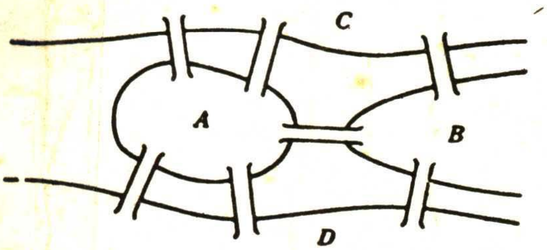


〔美〕S. 利普舒茨著

离散数学的理论和习题

离散数学的理论和习题

〔美〕S.利普舒茨　著

王元元
罗海鹏　译

莫绍揆　审校

广西人民出版社

内 容 提 要

本书是国外流行的肖姆纲要式丛书（Schaum's Outline Series）中的一本。其主要内容为离散数学的基本理论、习题及题解。

全书共分十二章。前三章主要介绍集合、关系和函数的有关概念；接着讨论向量和矩阵；第五～七章是有关图论的基础知识；最后几章是组合分析、代数系统、半序集与格、命题演算及布尔代数。

本书可供数学、计算机及其它有关专业的学生、教师和科技人员使用，也可供初等数学教育工作者参考。

Seymour Lipschutz

THEORY AND PROBLEMS OF DISCRETE MATHEMATICS

McGraw-Hill 1976

离散数学的理论和习题

〔美〕S.利普舒茨 著

王元元 罗海鹏 译

莫绍揆 审校

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

•

开本1092×787 1/16 16.25印张 384千字

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷

印数：1—10 100册

书号：13113·34 定价：1.95元

译　　序

由于计算机科学的飞速发展，作为计算机科学理论基础的离散数学已经成为一门重要的学科。特别是在被誉为计算机时代的今天，随着计算机日益广泛地应用于自然科学、社会科学及国民经济各领域，离散数学正在为越来越多的人所注目。甚至一些非计算机科学的专业（象通信、经济等）也已经或正在考虑将这一学科列为本专业的基础学科。

与上述情况适成对照的是，目前我国出版的离散数学教材还较少，更缺乏系统介绍离散数学基础理论和解题基本技能的纲要式著作或译作。我们希望本书的出版，能为改变这一状况作出一点贡献。该书是肖姆纲要式丛书中的一本，具有这套丛书的显明特色：理论综述深入浅出，问题选择难易得当。它既适合于专业工作者学习与参考，也适合于自学成材的青年在学习了一本离散数学教材后据此进行综合复习。另外，由于离散数学的学习并不要求传统微积分作为基础，而且其大部分专题与初等数学密切相关，该书也可作为初等数学教育工作者的参考读物。

全书共十二章。王元元同志翻译了第一、二、三、四、九、十一章，罗海鹏同志翻译了第五、六、七、八、十、十二章，特别荣幸的是，著名数学家、业师莫绍揆教授为我们校阅了全部译文，谨此表示深切的谢忱。

虽然我们已经改正了原书中的一些错漏，但可能仍有些问题未被发现。同时，由于我们水平有限，译文中的缺点和错误也在所难免。请读者不吝指正。

译　者

1983.3.21

原　序

随着计算机水平的推进，研究有限系统的离散数学变得更为重要。数字计算机基本上是一个有限结构，它的许多性质可以在有限数学系统的框架中来理解和解释。由于本书给出了更为基本的内容，因而它既可作为离散数学正式课程的教科书，也可作为所有现行标准课本的补充。

前三章囊括了集合、关系及函数方面的标准内容。紧接着的一章是向量和矩阵。然后三章是图、有向图和树。最后几章分别是组合分析、代数系统、半序集与格、命题演算及布尔代数。在关于图论的那几章里，包含了对可平面性、可游历性、四色定理、最短通道及有穷自动机的讨论。在关于代数系统的那一章里，也谈到了形式语言和语法。而关于布尔代数的那一章则收进了有关电路问题的讨论和用卡诺（Karnaugh）图确定最小析取范式的方法。我们特别指出，全书各章是特意这样写的，使得次序可以调换而不至引起困难，也无损于连续性。

每章的开始部分都对恰当的定义、原理和定理给出清楚的叙述，并伴有说明的例子及其它一些描述性的资料。接着是一组题解及补充习题。题解用于例释和进一步发挥上述内容，它们中也包括了定理的证明。补充习题的目的在于完整地复习该章的内容。最后，各章均收罗了一些与本章直接有关的计算机程序问题。本书比大多数初级课程包容更多的材料，这便使得本书更加灵活，既向人们提供了一本更为有用的参考书，同时也激励读者在各个专题中的进一步的兴趣。

谨感谢我的许多朋友和同事们，尤其是 Arthur Poe 对原稿提出了很有价值的建议和批评。我还要感谢McGraw-Hill公司Schaum纲要式丛书组的职工们，特别是David Beckwith的卓有成效的合作。

Seymour Lipschutz
于Temple大学
1976年9月

目　录

第一章　集合论

1.1　集合与元素

数学的一切分支中无不出现**集合**的概念。直观地说，所谓集合，就是某些客体的一个确定的表或汇总，将用大写字母A，B，X，Y，……表示之。组成集合的客体被称为**集合的元素**或**成员**，将用小写字母a，b，x，y，……表示之。语句“p是A的元素”或其等价语句“p属于A”记作

$$p\in A$$

$p\in A$的否定记作$p\notin A$。

集合的元素一旦给定，这一集合便完全确定，这一事实被形式地叙述为**外延性原理**。

外延性原理：两个集合A和B相等，当且仅当它们有相同的元素。

象通常那样，如果A和B相等，我们记为$A=B$，如果它们不相等，则记为$A\neq B$。

要指定一个特殊的集合，基本上有两种方法。一种方法是，在可能时列出它的元素。例如，

$$A=\{a,e,i,o,u\}$$

表示其元素是字母a，e，i，o，u的集合A。注意，元素用逗号分开，放入括号{}内。第二种方法是叙述可以刻划该集合中的元素的性质。例如，

$$B=\{x：x\text{是一个整数}，x>0\}$$

读作“B是这样的x的集合，使得x是整数，并且x大于0”，它表示其元素是正整数的集合B。一个字母，通常是x，用以表示集合中元素的代表；冒号读作“使得”而逗号读作“并且”。

例1.1（a）　集合A也可写为

$$A=\{x：x\text{是英语字母}，x\text{是元音字母}\}$$

可以看出$b\notin A$，$e\in A$以及$p\notin A$。

（b）　我们是不能列出上述集合B的全部元素的，但我们常常如下指定这一集合：

$$B=\{1,2,3,\cdots\},$$

这时我们假定大家都明白这种写法的含义。可以看出$8\in B$但$-6\notin B$。

（c）　令$E=\{x：x^2-3x+2=0\}$。换言之，E是由方程$x^2-3x+2=0$的解组成的集合，有时称为给定方程的解集。因为方程的解是1和2，我们也可以写为$E=\{1，2\}$。

（d）　令$E=\{x：x^2-3x+2=0\}$，$F=\{2，1\}$，$G=\{1,2,2,1,6/3\}$。

那么$E=F=G$。可以看到，一个集合并不决定于它的元素的展示方法。集合的元素被重复或重新排列，集合并不改变。

有些集合在本书中将频繁出现，我们用特定的符号表示它们。除非特别说明，我们置：

N = 正整数的集合：1，2，3，…

Z = 整数的集合：…，−2，−1，0，1，2，…

Q = 有理数的集合

R = 实数的集合

C = 复数的集合

有时，即使集合的元素能够列出，但可能在实际上做不到。例如，尽管在理论上可以，但在实际上并不能列出全体在1976年间出生的人组成的集合的元素。因此，我们仅当集合只有很少几个元素时才用列举元素的方法来描述该集合；否则，我们用刻画其元素的性质来描述集合。

可以用性质来描述集合这一事实，被形式地表述为**概括原理**。

概括原理：任意给定集合U和性质P，存在一个集合A，使得A的元素恰为U中满足性质P的那些元素。

1.2 全集与空集

在任何一个集合论的应用当中，所研究的集合的元素总是属于某个固定的大集合，它被称作**全集**或**论域**。例如，在平面几何中，全集由平面上全体的点组成；而在人口研究中，全集由世界上的所有的人组成。我们将用符号

$$U$$

表示全集，除非另加说明。

对于给定的集合U和性质P，U中可能没有任何元素具有性质P。例如，集合

$$S=\{x:\ x\text{是正整数},\ x^2=3\}$$

没有任何元素，因为没有正整数具有所要求的性质。

没有元素的集合称为**空集**，用符号

$$\varnothing$$

表示之。根据外延性公理可知，只有一个空集。换言之，如果S和T均为空集，则$S=T$，因为它们有恰巧相同的元素，即一个元素也没有。

1.3 子集

如果集合A的每一个元素也是集合B的元素，那么称A是B的**子集**。我们也说A包含在B中，或B包含A。这一关系记作

$$A\subset B\ ,\quad B\supset A\ 。$$

如果A不是B的子集，即至少有一个A的元素不属于B，我们记为$A\not\subset B$或$B\not\supset A$。

例1.2（a） 考虑集合

$$A=\{1,3,4,5,8,9\}\quad B=\{1,2,3,5,7\}\quad C=\{1,5\}$$

因为C的元素1，5也是A、B的元素，因而$C\subset A$、$C\subset B$。但$B\not\supset A$，因为B的有些元素，象2和7，不属于A。另外，由于A、B、C的元素也必然在全集U中，因此U必定至少包含集合$\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$。

（b） 设N，Z，Q和R如1.1节定义，那么

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

（c） 集合$E=\{2,4,6\}$是集合$F=\{6,2,4\}$的子集，因为E的每个元素也属于F。事实上$E=F$。用类似的方式可以证明，每个集合是它自身的子集。

任一集合A是全集U的子集，因为根据定义，A的所有元素属于U。此外，集合$\varnothing$是任一集合A的子集。

正如上面指出的，任一集合A是它自身的子集，因为A的元素属于A是再明白不过的了。

如果集合A的每个元素属于B，B的每个元素又属于集合C，那么显然A的每一元素也是C的元素。也就是说，如果$A\subset B$并且$B\subset C$，那么$A\subset C$。

如果$A\subset B$并且$B\subset A$，那么A、B有相同的元素，即$A=B$。反之，若$A=B$，那么$A\subset B$并且$B\subset A$，因为每一集合都是自己的子集。

我们将这些结果形式地叙述为

定理1.1： （i）对任一集合A，$\varnothing\subset A\subset U$。

（ii）对任一集合A，$A\subset A$。

（iii）如果$A\subset B$并且$B\subset C$，那么$A\subset C$。

（iv）$A=B$当且仅当$A\subset B$并且$B\subset A$。

如果$A\subset B$，那么$A=B$仍然是可能的。若$A\subset B$但$A\neq B$，我们则称A是B的**真子集**。（有些作者用$A\subseteq B$表示A是B的子集，而用$A\subset B$表示A是B的真子集）例如，如果

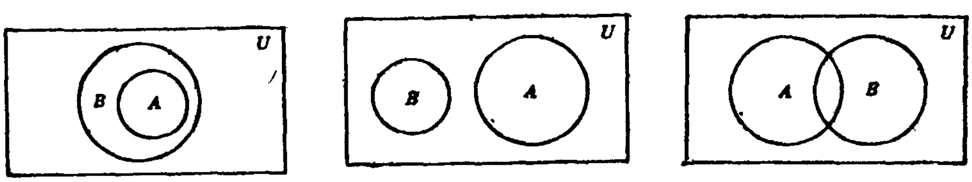
$$A=\{1,3\} \quad B=\{1,2,3\} \quad C=\{1,3,2\}$$

那么A、B都是C的子集；但A是C的真子集，而B不是C的真子集，因为$B=C$。

1.4 文氏图解

文氏（Venn）图解是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图示。全集U用一个矩形的内部表示，其他集合则用矩形内的圆面来表示。如果$A\subset B$，那么表示A的圆面将完全落在表示B的圆面内，如图1-1(a)。如果A和B是不交的，即没有公共的元素，那么表示A的圆面将同表示B的圆面分开，如图1-1(b)。

然而当A和B是两个任意的集合时，可能会是：有些元素在A中但不在B中，有些元素在B中却不在A中，有些元素同时在A和B中，有些元素则既不在A中又不在B中。因此，我们一般如图1-1(c)那样来表示任意两个集合A、B。



(a)A⊂B　　(b)A与B不交　　(c)

图 1—1

1.5 集合运算

两个集合A和B的并，用$A\cup B$表示，是属于A或者属于B的所有那些元素构成的集

合：

$$A\cup B=\{x:\ x\in A\text{或}x\in B\}。$$

这里的“或”是指可兼的“或”。（即同时属于A、B的x也在$A\cup B$中——译者注）

两个集合A和B的**交**，用$A\cap B$表示，是所有那些同时属于A和B的元素所构成的集合：

$$A\cap B=\{x:\ x\in A\text{并且}x\in B\}。$$

如果$A\cap B=\varnothing$，也就是说如果A和B没有公共元素，那么A、B被称为是**不交**的。

集合B对于集合A的**相对补**，或简言之，集合A和B的**差**，用$A\setminus B$表示，是属于A但不属于B的所有元素构成的集合：

$$A\setminus B=\{x:\ x\in A\text{并且}x\notin B\}。$$

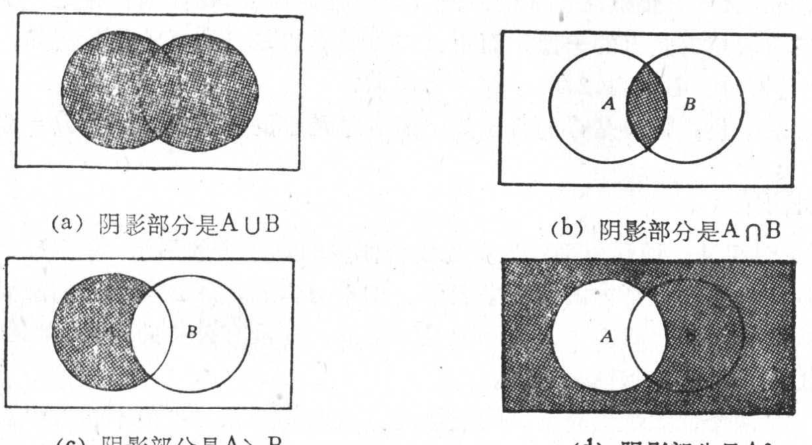
集合$A\setminus B$读作“A减去B”。许多教科书用$A-B$代替$A\setminus B$。

如前所说，在一个特定的时候里，所有被考虑的集合均被看作一个固定的全集U的子集。集合A的**绝对补**，或简称集合A的**补**，用A^c表示，是属于U但不属于A的元素构成的集合：

$$A^c=\{x:\ x\in U,\ x\notin A\}。$$

也就是说，A^c是全集U和A的差。有些教科书用A'表示它。

我们分别画出集合$A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$与A^c的文氏图解（图1-2），以说明上述集合的运算。



(a) 阴影部分是A∪B　　(b) 阴影部分是A∩B

(c) 阴影部分是A╲B　　(d) 阴影部分是A^c

图 1—2

例1.3　设$A=\{1,2,3,4\}$　$B=\{3,4,5,6\}$，这时$U=\{1,2,3,\cdots\}$，即正整数集。那么：

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}\qquad A\cap B=\{3,4\}$$

$$A\setminus B=\{1,2\}\qquad A^c=\{5,6,7,\cdots\}$$

下面的定理指出了集合的包含与并、交运算之间的关系。

定理1.2：　以下三式是等价的：

$$A\subset B,\ A\cap B=A,\ A\cup B=B。$$

（注：本定理在习题1.21中证明。另一些与$A\subset B$等价的条件在习题1.31中给出）

1.6　集合代数与对偶性

在上述运算下，集合满足表1.1所示的各个定律或恒等式。事实上我们形式地叙述为：

定理1.3： 集合满足表1.1中的定律。

表1.1　　　　**集合代数定律**

1.幂等律	a. $A\cup A=A$	b. $A\cap A=A$
2.结合律	a. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	b. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
3.交换律	a. $A\cup B=B\cup A$	b. $A\cap B=B\cap A$
4.分配律	a. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
5.么元律	a_1. $A\cup\varnothing=A$	b_1. $A\cap U=A$
	a_2. $A\cup U=U$	b_2. $A\cap\varnothing=\varnothing$
6.对合律	$(A^c)^c=A$	
7.补元律	a_1. $A\cup A^c=U$	b_1. $A\cap A^c=\varnothing$
	a_2. $U^c=\varnothing$	b_2. $\varnothing^c=U$
8.狄摩根律(De Morgan)	a. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$	b. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

我们来介绍两种证明有关集合运算等式的方法。第一种方法是，分别讨论当x是等式两边的每一边的元素时的含义；第二种方法是用文氏图解。试考虑狄摩根律的第一个等式

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

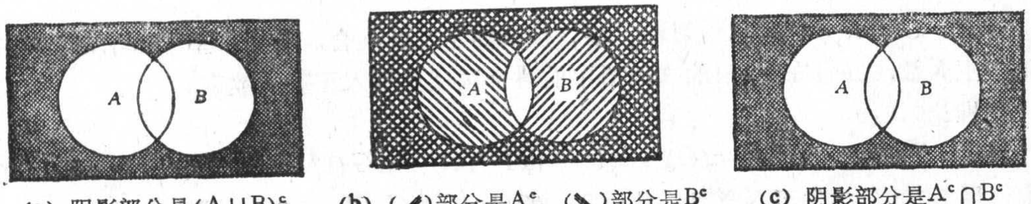
方法1. 我们首先证明$(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$。若$x\in(A\cup B)^c$，那么$x\notin A\cup B$。于是$x\notin A$并且$x\notin B$，因而$x\in A^c$、$x\in B^c$。故$x\in A^c\cap B^c$。

再证$A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$。设$x\in A^c\cap B^c$，那么$x\in A^c$且$x\in B^c$，于是$x\notin A$、$x\notin B$。从而$x\notin A\cup B$，故$x\in(A\cup B)^c$。

我们证明了：$(A\cup B)^c$的每个元素都属于$A^c\cap B^c$，以及$A^c\cap B^c$的每个元素都属于$(A\cup B)^c$。合起来，这两包含式证明了这两集有相同的元素，亦即$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$。

（注：我们暗中引用了一条类似的逻辑定律，它将在第11章中讨论）

方法2. 由图1-2中$A\cup B$的文氏图解，我们可知$(A\cup B)^c$被图1-3(a)中的阴影部分所示。为了找出$A^c\cap B^c$，即既在A^c中又在B^c中的区域，我们用一个方向的斜线标出A^c，用另一个方向的斜线标出B^c，如图1-3(b)。那么$A^c\cap B^c$就被交叉的网状部分所表示，也就是图1-3(c)中的阴影部分。因为$(A\cup B)^c$和$A^c\cap B^c$被相同的部分所表示，所以它们是相等的。



(a) 阴影部分是$(A\cup B)^c$　　(b) (／)部分是A^c，(＼)部分是B^c　　(c) 阴影部分是$A^c\cap B^c$

图 1—3

读者也许会奇怪，为什么表1.1中的恒等式是成对排列的，例如第2行的a与b。现在我们来考虑这样排列的原理。设E是集合代数的等式，E的**对偶**E^*，是指E中的$\cup$、$\cap$、U和$\varnothing$的每一个出现分别换为$\cap$、$\cup$、$\varnothing$及U后得到的等式。例如$(U\cap A)\cup(B\cap A)=A$的对偶是$(\varnothing\cup A)\cap(B\cup A)=A$。可以看出，表1.1中成对的定律都是互相对偶的。如果等式E是一恒等式，那么它的对偶也是恒等式。集合代数中的这一事实称为**对偶原理**。

1.7 有穷集合与计数原则

一个集合称为是**有穷的**，如果它恰有m个不同的元素，而m是某个非负整数。否则称这个集合是**无穷的**。例如空集$\varnothing$和英文字母表中字母的集合都是有穷的，而正偶数集$\{2,4,6,\cdots\}$是无穷的。

如果集合A是有穷的，我们用$n(A)$表示A中元素的个数。有些教科书用$\#(A)$代替$n(A)$。

引理1.4：如果A和B是不交的有穷集，那么$A\cup B$是有穷的，并且

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

证明：计算$A\cup B$元素个数时，先计算A的元素，它们是$n(A)$个。$A\cup B$的其他元素必然只是B的元素，而不是A的。但是由于A和B是不交的，B的元素决不会在A中，因此这些元素有$n(B)$个。从而，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$。

即使A、B是有公共元素的，我们也有一个计算$n(A\cup B)$的公式，它在习题1.22中得到证明。

定理1.5：如果A、B是有穷集，那么$A\cup B$和$A\cap B$也是有穷集，而且

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

利用这一结果，可以得到关于三个集合的类似公式。

推论1.6：如果A、B和C是有穷集，那么$A\cup B\cup C$也是有穷集，而且

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

利用数学归纳法（1.10节），可以将上述结果进一步推广到任何有穷多个集合的情况。

例1.4 假定某学院数学系的120名学生中有100名至少学习法语、德语及俄语等三种语言中的一种。而且假定：

65名学习法语，
45名学习德语，
42名学习俄语，
20名学习法语和德语，
25名学习法语和俄语，
15名学习德语和俄语。

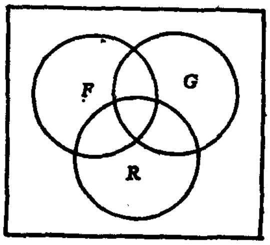


图 1—4

令F、G、R分别表示学习法、德、俄语的学生的集合。我们希望求出学习所有三种语言的学生人数，并且在图1-4的文氏图中的各个区域里填入正确的数字。

据推论1.6：

$$n(F\cup G\cup R)=n(F)+n(G)+n(R)-n(F\cap G)-n(G\cap R)-n(F\cap R)+n(F\cap G\cap R)$$

然而，因为100名学生至少学习一种语言，所以$n(F\cup G\cup R)=100$。代入上式

$$100=65+45+42-20-25-15+n(F\cap G\cap R),$$

故而$n(F\cap G\cap R)=8$，即有8个学生学习全部三种语言。

现在我们用这一结果来填写文氏图。有：

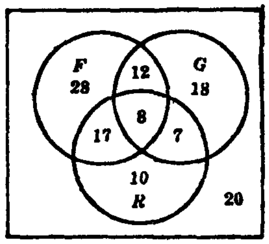


图 1—5

8个学生学习全部三种语言，

$20-8=12$个学生学习法语、德语，但不学俄语，

$25-8=17$个学生学习法语、俄语，但不学德语，

$15-8=7$个学生学习德语、俄语，但不学法语，

$65-12-8-17=28$，28个学生仅学法语，

$45-12-8-7=18$，18个学生仅学德语，

$42-17-8-7=10$，10个学生仅学俄语，

$120-100=20$，20个学生不学三种语言中的任何一种。

据此，填完的文氏图如图1-5。可知，$28+18+10=56$，有56个学生仅学一门语言。

1.8 集合的类与幂集

给定集合A，我们会要谈到它的某些子集，于是便要考虑集合的集合。遇到这种情况时，为了避免混淆，我们称它们为集合的**类**或集合的**族**，不称它们是集合的集合。当我们考虑的是给定集合类中的一些集合时，我们则称这些集合构成的类为原集合类的**子类**或**子族**。

例1.5 设$A=\{1,2,3,4\}$。令**A***是A的恰巧含3个元素的那些子集的类。那么

$$\mathbf{A}=\{\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\}\}$$

A的元素是集合$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$和$\{2,3,4\}$。

令**B**是A的一些子集的类，这些子集均含有元素2并且含有A的另外两个元素。那么

$$\mathbf{B}=\{\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{2,3,4\}\}$$

B的元素是集合$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$及$\{2,3,4\}$。从而**B**是**A**的子类，因为**B**的每一个元素都是**A**的元素。

对于给定的集合A，我们可以讨论它的全体子集的类。这个类被称为A的**幂集**，用$\mathbf{P}(A)$表示之。若A是有穷的，那么$\mathbf{P}(A)$也是有穷的。此外，$\mathbf{P}(A)$中元素的个数是2的$n(A)$次方幂：

$$n(\mathbf{P}(A))=2^{n(A)}。$$

为此，A的幂集有时用2^A来表示。

例1.6 设$A=\{1,2,3\}$，那么

$$\mathbf{P}(A)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ A\}$$

注意，空集$\varnothing$属于$\mathbf{P}(A)$，因为$\varnothing$是A的子集。类似地，A属于$\mathbf{P}(A)$。还须注意，$\mathbf{P}(A)$有$2^3=8$个元素。

1.9 论证与文氏图解

许多语言中的语句可以译成关于集合的等价语句，而后者可以用文氏图解来描述。因此，文氏图解常常可用来决定一个论证的正确性。

---

*原文为花写体字母，由于印刷技术上的原因，本书改用黑体字母，特此说明。——译者

例1.7 考察下列论证，它选自《Alice漫游记》的作者Lewis Carroll的一本关于逻辑的书中：

S_1：我的那些炒锅是我仅有的用洋铁制的东西。

S_2：我觉得你的礼物都非常有用。

S_3：我的任何炒锅都没有一点用处。

S：你给我的礼物不是用洋铁制的。

这里，横线上面的语句S_1，S_2和S_3表示前提，横线以下的语句S是结论。我们来判定，结论S是否能从前提推出，也就是说，S是否是正确的结论。

据S_1，我的洋铁制件包含在炒锅的集合之中，因此可画出文氏图如图1-6。

据S_2，炒锅的集合与有用东西的集合是不交的，因此可画出图1-7。

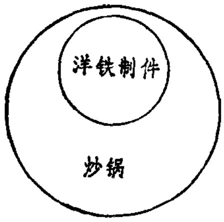
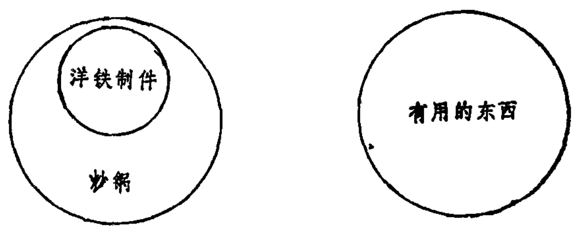


图1—6



(a) (b)

图1—7

据S_2，“你的礼物”的集合是有用东西的集合的子集，因此可画出图1-8。

图 1—8

从以上文氏图解可以看出结论显然是正确的，因为“你的礼物”的集合与“洋铁制件”的集合是不交的。

1.10 数学归纳法

在许多证明中用到的、集合$N = \{1,2,3,\cdots\}$的一个基本性质是：

第一数学归纳法原理：

设P是定义在正整数集N上的一个命题，即对每一N中的n，$P(n)$或真、或假。如果P有下述两个性质：

(i) $P(1)$真。

(ii) 只要$P(n)$真，$P(n+1)$也真。

那么，P对一切正整数均真。

我们将不证明这一原理。事实上，在公理化正整数论中，这一原理通常作为一条公理给出。

例1.8　令P是命题：前n个奇数的和是n^2；即

$$P(n):\ 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

（第n个奇数是$2n-1$，而下一个奇数是$2n+1$）对$n=1$可知$P(n)$真，因为

$$P(1):\ 1=1^2$$

假定$P(n)$真，在$P(n)$的两边同时加上$2n+1$得：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)$$
$$=(n+1)^2$$

它就是$P(n+1)$。因此，当$P(n)$为真时，$P(n+1)$亦真。根据数学归纳法原理，P对一切n均真。

数学归纳法的另外一个形式有时用起来更方便。虽然它看起来不相同，但它实际上等价于上述归纳法原理。

第二数学归纳法原理：

设P是定义在正整数N上的一个命题，使得：

(i) $P(1)$真。

(ii) 只要$P(k)$对一切k，$1\leqslant k<n$，真，$P(n)$亦真。

那么P对一切正整数均真。

题　　解

集合与子集

1.1　集合：$\{r,t,s\}$，$\{s,t,r,s\}$，$\{t,s,t,r\}$，$\{s,r,s,t\}$中哪些是相等的？

解：它们全部相等，因为元素的次序改变和重复不改变集合。

1.2　列出下列集合的元素；其中$N=\{1,2,3,\cdots\}$。

(a)　$A=\{x:\ x\in N,\ 3<x<12\}$

(b)　$B=\{x:\ x\in N,\ x\text{是偶数},\ x<15\}$

(c)　$C=\{x:\ x\in N,\ 4+x=3\}$

解：(a)　A由3与12之间的正整数组成，因此

$$A=\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

(b)　B由小于15的偶正整数组成，因此

$$B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$$

(c)　没有正整数满足条件$4+x=3$，因此C不含任何元素。换句话说，$C=\varnothing$，C是空集。

1.3　证明$A=\{2,3,4,5\}$不是$B=\{x:\ x\in N,\ x\text{是偶数}\}$的子集。

解：必须证明A中至少有一个元素不属于B。因$3\in A$而B由偶数组成，$3\notin B$，故A不是B的子集。

1.4　考虑下列集合：

$\varnothing$，$A=\{1\}$，$B=\{1,3\}$，$C=\{1,5,9\}$，$D=\{1,2,3,4,5\}$

$E=\{1,3,5,7,9\}$，$U=\{1,2,\cdots,8,9\}$

用$\subset$或$\not\subset$联结以下各对集合：

（a）$\varnothing$，A （b）A，B （c）B，C （d）B，E

（e）C，D （f）C，E （g）D，E （h）D，U

解：（a） $\varnothing\subset A$，因为$\varnothing$是任一集合的子集。

（b） $A\subset B$，A仅有元素1，而1属于B。

（c） $B\not\subset C$，因为$3\in B$但$3\notin C$。

（d） $B\subset E$，因B的元素也属于E。

（e） $C\not\subset D$，因为$9\in C$但$9\notin D$。

（f） $C\subset E$，因C的元素也属于E。

（g） $D\not\subset E$，因为$2\in D$但$2\notin E$。

（h） $D\subset U$，因D的元素也属于U。

集合运算

在习题1.5—1.7中，设$U=\{1,2,\cdots,8,9\}$，并且

$A=\{1,2,3,4,5\}$ $C=\{5,6,7,8,9\}$ $E=\{2,4,6,8\}$

$B=\{4,5,6,7\}$ $D=\{1,3,5,7,9\}$ $F=\{1,5,9\}$

1.5 求（a） $A\cup B$与$A\cap B$ （d） $D\cup E$与$D\cap E$

（b） $B\cup D$与$B\cap D$ （e） $E\cup E$与$E\cap E$

（c） $A\cup C$与$A\cap C$ （f） $D\cup F$与$D\cap F$

回顾并集$X\cup Y$，它由X中及Y中（包括同时在两者中）的元素组成；而交集$X\cap Y$是由既在X中又在Y中的元素组成。

解：（a） $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $A\cap B=\{4,5\}$

（b） $B\cup D=\{1,3,4,5,6,7,9\}$ $B\cap D=\{5,7\}$

（c） $A\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=U$ $A\cap C=\{5\}$

（d） $D\cup E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=U$ $D\cap E=\varnothing$

（e） $E\cup E=\{2,4,6,8\}=E$ $E\cap E=\{2,4,6,8\}=E$

（f） $D\cup F=\{1,3,5,7,9\}=D$ $D\cap F=\{1,5,9\}=F$

由于$F\subset D$，所以据定理1.2我们当然有

$D\cup F=D$，$D\cap F=F$。

1.6 求（a） A^c和B^c （c） $A\setminus B$和$B\setminus A$

（b） D^c和E^c （d） $D\setminus E$和$F\setminus D$

回顾余集X^c，它是由U中不属于X的元素组成的，而差集$X\setminus Y$则是由X中不属于Y的元素组成的。

解：（a） $A^c=\{6,7,8,9\}$ $B^c=\{1,2,3,8,9\}$

（b） $D^c=\{2,4,6,8\}=E$ $E^c=\{1,3,5,7,9\}=D$

（c） $A\setminus B=\{1,2,3\}$ $B\setminus A=\{6,7\}$

(d) $D \setminus E=\{1,3,5,7,9\}=D$　　$F \setminus D=\varnothing$

1.7　求(a)　$A \cap(B \cup E)$　　(c)　$(A \cap D) \setminus B$

　(b)　$(A \setminus E)^c$　　(d)　$(B \cap F) \cup(C \cap E)$

解：(a)　首先计算$B \cup E=\{2,4,5,6,7,8\}$，于是$A \cap(B \cup E)=\{2,4,5\}$。

(b)　$A \setminus E=\{1,3,5\}$，从而$(A \setminus E)^c=\{2,4,6,7,8,9\}$。

(c)　$A \cap D=\{1,3,5\}$，而$(A \cap D) \setminus B=\{1,3\}$。

(d)　$B \cap F=\{5\}$，$C \cap E=\{6,8\}$，因此$(B \cap F) \cup(C \cap E)=\{5,6,8\}$。

1.8　给定$A=\{$Ann, Alice, Audrey$\}$

$B=\{$Ann, Audrey, Ellen$\}$

$C=\{$Alice, Audrey, Betty, Ellen$\}$

$D=\{$Ann, Alice, Betty, Ellen$\}$*

求(a)　$A \cup B$和$C \cup D$　　(c)　$B \setminus C$和$D \setminus A$

　(b)　$A \cap C$和$B \cap D$　　(d)　$(A \cap D) \cup(C \setminus B)$

解：(a)　$A \cup B=\{$Ann, Alice, Audrey, Ellen$\}$

$C \cup D=\{$Ann, Alice, Audrey, Betty, Ellen$\}$

(b)　$A \cap C=\{$Alice, Audrey$\}$　　$B \cap D=\{$Ann, Ellen$\}$

(c)　$B \setminus C=\{$Ann$\}$　　$D \setminus A=\{$Betty, Ellen$\}$

(d)　先算$A \cap D=\{$Ann, Alice$\}$及$C \setminus B=\{$Alice, Betty$\}$。

于是$(A \cap D) \cup(C \setminus B)=\{$Ann, Alice, Betty$\}$。

1.9　证明：即使没有$B=C$，我们仍可以有$A \cap B=A \cap C$。

解：设$A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$而$C=\{2,4\}$。$A \cap B=\{2\}$，$A \cap C=\{2\}$。

这样$A \cap B=A \cap C$但$B \neq C$。

文氏图解

1.10　在图1-9的文氏图中画出集合(a)　$A \cap B^c$和(b)　$(B \setminus A)^c$。

解：(a) 如图1-10(a)所示，用一个方向的斜线(////)画出A，又用另一个方向的斜线(\\\\)画出B^c，即B之外的区域；交织网状区域便表示交$A \cap B^c$，它在图1-10(b)中用阴影标出。可以看出$A \cap B^c=A \setminus B$

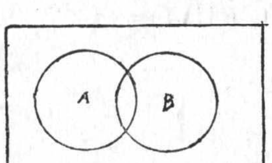
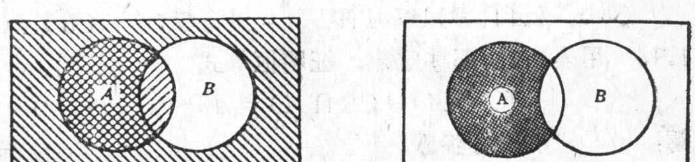


图1—9



(a)　(////)部分是A，(\\\\)部分是B^c

(b)　阴影部分是$A \cap B^c$

图 1—10

* 这里A、B、C、D是英文人名的集合。本书译文中，除涉及重要数学定理、数学问题、数学工具等的人名译成中文(并指出原文)外，其他人名均不译成中文。——译注