大学生数学竞赛试题
研究生入学考试难题
解析选编

李心灿　季文铎　余仁胜
孙洪祥　邵鸿飞　张后扬　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学生数学竞赛试题
研究生入学考试难题
解析选编

李心灿　季文铎　余仁胜
孙洪祥　邵鸿飞　张后扬　编

机械工业出版社

本书共有两部分内容.

第一部分，汇集了北京市大学生（非数学专业）第一届至第十五届数学竞赛的全部试题及分析和解答；选编了我国自改革开放以来，部分省市及高校的大学生数学竞赛试题，并对其中的大部分试题给出了分析及参考解答；选编了国外一些大学生数学竞赛的试题及分析和解答.

第二部分，选编了近15年来，全国工学、经济学硕士研究生入学统考的数学试题中高等数学的难题精选解析.

本书既是一本大学生和数学爱好者提高数学素质（特别是解题能力）、参加数学竞赛或备考研究生的有益读物，也是一本颇具特色的数学教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

大学生数学竞赛试题研究生入学考试难题解析选编/李心灿等编．—北京：机械工业出版社，2005.3

ISBN 7-111-16000-2

Ⅰ.大… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学－高等学校－解题 Ⅳ.013－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第002471号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
责任编辑：郑 玫 版式设计：张世琴 责任校对：李秋荣
封面设计：饶 薇 责任印制：杨 曦
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2005年4月第1版第1次印刷
1000mm×1400mm B5·16.875印张·2插页·655千字
定价：45.00元

希望有更多青年
熱爱数学認真学好数
学认真用好数學
乙卯冬 王元

前排自右向左（从第二人开始）：季文铎教授，殷尉萍教授，王万良教授，刘春生处长，李忠教授，王元院士，李心灿教授，郭柏灵院士，卢才辉教授，刘来福教授。

主席台上自右向左：刘来福教授，郭柏灵院士，刘春生处长，李心灿教授，王元院士，李忠教授，王万良教授，卢才辉教授，季文铎教授，孙洪祥教授。

序

姜伯驹　叶其孝

数学科学（简称数学）是研究现实世界中空间形式和数量关系的一门科学，它也是关于模式和秩序的科学．数学为人们提供了科学的语言．数学的思考方式具有根本的重要性，因为数学为组织和构造知识提供方法，以至当用于技术时就能使科学家和工程师产生系统的、能复制并且是可以传播的知识，从而有可能转化成生产力，创造巨大的经济和社会效益，因此，数学始终是科学、技术、工程、经济、管理和决策科学的基础．半个世纪以来，科学技术特别是计算机及相应软件技术的发展，促进了数学科学的突飞猛进、充满生机的发展．50 年前，数学虽然也直接为工程提供一些工具，但基本方式是间接的：先促进其他科学的发展，再由这些科学提供工程原理和设计基础．现在不同了．数学和工程、技术、经济、管理之间，在更广阔的范围内和更深刻的程度上，直接地相互作用着．数学科学进一步渗透到一切领域，特别是，数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具，这些领域中的科技进展与数学的结合和融合，产生了大量的专业应用软件，形成了一种强有力的数学技术，在这样的意义下确实可以说："高技术本质上是一种数学技术"．因而，数学教育不仅是培养现代科技人才的最重要的素质教育之一，也是人才培养竞争的关键之一．高等数学、线性代数、概率统计一直是高等学校最重要的基础课．在学好这些课程的基础上怎样进一步提高学生，特别是提高优秀学生的数学技能和素质，是一项十分迫切、亟待解决的任务．开展数学竞赛就是一种行之有效的方法．

自 1988 年以来，北京数学会大学委员会和北京高校数学研究会连续组织了 15 届大学生（非数学专业）数学竞赛并取得极大的成绩，就是上述说法的一个明证．竞赛的组织者和广大教师不仅积累了丰富的经验，为培养优秀人才作出了重要贡献，也为大学数学教育改革作出了贡献．总结并传播他们的经验是一项很有意义的工作．本书不仅总结了北京历届的赛题和参考解答，也包括了一些外省市的赛题和参考解答，还介绍了国外的大学生数学竞赛的有关赛题并给出了参考解答．特别是本书还从全国工学、经济学硕士研究生入学数学考试使

用过的近 2000 道试题中，挑选了 120 道较难或综合性较强的试题，并作了解析．因此，本书内容相当丰富，是一本很有特色的教学参考书．

我们相信本书一定会受到广大教师和学生的欢迎．

前　言

本书共有两部分内容.

第一部分是大学生数学竞赛试题解析选编. 这一部分分三篇：第一篇，汇集了北京市大学生（非数学专业）数学竞赛第一届至第十五届的全部试题，并给出了解题思路及较详细的参考解答；第二篇，选编了我国自改革开放以来，部分省市及高校的大学生数学竞赛的试题，对其中大部分给出了较详细的参考解答、答案或提示，有的还给出了解题思路. 只有上海市、同济大学、重庆大学、西安交通大学的四份试题未给出解答，我们特意留给读者去试作；第三篇，选编了国外一些大学生数学竞赛的试题，并给出了解题思路及较详细的参考解答.

第二部分是从1990年至2004年全国工学、经济学硕士研究生入学数学统考试题中，挑选出的120道较难或综合性较强的高等数学试题，每个试题前用数码标明了试题使用的年份、卷种、题分等信息. 如某题前括号内的数码为(02203)，表示此题为2002年数学二试卷中的一道3分题；数码为（90406)，表示此题为1990年数学四试卷中的一道6分题. 每道试题都给出了解题思路及较详细的参考解答. 对其中一些试题还指出了考生出现的一些典型错误. 并对1990年至2002年13年的试题都给出了题目的难度和区分度. 我们把这些试题称为难题，是因为这些试题的全国抽样统计得分率均低于0.5，表示全体考生在这些试题上的平均得分不到这些试题题目分值的一半；但它们所涉及的考试内容均未超出《全国研究生入学考试数学考试大纲》的要求，同时又能较好地体现全国研究生入学数学考试试题的综合性，具有一定的深度和广度.

我们编写此书，是希望为我国的大学生和数学爱好者提供一本提高数学素质（特别是解题能力）的有益读物，同时也为高校数学教育提供一本有益的教学参考书.

我们在编写过程中，得到了许多高校数学教师的热忱关心和支持，特别是北京理工大学杨德保教授、清华大学胡金德教授、北京航空航天大学徐兵教授、北京科技大学高瑞教授和陈兆斗教授、北京交通大学[1]龚曼奇教授、北京化工大学黄金坤教授、北京邮电大学杨源淑教授和王玉孝教授、北京工业大学王中良

[1] 原北方交通大学.

教授、北京建筑工程学院王崇寿教授和马龙友教授、北京工商大学[1]章栋恩教授、北方工业大学宋瑞霞教授和吴润恒教授、北京信息工程学院吴昌悫教授和苏农教授、北京防化学院[2]孙建建教授、中央民族大学罗小伟教授、浙江大学蔡燧林教授、哈尔滨工业大学富景隆教授、西安交通大学龚冬保教授、上海交通大学景继良教授、同济大学郭镜明教授、东南大学陈建龙教授、天津大学边馥萍教授、汕头大学钱昌本教授、重庆大学赵中时教授等热情地寄来了他们学校或他们所在省市数学竞赛的试题和有关资料为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动．在此，我们一并致以诚挚的谢意．

我们特别感谢中国数学会前理事长、中国科学院数学研究所前所长王元院士挥毫为本书题词，感谢北京数学会前理事长姜伯驹院士、前副理事长叶其孝教授为本书作序，他们的题词和作序表达了数学家对青年人学好数学的殷切期望．

由于我们的水平所限，在编写中如果有不当或错误之处，恳请读者批评指正．

编者

[1] 原北京轻工业学院．

[2] 原解放军防化学院．

目　录

第一部分　大学生数学竞赛试题解析

第二部分　全国硕士研究生入学考试高等数学难题精选解析

第一部分

大学生数学
竞赛试题解析

第一篇　北京市大学生（非数学专业）第一届至第十五届数学竞赛试题及解析

第一届北京市大学生（非理科）数学竞赛试题及解析

（1988 年 9 月 18 日上午 9:00～11:30）

一、求由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的体积 V 和表面积 S.

分析　先确定此两曲面围成的空间几何体形状，然后可考虑该几何体的边界曲面在 xOy 平面上的投影域，分别化为二重积分计算.

解
$$\begin{cases} z=x^2+y^2 & \Rightarrow z=2-\sqrt{z} \\ z=2-\sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow z^2-5z+4=0 \end{cases}$$

解得 $z_1=1$，$z_2=4$(舍去)，所以投影区域为 $D: x^2+y^2\leqslant 1$.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{极}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (2-r-r^2)r\mathrm{d}r \\ &= \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

因为　$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D [\sqrt{1+4(x^2+y^2)}+\sqrt{2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{极}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\sqrt{1+4r^2}+\sqrt{2})r\,\mathrm{d}r$$

$$=\left[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}\right]\pi.$$

二、解微分方程 $y(y+1)\mathrm{d}x+[x(y+1)+x^2y^2]\mathrm{d}y=0$.

分析 此非全微分方程，适当分项组合，选择合适的积分因子再凑微分可得通解.

解 方程变为 $y(y+1)\mathrm{d}x+x(y+1)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}y=0$，两边除以 $(y+1)x^2y^2$ 得 $\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2y^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1}=0$，即

$$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{xy}\right)+\mathrm{d}\ln|y+1|=0,$$

解出

$$-\frac{1}{xy}+\ln|y+1|=C_1,$$

$$\ln|y+1|=C_1+\frac{1}{xy}.$$

即

$$|y+1|=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\frac{1}{xy}}.$$

可得微分方程通解：$y+1=C\mathrm{e}^{\frac{1}{xy}}$ （任意常数 $C=\mathrm{e}^{C_1}>0$）.

三、设 $x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n},\cdots$.

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

分析 因为数列 x_n 不具单调性，所以 x_n 极限的存在性可考虑用定义证，同时以先求值后证 x_n 极限的存在性为简便.

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（存在）.

对于 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，两边令 $n\to\infty$，取极限.

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=2+\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n},$$

即有

$$A=2+\frac{1}{A}\Rightarrow A^2-2A-1=0.$$

解得

$$A=1\pm\sqrt{2},$$

因为 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}>2$，所以取 $A=1+\sqrt{2}$.

以下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

对任意 $\varepsilon>0$，

$$|x_n-A|=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{A}\right|$$

$$=\frac{|A-x_{n-1}|}{x_{n-1}A}=\frac{|x_{n-1}-A|}{x_{n-1}A}<\frac{|x_{n-1}-A|}{4}$$

$$\left(\text{因为 } x_{n-1}=2+\frac{1}{x_{n-2}}>2,\text{所以 } A=2+\frac{1}{A}>2.\right)$$

$$<\frac{\frac{|x_{n-2}-A|}{4}}{4}=\frac{|x_{n-2}-A|}{4^2}<\frac{\frac{|x_{n-3}-A|}{4}}{4^2}$$

$$=\frac{|x_{n-3}-A|}{4^3}<\cdots<\frac{|x_1-A|}{4^{n-1}}$$

$$=\frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}}=\frac{|1-\sqrt{2}|}{4^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}$$

$<\varepsilon$(当 n 足够大时).

由极限定义知 $$\lim_{n\to\infty}(x_n-A)=0.$$

即有 $$\lim_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}\text{(存在)}.$$

四、求 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right\}^{\frac{1}{x}}(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

分析 属“1^∞”型未定式的极限问题，可取自然对数，然后用洛必达法则直接计算.或利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 来计算.

解法1 设 $y=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right\}^{\frac{1}{x}}$，则

$$\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}{x}$$

$$\xlongequal[\text{洛}]{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim_{x\to0}\frac{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\cdot\frac{1}{n}(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n)}{1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^x\ln a_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to0}(a_k^x\ln a_k)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)$$

$$=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)=\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$