数学

—它的内容、方法和意义—

第二卷

[蘇聯] A.Д.亞歷山大洛夫等著

科学技术出版社

数学

—它的内容、方法和意义—

第二卷

苏联科学院通訊院士 A.Д. 亞歷山大洛夫
院士 A.H. 閣尔莫果洛夫、院士 M.A. 拉夫掄捷夫 共編

苏联科学院通訊院士 A.Д. 亞歷山大洛夫等著

秦元勳 王光寅 裘光明 胡祖熾 越民义
許孔时 梁文祺 佘家荣 儲鍾武 于桂芝 譯

周毓麟 孙以丰 冯 康 許孔时 越民义 王寿仁 秦元勳 校

科学技术出版社

1959年·北京

目　次

第二卷

第一卷（已出）

第一章　數学概观（A. Д. 亞歷山大洛夫著）

第二章　數学分析（M. A. 拉夫掄捷夫
C. M. 尼闊尔斯基 合著）

第三章　解析几何（Б. H. 狄隆湼著）

第四章　代　　數——代數方程的理論（Б. H. 狄隆湼著）

第三卷（預告）

第十五章　实变函数（C. Б. 斯捷奇金著）

第十六章　綫性代数（Д. K. 法德杰也夫著）

第十七章　抽象空間（A. Д. 亞歷山大洛夫著）

第十八章　拓扑学（П. C. 亞歷山大洛夫著）

第十九章　汎函分析（И. M. 盖尔芳特著）

第二十章　羣及其他代數系統（A. И. 馬尔采夫著）

第五章 常微分方程

§1. 緒　論

微分方程的例子　在前几章中我們所遇到的方程主要是求某几个量的数值. 例如在求函数的極大値和極小値时，我們需要解方程去求函数的变化率为零之点; 又如在第四章（卷一）中研究求多項式的根的問題等等. 所有这些情形都是在求个别的数值. 但是在数学的应用中，时常遇到性質上完全新的問題，在这类問題中，函数本身是未知的，一些变数对另一些变数的依存規律本身是未知的. 例如研究物体的冷却过程，我們要确定它的溫度如何随时間而变化; 在决定行星或星球的运动时，我們要决定它的座标与时間的依存关系等等.

对于所要找的未知函数，我們时常可以作出它的方程，这类方程称为泛函方程，一般說，泛函方程的性質可以各种各样的（研究稳函数的問題可以說是我們已經遇到过的最簡單最原始的泛函方程）.

在第五、六及八章中，將研究未知函数的寻求問題. 在这一章及下章中要研究未知函数的方程中最重要的方程，即所謂**微分方程**. 从这个名称就可以知道，这个方程中不只出現函数本身，而且还出現它的某些阶的微商.

下面的等式可以作为微分方程之例子:

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t),\ \frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=A\sin wt,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=tx,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (1)$$

前面三个方程用 x 記作未知函数，而 t 記作独立变数；后面三个方程用 u 記作未知函数，这些函数依賴于兩个变数 x 与 t 或 x 与 y.

对于数学，特别是对于数学的应用，微分方程所具有的重大意义主要是在于：很多物理問題与技术問題的研究可以化归为这类方程的求解問題.

电子計算机及無綫电裝置的計算，彈道的計算，飞机在飞行中稳定性的研究，或者化学反应过程的稳定性的研究，所有这些都可以化为微分方程求解的問題来进行.

某些物理現象所服从的物理規律可用微分方程表現出来，而这些微分方程則是这些規律的准确的量的（数值的）表示的工具，这种情形是經常最易遇到的. 讀者在下一章中將会看到，例如用微分方程之形式表示出質量守恆定律与热能守恆定律. 借微分方程之助，牛頓所發現的力学規律可以用来研究所有力学系統的运动.

我們用簡單的例子来說明这一点. 設所研究的質点具有質量 m，在 Ox 軸上运动. 在时間 t 它的坐标用 x 来表示.

当質点运动时，它的坐标 x 也在随时間而变化，而要知道質点的运动也即是要知道 x 对于时間 t 的函数依存关系. 設运动是在力 F 作用下进行的，又設力 F 是与用坐标 x 所定义的質点的位置，与运动的速度 $v=\frac{dx}{dt}$ 及与时間 t 有关，即是 $F=F(x,\frac{dx}{dt},t)$. 依照力学規律，作用于質点上的力 F 將引起运动的加速度 $w=\frac{d^2x}{dt^2}$ 使得質点的質量 m 乘这个加速度确切地等于作用力的大小，也即是，在运动的任何时間，等式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x,\frac{dx}{di},t\right. \qquad (2)$$

是应該滿足的.

这便是描述質点运动过程的函数 $x(t)$ 所应滿足的微分方程式．它是上述力学規律的簡單的描述．它的意义在于可以把决定質点运动的力学問題化为微分方程求解的数学問題．

下面讀者可以找到其他的例子，說明各种不同的物理过程的研究如何可以化为微分方程的研究．

微分方程理論在十七世紀的末年开始發展起来，差不多是与微分及积分的計算同时产生的．現在微分方程已經成为研究自然現象的强有力的工具．在力学、天文学、物理学及技术中借微分方程之助已經取得巨大的成就．牛頓研究天体运动的微分方程，从理論上得到行星运动規律，而这些規律原来只是由凱普勒实驗中得到的．勒未累在 1846 年預言海王星的存在，并在这个微分方程数值分析的基础上，决定海王星在天空中的位置．

为了說明微分方程理論的一般特点，首先要指出，一般說来，每一个微分方程不只有一个解而是有無限多个解，而是有無限多个函数滿足这个方程．例如，在前面所說的力学例子中，不論开始时質点所在的位置如何以及开始时的速度如何，只要在同样的函数 $F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$ 所表示的力作用下，所有的运动都必須滿足前述的質点运动的方程．对应于每个运动有一个 x 对时間 t 的依存关系．因为在力 F 作用下的运动可以有無限多个，微分方程(2)也將有無限多个解．

一般說来，每一个微分方程确定一整族的滿足它的函数．微分方程理論的基本問題是研究滿足这个微分方程的函数．微分方程理論使得有可能充分全面的表达出滿足方程的所有函数的性質．这在自然科学的应用上是特別重要的．此外，如果需要計算，微分方程理論应保証有办法算出函数的数值．如何做到这些，下面將会談到的．

如果未知函数只与一个变数有关，这种微分方程称为**常微分方程**．而当未知函数与几个变数有关，又方程中出現未知函数对几个变数之微商，这种微分方程称为**偏微分方程**．在(1)中

前三个方程是常微分方程，后三个是偏微分方程.

偏微分方程理論具有本質上与常微分方程理論不同的許多固有特点. 有关偏微分方程的基本概念将在下一章中述及；本章中我們只談到常微分方程.

現在看看下面几个例子.

例 1 鐳衰变的規律是：衰变速度与鐳所存余的量成比例. 設已知在某一时間 $t = t_0$ 有 R_0 克的鐳. 要确定在任何时間 t 鐳的量.

設 $R(t)$ 是在时間 t 尙未衰变的鐳的量，衰变速度用量 $-\frac{dR}{dt}$ 来計量，因为速度与 R 成比例，我們得到

$$-\frac{dR}{dt} = kR, \tag{3}$$

式中 k 是一个常量.

要解决我們的問題便要由方程(3)决定函数 R，为此，注意到 $R(t)$ 的倒函数滿足方程

$$-\frac{dt}{dR} = \frac{1}{kR} \tag{4}$$

因为 $\frac{dt}{dR} = \frac{1}{\frac{dR}{dt}}$. 由积分計算知道具有形式

$$t = -\frac{1}{k}\ln R + C,$$

的任意函数都滿足方程(4)，式中 C 为任意常数. 由此关系，我們定出 t 的函数 R. 我們有

$$R = e^{-kt+kC} = C_1 e^{-kt}. \tag{5}$$

由方程(3)的所有的解(5)中要提出在 $t = t_0$ 时取 R_0 值的那个解，如果将 $C_1 = R_0 e^{kt_0}$ 代入(5)我們就得到了这个解.

从数学的观点看来，方程(3)是函数 R 变化的非常簡单的規律的描述，也就是說，函数 R 的減少速度 $-\frac{dR}{dt}$ 与函数 R 本身的

值成比例. 不仅在放射性衰变現象中,而且在許多其他物理現象中,滿足这种函数变化的規律.

例如,我們在物体冷却的研究中也遇到函数变化的同样的規律,此时物体中的热量的减少是和物体的温度与其週围介質的温度之差成比例,在許多其他物理过程的研究中,也有这类規律. 因此,虽然我們由鐳的衰变引出方程(3),但方程(3)应用的范围比鐳的衰变这个特殊問題更有无比的广泛性.

例 2 設具有質量 m 的質点沿水平軸 Ox 运动于有阻力的介質中,例如在液体或气体中,受到依虎克定律作用的两个弹簧的弹性力的影响(图 1). 这个定律即是弹力向平衡位置起作用并与离平衡位置之偏差成比例. 設平衡位置在点 $x=0$. 則弹性力等于 $-bx$ $(b>0)$.

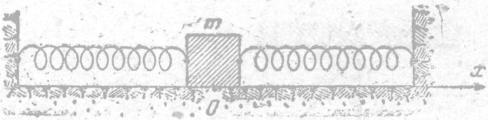

图 1

設介質阻力与运动之速度成比例,即等于 $-a\dfrac{dx}{dt}$,其中 $a>0$,又負号表示介質阻力的方向与运动速度的方向相反. 当速度小时,关于介質阻力的这个假設与实驗很符合.

基于牛頓定律質点的質量乘其加速度等于加于此質点的力的和,即是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-bx-a\frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

因此,在任何时間 t 表示質点运动位置的函数 $x(t)$ 滿足微分方程(6). 我們将在后面的一节中研究这个方程.

如果除了上述各力外,还对質点施以外力 F,則运动的微分方程(6)將采取以下形式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-bx-a\frac{dx}{dt}+F. \qquad (6')$$

例 3　数学摆即是一个质量 m 的质点系于一个长度为 l 的綫上(图 2). 我們假設在任何时候这个摆都在同一平面上——即图画所在的平面上. 作用于质点的重力 mg 是将摆拉回平衡位置 OA 的力. 摆在任何时間 t 的位置可以用它与垂綫 OA 相差的角 φ 来确定. 反时鐘运动的方向作为 φ 角計算的正方向. 設质点由平衡位置 A 所經的道路为弧 $AA'=l\varphi$. 速度 v 将是沿圓的切綫方向并将取以下的数值

$$v=l\frac{d\varphi}{dt}.$$

为了作出运动的方程，把重力 mg 分为两个分量 Q 与 P，第一个分量沿着 OA' 半径方向，第二个分量沿着圓周的切綫方

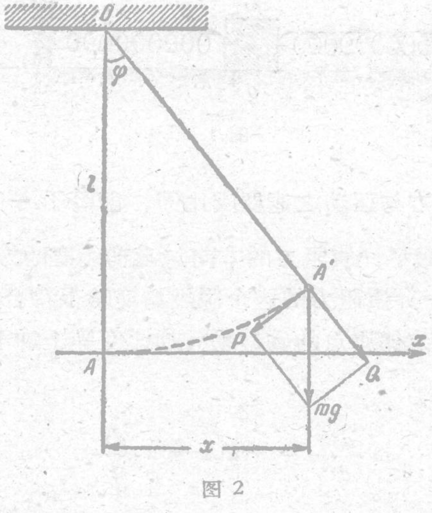

图 2

向. 分量 Q 不会引起速度 v 的数值的改变，因为它与相反方向的拉力 OA' 相抵消. 只有分量 P 引起速度 v 的数值的变化. 它总是向着平衡位置 A 起作用，即是当角 φ 为正时，向减小 φ 的方向，当角 φ 为負点，向增加 φ 的方向. P 的数值等于 $-mg\sin\varphi$，

因此摆的运动方程是

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi$$

或

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{7}$$

有趣的是，这个方程的解不能用有限形式表为初等函数．甚至像数学摆的振动这类簡单的物理过程来說，要想用初等函数来給出它的准确表达式，也已經表示出初等函数的包含的范围是很貧乏的．后面我們要看到，用初等函数可解的微分方程是不多的，常常会有这样的情形，在物理或力学中遇到的一些微分方程的研究迫使我們引入新的函数，对这些函数进行研究，从而将解决应用問題时所用的函数的武庫加以扩大．

現在我們只研究摆的微小振动，即当忽視微小的誤差后，把 AA' 弧看作它在 Ox 軸上的投影 x，把 φ 代替 $\sin\varphi$ 的情况．则 $\varphi\approx\sin\varphi=\dfrac{x}{l}$ 及摆的运动方程采取更簡单的形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{l}x. \tag{8}$$

下面我們要說明，这个方程可用三角函数来解，由此可能相当准确地描述摆的"微小振动".

例 4 赫尔姆霍尔茨的声学共振器（图3）是由容积为 v 的充滿空气的容器 V 和圓柱形的頸部 F 所組成．近似地可将頸部 F 中的空气的質量看作具有質量 m 的柱子，

$$m=\rho sl, \tag{9}$$

式中 ρ 为空气密度，s 为頸部的横截面，l 为其长度．

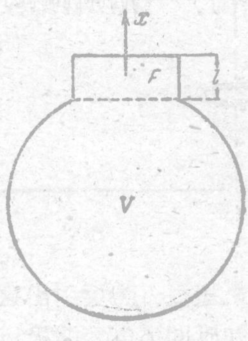

图 3

設空气从平衡位置移动的大小为 x，則具有容积 v 的容器的空气压力由初始压力变化一些，以 Δp 記此变化.

假設压力 p 与体积 v 由絕热变化規律 $pv^k = C$ 相联系. 則如果略去高阶的小量，我們得到

$$\Delta p \cdot v^k + pkv^{k-1} \cdot \Delta v = 0$$

及

$$\Delta p = -kp\frac{\Delta v}{v} = -\frac{kps}{v}x. \tag{10}$$

(在我們这种情形 $\Delta v = sx$). 在頸部中空气的运动方程可以写成

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Delta p \cdot s. \tag{11}$$

式中 $\Delta p \cdot s$ 是在容量中的气体加于頸部中的空气柱的压力. 由关系(10)及(11)我們得到

$$\rho l\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kps}{v}x, \tag{12}$$

式中 ρ, p, v, l, k, s 都是常数.

例 5 在最簡单的振动廻路中的电振盪的研究也化为形式(6)的方程. 这个廻路的图式如图 4 所表示. 这里左边表示电容为 C 的电容器，它的极板和自感 L 及电阻 R 串联成閉合廻路. 設在某一时刻电容器得到一个电位差，此后其电源卽切断. 如果廻路中不存在自感，則电流就流动到电容器內不存在电位差时为止.

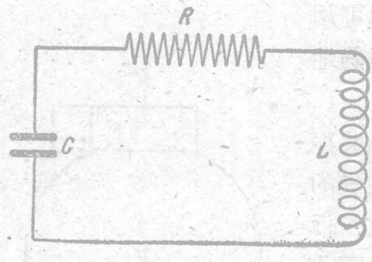

图 4

当有自感存在时，則过程便完全两样、在廻路中产生电振盪. 为要引出这个振盪的規律，以 $v(t)$ 或簡单地用 v 表示在时間 t 电容器极板上的电位差，以 $I(t)$ 表示在时間 t 的电流強度，以 R 表示电阻. 由熟知的物理規律，在任何时間 $I(t)R$

均等于全部电动势，而后者包括电容器极板上电位差所产生的电动势 $-v(t)$ 以及自感电动势 $-L\dfrac{dI}{dt}$. 由此有

$$IR=-v-L\frac{dI}{dt} \tag{13}$$

以 $Q(t)$ 記在时間 t 电容器上的电量. 則在廻路上每时的电流強度等于 $\dfrac{dQ}{dt}$. 电容器极板上的电位差 $v(t)$ 等于 $\dfrac{Q(t)}{C}$. 因此，$I=\dfrac{dQ}{dt}=C\dfrac{dv}{dt}$ 等式(13)则改写为下形

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=0. \tag{14}$$

例 6 图 5 中所表示的为电磁振盪的眞空管振盪器的綫路图，由电容 C，电阻 R 及自感 L 所組成的振盪廻路作为基本振盪系統. 綫圈 L' 及在图 5 中心所示的眞空管組成所謂的反饋. 电池 $Б$ 是和 L, R, C 相联的能源，k 是眞空管的阴极，A 为阳极，S 为柵极. 在这种綫路图中，在 L,R,C 廻路中产生"自振". 在

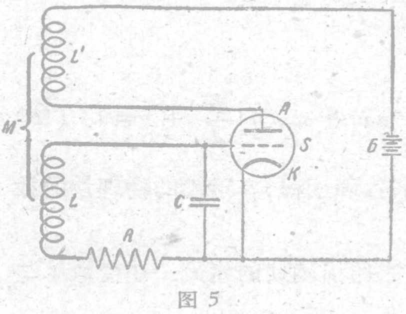

图 5

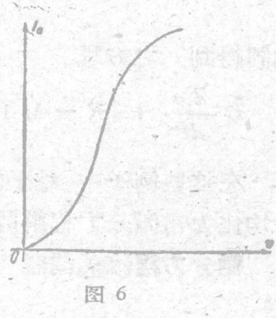

图 6

所有的实际的系統中，在振动的过程，能量必变成热或用其他形式传到週围的物体去. 因此，为要保持振动的駐定状况，为了保持振幅，每一个实际的振动系統必須从外面取得能量. 自振与其他振动过程的区别在于，为了保持这个系統的駐定振动状况外扰不必要是週期的. 自振系統的装置是要有个經常的能源，在

我們的例子中电池 $Б$ 保持駐定振动状况。鈡表，电鈴，音乐家手中的弦与弓，人的声带及其他例子都是自振系統.

在 L, R, C 振动廻路中的电流强度 $I(t)$ 滿足方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI+v=M\frac{dI_a}{dt}. \tag{15}$$

式中 $v=v(t)$ 是在时間 t 电容器极板上的电位差，$I_a(t)$ 是通过綫圈 L' 之阳极电流；M 是綫圈 L 与 L' 之間的互感系数. 方程(15)比方程(13)只多了一項 $M\frac{dI_a}{dt}$.

可設阳极电流 $I_a(t)$ 只和眞空管的柵极 S 与阴极之間的电位差有关，即是忽略了阳极的反作用；在这个假定下，这个电位差等于电容器 C 极板上的电位差 $v(t)$. 在图 6 中表示了 I_a 与 v 的函数相关的特性曲綫通常用三次拋物綫来表示这个曲綫，近似地可写成：

$$I_a=a_1v+a_2v^2+a_3v^3.$$

将此式代入方程(15)之右方，又利用

$$\frac{dv}{dt}=I,$$

我們得到 v 之方程

$$L\frac{d^2v}{dt^2}+[R-M(a_1+2a_2v+3a_3v^2)]\frac{dv}{dt}+v=0. \tag{16}$$

在这些例子中，对于已給的物理过程，其示性的物理量的找寻均化为常微分方程解的寻求.

微分方程論的問題 現在来給出确切的定义. 在变数 x 与值

$$y(x),\ y'(x)=\frac{dy}{dx},\ y''(x)=\frac{d^2y}{dx},\ \cdots,\ y^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

之間的形如

$$F(x,y(x),y'(x),y''(x),\cdots,y^{(n)}(x))=0 \tag{17}$$

的关系式，称为是一个未知函數 y 的 n 阶的常微分方程. 在微

分方程中，出現的未知函数的最高次微商，称为**微分方程**的阶．因此，在例 1 中所得到的微分方程是 1 阶，在例 2、3、4、5、6 中的是 2 阶．

如果将函数 $\varphi(x)$ 代替(17)中的 y，$\varphi'(x)$ 代替 y'，$\cdots\varphi^{(n)}(x)$ 代替 $y^{(n)}$，使得(17)变成恆等式，則函数 $\varphi(x)$ 称为**微分方程(17)之解**．

物理与技术的問題时常化为常微分方程組，其中含有几个依賴于同一个独立变数的未知函数以及它們的微商．

为了說得更具体起見，以下主要只談一个未知函数的不超过 2 阶的常微分方程，用这些例子来說明，所有的常微分方程及未知函数的个数，等于方程的个数的方程組的基本性質．

上面我們已經說过，每一个常微分方程不是只有一个解，而是有无限多个解．現在回到这个問題上来，首先用前面 2 到 6 的例子来說明一些明显的看法．在每个例子中所研究的物理系統对应的方程，只是由这个系統的結构所完全确定了． 但在这些系統的每一个当中，可以发生不同的过程． 例如，十分显然，依照方程(8)运动的摆可以作非常不相同的振动． 摆的每一个振动与方程(8)的一个解相对应，因此必有无限多个这样的解．可以驗証，形如

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \tag{18}$$

的任何函数都滿足方程(8)，其中 C_1 与 C_2 是任意常数．

物理上也是很明显的，只有当我們在某一个时間 t_0 給定 x 等于 x_0 的(初始)值（卽物質質点与平衡位置最初的偏离）以及运动的初始速度 $x_0' = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$ 时，摆的运动才是完全确定的．用这些初始条件可以决定公式(18)中的常数 C_1 与 C_2．

我們在其他例中所得的微分方程完全同样会有无数多个解．

关于具有一个未知函数的 n 阶的微分方程(17)，一般在很广

泛的假定下可以証明有无数多个解. 更确切地說:如果对于独立变数的某个"初始值",我們給定未知函数及其直到 $n-1$ 次微商的"初始值", 則可找到方程(17)的满足这些"給定初始值"的解也可以証明,用这些初始条件完全决定了解,只存在一个满足上面已給初始条件的解. 关于这些我們后面将要更詳細地講到. 現在我們的目的是要指明,函数及其 $n-1$ 个导数的初始值是可以任意給的. 我們可以任意选择,作为所求解的"初始状态"的 n 个量.

設有可能性,我們把某个 n 阶微分方程的所有的解用一个公式表示出来,則这种公式中必定包含刚好 n 个独立任意常数,由这些数的选取我們可以满足 n 个初始条件. n 阶微分方程的这种包有 n 个独立常数的解普通称为这个**微分方程之通解**. 例如方程(8)之通解为公式(18),其中有两个任意常数,由公式(5)得到方程(3)的通解.

現在我們来看微分方程理論所遇到的問題的最一般的特点. 它們是各种各样数目众多的. 我們来談其中最主要的.

設对微分方程再加上初始值, 則微分方程的解便完全确定了. 要求明显地表出解的公式,是微分方程理論的首要問題之一. 只有在最簡单的情形才能得到这种公式,但如果找到了这种公式,則对解之計算与研究都有很大的帮助.

有可能性去得到解的特性的提示: 解是否是单調的或是振动的? 是否是週期的或趋近于週期的等等.

很明显, 当我們将未知函数及其微商的初始值加以变动时(即被研究的系統的初始状态被改变)則解本身也将改变(即将換为另一个过程). 微分方程理論应当保証我們有可能討論,这种变化是怎样的. 特别是,对于初始值的微小变化,解本身的变化会不会是很小的, 因此, 解在这种情形下会不会是稳定的,也或者初始值的微小变化可能引起解本身的強烈的变化, 即它是不稳定的.

我們也应当,对于不只是方程的每个单独的解,而是对于它