和寿命有密切关系。因此, 强度问题又直接与寿命的概念连接在一起。故一般情况下的强度计算也包括了寿命计算。

在工程实践中, 寿命计算结果分散性很大。这是因为, 表征材料强度的参数都是由试验确定的, 如强度极限、疲劳极限、表面状况、尺寸大小等都具有离散性, 数值是一个范围, 故计算结果误差必然很大。为了在强度和寿命计算中反映出这一特性, 人们又引入了疲劳强度和寿命的可靠性概念, 即出现了疲劳强度可靠性和疲劳寿命可靠性的学科分支。

随着疲劳强度研究的深入,人们发现零件应力分布不均匀对疲劳强度影响很大,因此在应力-应变分析领域内发展起来局部应力-应变的研究分支。这方面的研究继续在接触应力和零件几何形状不连续处的应力-应变集中两个方向上深入和发展。

20世纪40年代,尤其是第二次世界大战中,飞机零构件的脆性断裂事故不断发生,导致了断裂力学这门新学科的建立。目前,断裂力学在零构件的脆性断裂和疲劳裂纹形成与扩展寿命方面有着广泛的应用。

由于现代的机械零构件工作环境越来越恶劣,如高温、高压、腐蚀环境,工作载荷大,变化频繁,且多数是随机载荷,制造零构件的材料也由过去的钢铁发展到高强度钢、超高强度钢、复合材料、陶瓷材料及非金属聚合物等材料,因此常规强度设计的理论和方法已远远不能满足现代机械使用的材料、工作条件及环境的要求,必须加以改进、发展和完善,故而形成了现代机械强度的设计理论和方法。

现代机械强度理论除了仍然要用到弹塑性理论之外,还需要应用疲劳和断裂理论,同时需要利用现代测试技术手段及计算机技术对机械结构进行综合分析 with 计算,最终给出科学的强度设计计算指标,以满足工程的要求。

习 题

1. 试述研究机械强度理论的目的和意义。
2. 材料强度分为哪些不同的种类?
3. 常规机械强度理论和现代机械强度理论的研究方法和内容有何不同?

第 2 章 弹性平面问题基本方程

任何一个弹性体都是空间物体,一般的外力都是空间力系。此时应力和应变都是三个坐标的函数,是空间问题。但在工程实际中,有些问题往往可以简化为平面问题,即应力与应变只是两个坐标的函数,而与第三个坐标无关,这就是平面问题。弹性力学中的平面问题包括平面应力问题和平面应变问题两类。本章从弹性力学的基本假设出发,主要讨论平面应力问题。而平面应变问题,其基本方程与解法同平面应力问题基本相同,只要对材料常数项稍加修正即可。

2.1 弹性力学的基本假设

弹性力学是研究弹性体在外部因素(外力、温度等)作用下而产生的应力和应变以及与应变有关的位移的一门学科。

弹性力学研究的是理想弹性体,以下列基本假设为根据:

(1) 假设物体是连续的

物体内部由组成该物质的介质所填满,没有任何空隙。因此,物体中的应力、应变和位移是连续的,可用坐标的连续函数表示。实际上,一切物体均由分子所组成,而分子间存在着一定的距离,然而分子的大小和分子间的距离与实际物体的尺寸相比极其微小,因此从宏观来看,这一假设是允许的,并且与实际结果相符。

(2) 假设物体是均匀和各向同性的

物体内部的所有点和所有方向上有相同的物理性质。因此,物体的弹性常数将不随位置坐标和方向的变化而变化。对一般金属材料而言,这个假设基本上是符合实际的。虽然金属材料本身由各向异性的晶体构成,由于晶体很小且排列不规则,从材料的宏观性质看,大致是均质和各向同性的。当然,也有很多材料,如木材、部分复合材料等不具备这一性质。

(3) 假设物体是完全弹性的

物体在除去造成变形的外加因素(如外力、温度变化等)后,能够完全恢复原状而没有任何剩余变形。物体服从胡克定律,即应变与引起该应变的应力成正比,反映这一比例关系的常数,即为弹性常数。对于脆性材料,在应力未超过比例极限之前,而对大多数韧性材料,在应力未超过屈服极限之前,可以认为是近似的弹性体。这个假定,使得物体在任意瞬时的应变将完全取决于该瞬时物体所受到的外力或温度变化等因素,而与加载的历史和加载顺序无关。

(4) 假设物体内无初应力

物体在未受外加的载荷或温度变化等作用之前,内部无初应力,即物体处于自然状态。

(5) 假设物体的位移和变形很小

在外加因素的作用下,物体产生的变形以及位移,与物体原有尺寸相比是很微小的。这样,在研究物体受力变形后的平衡状态时,可以不考虑物体尺寸的变化,而仍然沿用变形前的尺寸。并且在研究物体变形时,可以略去变形的二次幂。这样就使得弹性力学中的基本微分方程成为线性的。

根据上述基本假设而建立的弹性力学,又称为线弹性力学。

2.2 平面应力概念及方程

2.2.1 平面应力问题的基本概念

图2-1所示等厚度薄板,沿 z 方向尺寸 t 很小,可假设表面力只作用于板边上,且平行于板面(xy 平面),不随厚度变化;假设体力也平行板面,不随厚度变化。

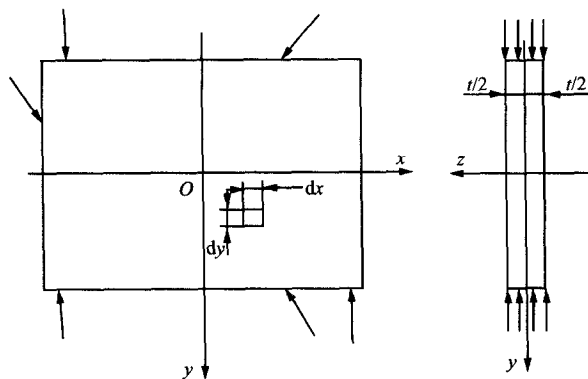


图 2-1 平面应力问题

在此情况下,可以假设,在全板内, $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$,且 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 与 z 无关,只是坐标 x 、 y 的函数。符合这种假设的应力状态,称为平面应力状态。

可以设想,板越薄,上述假设越准确。由板面的边界条件可知

$$(\sigma_z)_{z=\pm t/2} = (\tau_{zx})_{z=\pm t/2} = (\tau_{zy})_{z=\pm t/2} = 0$$

由于应力沿厚度方向是连续分布的,因此当 t 很小时,板内各点受力也可认为和表面相同,即

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

需要指出的是,在平面应力状态下,虽有 $\sigma_z = 0$,应变 ϵ_z 并不为 0,根据广义胡克定律,有

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2-1)$$

2.2.2 平衡方程

从图 2-2 所示的受力薄板中取一小微分体,其体力分量为 X 、 Y ,边长为 dx 、 dy ,厚度取为一个单位长度,即 $dz = 1$ 。

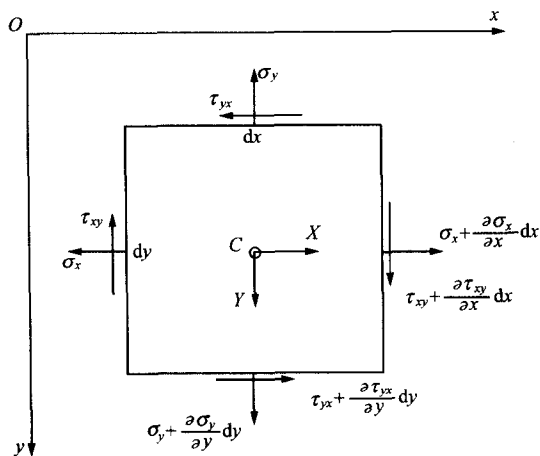


图 2-2 平面应力状态微分体的应力

物体受力时,其各点应力必然是坐标的连续函数。因此,若微分体左面应力为 σ_x 、 τ_{xy} ,经过微小距离 dx 后,按泰勒级数展开法,微分体右面的应力将为

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots$$

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots$$

略去二阶微量以后各项,右面的应力分别为

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

同理,可得微分体上下两面的应力如图 2-2 所示。

在静力平衡条件下,各应力分量必然满足平衡条件的要求。

由 $\sum F_x = 0$, 可得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy \times 1 - \sigma_x dy \times 1 + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \times 1 - \tau_{yx} dx \times 1 + X dx dy \times 1 = 0$$

简化后,得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \quad (2-2a)$$

同理,由 $\sum F_y = 0$, 可得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \quad (2-2b)$$

式(2-2a)、式(2-2b)即为平面应力问题的平衡微分方程。

根据剪应力互等定理,可知 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 因此,在两个平衡方程中,未知函数有三个: σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 故为超静定问题。为进一步求解,必须补充几何及物理方程。

2.2.3 几何方程

物体变形后,必须满足的基本几何条件是:位移函数 u 、 v 是位置坐标的连续函数。而要保证 u 、 v 是连续函数,各点的应变分量就不能是任意的。这种位移和应变的关系式即为几何方程。

如图 2-3, 设 PA 、 PB 为小微分体的二邻边, $PA = dx$, $PB = dy$ 。设 P 点位移为 u 、 v , 由于 u 、 v 为位置坐标的连续函数, 可得 A 、 B 点的位移如下

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (A \text{ 点位移})$$

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (B \text{ 点位移})$$

变形后, PA 、 PB 变为 $P'A'$ 、 $P'B'$ 。

设所研究的变形情况为“小变形”, 即: ① PA 、 PB 的正应变极小, 即 ϵ_x 、 $\epsilon_y \ll 1$; ② PA 、 PB 间的偏转角极小, 即 $\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$ 。在小变形条件下, 推导应变关系式