公共课系列 2001年研究生入学考试应试指导丛书

3

2001

策划：北京大学研究生院

2001

Entrance Exams for MI

研究生入学考试

# 数学应试指导

（工学类）

邵士敏 主编

北京大学出版社

2001年研究生入学考试应试指导丛书

2001年研究生入学考试

# 数学应试指导

（工学类）

主　编　邵士敏

撰稿人　邵士敏　娄元仁　文　丽

周建莹　庄大蔚　张立昂



北京大学出版社

北　京

图书在版编目(CIP)数据

2001年研究生入学考试数学应试指导.工学类/邵士敏主编.—北京:北京大学出版社, 2000.3

ISBN 7-301-04476-3

(2001年研究生入学考试应试指导丛书)

Ⅰ.2… Ⅱ.邵… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03847号

书　　名: 2001年研究生入学考试数学应试指导(工学类)
著作责任者: 邵士敏
责 任 编 辑: 刘金海
标 准 书 号: ISBN 7-301-04476-3/G·560
出　版　者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址: http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话: 出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752027
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者: 北京飞达印刷厂
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
850毫米×1168毫米　32开本　15.375印张　384千字
2000年4月第一版　2000年4月第一次印刷
定　　价: 21.00元

# 前　　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们按照教育部制定的全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求，编写了这本书．

本教程内容有高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步三部分，包括了新数学考试大纲数学一、二类（工学类）的全部内容．本书详尽地叙述了应考的基本概念、基本定理及计算公式，并配有尽可能多的典型例题，以便帮助读者深入理解概念，加强公式的运用．此外，还备有练习题及答案，可供读者复习时使用．

在编写过程中，我们研究了数学考试大纲对各部分内容要求的深度．书中对基本概念、基础知识的叙述，使之尽量符合大纲要求．我们还参考了近几年的试题，在选编典型例题时，既注意选编一些基本题，也选少量过去的试题，以提高考生的综合解题能力，使他们能较顺利地应考并进一步得到提高．本书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，书中就不另作说明．

本书可与作者同时编写的工学类“模拟试题”一书配合使用．

由于时间仓促，难免有疏误之处，诚望广大考生及众读者提供宝贵意见．

编　者

2000年2月于北京大学

# 目　　录

# 高　等　数　学

## 一　函数、极限、连续

### 1. 函数

(1) 函数的定义

设在同一过程中有两个变量 $x$、$y$, $x$ 的变化域是 $X$. 若对 $X$ 中每一个 $x$ 值,依照某一规律,变量 $y$ 都有惟一确定的值与之对应,则称 $y$ 是 $x$ 的函数,记作

$$y=f(x), \quad x\in X.$$

$x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量, $X$ 称为函数的定义域. 因变量 $y$ 的变化域称为函数的值域,可以记作

$$y=f(X)=\{y \mid y=f(x), \quad x\in X\}.$$

在函数定义中,应注意对应关系 $f$ 和定义域 $X$,它们是函数定义中的两个要素.

(2) 函数的图形

函数 $y=f(x)\quad(x\in X)$ 的图形是指点集

$$\{(x, y) \mid y=f(x), \quad x\in X\},$$

一般情形下,它是 $xy$ 平面上的一条或几条曲线, 且任何一条平行于 $y$ 轴的直线,与曲线 $y=f(x)$ 至多相交于一点.

(3) 函数的几种常见特性

**有界性**　若 $\exists\, M>0, \quad \ni\cdot\ |f(x)|\leqslant M, \quad \forall x\in X,$ [①] 则称 $f(x)$

---

① 符号 $\exists$ 表示"存在", $\ni\cdot$ 表示"使得", $\forall$ 表示"对于任意的",或"任给".

在 $X$ 上有界.

有界函数 $f(x)$ 的图形 $y=f(x)$ 的特点是它界于二直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

**奇偶性** 设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$, 其中 $X$ 关于原点对称(即:若 $x\in X$, 则 $-x\in X$).

若 $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 $X$ 上的奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 $X$ 上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点,偶函数的图形对称于 $y$ 轴.

**单调性** 若 $\forall x_1, x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 $X$ 上单调上升(或单调下降).此处的上升亦称递增,下降亦称递减.

若 $\forall x_1, x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 $X$ 上严格单调上升(或严格单调下降).

**周期性** 设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$. 若 $\exists$ 常数 $T>0$, $\ni\!\boldsymbol{\cdot}\, \forall x\in X$, 都有 $x+T\in X$, 且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, $T$ 称为周期.

显然,任何周期函数都有无穷多个周期,若其中有一个最小的正数,则称它为最小正周期,亦称周期.

"周期"通常指最小正周期.但周期函数未必都有最小正周期.

(4) 复合函数

设有函数

$$y=f(u) \qquad u\in U,$$

$$u=\varphi(x) \qquad x\in X \quad \text{值域为 } U',$$

若 $U'\subseteq U$, 则在 $X$ 上确定了一个新函数

$$y=f[\varphi(x)] \qquad x\in X \quad ,$$

称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，$u$ 称为中间变量.

(5) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 $Y$. 若对 $Y$ 中每一个 $y$ 值，都可由方程 $y=f(x)$ 惟一确定出 $x$ 值，则得到一个定义在 $Y$ 上的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y) \qquad y\in Y,$$

易知，严格单调函数必有反函数，并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in Y)$ 的图形相同.

在习惯上，为了强调对应规律 $f^{-1}$，并将因变量仍记作 $y$，通常将反函数写为

$$y=f^{-1}(x) \qquad x\in Y,$$

它的图形与 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(6) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为初等函数.

基本初等函数是指以下六类函数: 常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

例 1　符号函数是指下面的分段函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<1. \end{cases}$$

它是有界函数，也是奇函数，其图形由两段直线及一个点 (0, 0) 组成.

问: $y=\operatorname{sgn}x$ 是不是单调函数?

例 2　狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$y=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

是偶函数(为什么?).

例 3　求 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 时的反函数.

解　在 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 两边同乘以 $2\mathrm{e}^x$ 并移项,得

$$(\mathrm{e}^x)^2-2y\mathrm{e}^x+1=0,$$

解出

$$\mathrm{e}^x=y\pm\sqrt{y^2-1}\ ,\qquad y\geqslant 1.$$

当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$\mathrm{e}^x\geqslant 1$,因此,上式应取正号,得反函数

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2-1}\ ),\qquad y\geqslant 1.$$

习惯上写为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}\ ),\qquad x\geqslant 1.$$

例 4　设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $g[f(x)]$.

解　当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=0$,因此

$$g[f(x)]=g(0)=0.$$

当 $x>0$ 时,$f(x)=x$,因此

$$g[f(x)]=g(x)=-x^2.$$

从而

$$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$$

例 5　$y=f(x)$ 的定义域为$[0,2]$，求下列函数的定义域:

(1) $y=f(\operatorname{sgn} x)$;

(2) $y=f(x+a)+f(x-a)\qquad(a>0)$ .

解　(1) 因为仅当 $x\geqslant 0$ 时，$\operatorname{sgn} x$ 的值域才属于$[0,2]$，所以 $y=f(\operatorname{sgn} x)$ 的定义域为$[0,+\infty)$.

(2) $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为

$$0\leqslant x+a\leqslant 2,\quad 且\quad 0\leqslant x-a\leqslant 2.$$

因此，当 $a\leqslant 1$ 时，定义域为 $a\leqslant x\leqslant 2-a$; 当 $a>1$ 时，该函数没有定义域，即函数无定义.

2. 极限

(1) 数列极限的定义

设有数列$\{x_n\}$及常数 $a$. 若 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ 号码(即正整数) $N$, $\ni\cdot$ 当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称当 $n$ 趋向于无穷时，$\{x_n\}$以 $a$ 为极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=a,$$

或　$x_n\to a\qquad(n\to+\infty)$.

"$n\to+\infty$"称为极限过程.

(2) 数列极限的几何意义

$\forall$点 $a$ 的 $\varepsilon$ 邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时，所有的点

$$x_{N+1},\ x_{N+2},\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

全部落在邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之内.

(3) 函数极限的定义

**定义 1**　($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在 $x$ 充分大时有定义，$A$ 为常数. 若$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ X>0$, $\ni\cdot$ 当 $x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x$ 趋向于正无穷时，$f(x)$ 以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

或 $\qquad f(x) \to A \qquad (x \to +\infty).$

"$x \to +\infty$"称为极限过程.

可类似给出极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 的定义.

**定义 2** ( $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$) 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义,$A$ 为常数. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, $\ni \cdot$ 当 $|x| > X$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x$ 趋向于无穷时, $f(x)$ 以 $A$ 为极限,记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

或 $\qquad f(x) \to A \qquad (x \to \infty).$

"$x \to +\infty$"称为极限过程.

**定义 3** ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$) 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近有定义(点 $x_0$ 本身可能除外),$A$ 为常数. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\ni \cdot$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时, $f(x)$ 以 $A$ 为极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

或 $\qquad f(x) \to A \qquad (x \to x_0).$

极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的几何意义是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当点 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 但 $x \neq x_0$ 时,相应的点 $(x, f(x))$ 全部落在

图 0-1-1的带形区域(图中带斜线部分)内.

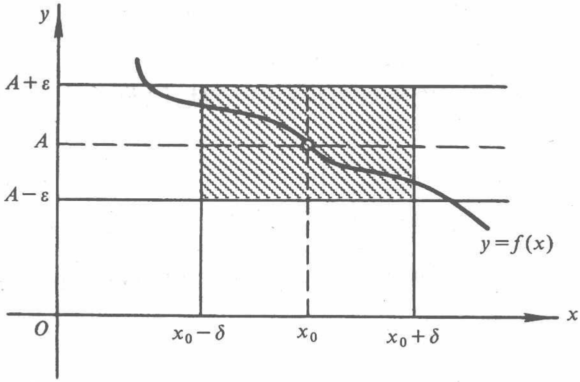


图 0-1-1

**定义 4** (右极限 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的右近旁有定义, $A$ 为常数. 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$, $\ni\cdot$ 当 $0<x-x_0<\delta$ (即 $x_0<x<x_0+\delta$) 时, 恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的右极限为 $A$, 记作

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x)=A,$$

或 $\qquad f(x) \to A \qquad (x \to x_0+0),$

有时也记作 $\qquad f(x_0+0)=A.$

可类似定义左极限 $\quad f(x_0-0)=\lim\limits_{x \to x_0-0}=A.$

左、右极限统称为单侧极限.

以上"$x \to x_0$"等, 均称为极限过程.

(4) 定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=A$.[①]

类似地，有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \iff \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$.

(5) 无穷小量与无穷大量

**定义 1** 在某一极限过程中，以 0 为极限的变量(数列或函数)称为无穷小量.

无穷小量的阶的比较:

设 $\alpha$, $\beta$ 是同一极限过程中的两个无穷小量.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=K\neq 0$，则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是同阶(或同级)无穷小量. 特别地，

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是等价无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 $\alpha$ 是比 $\beta$ 更高阶的无穷小量，记作

$$\alpha=o(\beta).$$

**定义 2** 设有数列 $\{x_n\}$. 当 $n\to+\infty$ 时，若绝对值 $|x_n|$ 无限变大，即 $\forall M>0$, $\exists N$, $\ni\cdot$ 当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n|>M,$$

则称 $\{x_n\}$ 当 $n\to+\infty$ 时为无穷大量，记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\infty.$$

可类似定义 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，

以及 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\infty$，$\pm\infty$.

---

① 记号“$\iff$”指充分必要条件.

例 6　试用极限定义证明：当 $|q|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n=0 .$$

证　因为 $|q|<1$，$\frac{1}{|q|}>1$，所以可设 $\frac{1}{|q|}=1+h \quad (h>0)$. 从而

$$\frac{1}{|q|^n}=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$$

$$>\frac{n(n-1)}{2}h^2,\text{ 因此有}$$

$$n|q|^n<\frac{2}{(n-1)h^2} .$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|nq^n-0|=n|q|^n<\varepsilon$，只要 $\frac{2}{(n-1)h^2}<\varepsilon$，亦即只要 $n>\frac{2}{\varepsilon h^2}+1$. 取正整数 $N\geqslant\frac{2}{\varepsilon h^2}+1$，当 $n>N$ 时，就有 $n>\frac{2}{\varepsilon h^2}+1$，也就有 $|nq^n|<\varepsilon$ . 于是证明了

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n=0 \qquad (|q|<1).$$

例 7　用极限定义证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2} .$$

证　记 $x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$，则

$$x_n=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使

$$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}<\varepsilon\ ,$$

只要 $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$ . 取 $N\geqslant\dfrac{1}{2\varepsilon}$ ，当 $n>N$ 时，就有

$$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$ .

例 8　证明：若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|A|.$$

证　因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，所以

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\ni$ 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

利用不等式 $\big||p|-|q|\big|\leqslant|p-q|$，便得到

$$\big||f(x)|-|A|\big|\leqslant|f(x)-A|<\varepsilon,$$

于是证明了 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$ .

例 9　用极限定义证明

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+5}-\sin\sqrt{x^2+6})=0.$$

证　利用和差化积公式知

$$\left|\sin\sqrt{x^2+5}-\sin\sqrt{x^2+6}\right|$$

$$=\left|2\cos\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+6}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+6}}{2}\right|$$

$$\leqslant\left|\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+6}\right|=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+6}}<\frac{1}{|x|}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\sin\sqrt{x^2+5}-\sin\sqrt{x^2+6}\right|<\varepsilon$, 只要 $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$,

或 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $X\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x|>X$ 时, 便有

$$\left|\sin\sqrt{x^2+5}-\sin\sqrt{x^2+6}\right|<\varepsilon,$$

于是证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+5}-\sin\sqrt{x^2+6})=0$.

例 10 证明: 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\quad(x_n\neq a)$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$.

证 由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\ni$· 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\quad(x_n\neq a)$ 知, 对于上述 $\delta>0$, $\exists$ 正整数 $N$, $\ni$· 当 $n>N$ 时, 恒有 $0<|x_n-a|<\delta$.

将以上二者结合起来知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 正整数 $N$, $\ni$· 当 $n>N$ 时, 恒有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 于是证明了

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=A.$$

(6) 极限的四则运算

**定理** 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在, 则

(i) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$,

(ii) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$,