

壳体结构的工程分析方法

李 炳 威

人 民 交 通 出 版 社



壳体结构的工程分析方法

(弹性地基梁比拟法)

李炳威

人民交通出版社

1977年·北京

内 容 简 介

本书是介绍采用弹性地基梁比拟法对壳体结构进行计算的书籍,即应用弹性地基梁比拟法建立一些工程上常见的壳体的基本方程和计算公式,这较之现有的从一般理论出发推演出各种型式的基本方程的方法不仅物理概念通俗易懂,受力特征直观明确,而且计算方法易于为广大工程技术人员所掌握,便于计算,便于应用。

全书共分十三章,鉴于我国电子计算机迅速发展,有限单元法正开始推广应用于各种工程。在本书第十三章介绍了用有限单元法分析薄板与壳体结构。

本书可供公路桥梁工程技术人员及其他有关专业技术人员学习参考。

壳体结构的工程分析方法

(弹性地基梁比拟法)

李炳威

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

北京市书刊出版业营业许可证出字第006号

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/32 印张: 15 字数: 343 千

1977年8月 第1版

1977年8月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—8,500册 定价(科四): 1.55元

(限国内发行)

序 言

随着祖国社会主义建设蓬勃发展，壳体结构得到了巨大发展。工业交通与基本建设战线上的广大工人和科技工作者遵照毛主席的教导：“我们不能走世界各国技术发展的老路，跟在别人后面一步一步地爬行。我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。”大搞技术革新和技术革命，使壳体结构在航空、造船、建筑、化工、机械与公路等各个工程技术部门里得到了广泛的应用，充分地发挥了壳体结构的优越性，为国家节省了三大主材，减少了人力消耗和投资，加快了建设的进度。在壳体结构的理论分析，实验研究，制造与施工工艺等各个方面都取得了很大的进展和丰硕的成果。壳体结构的应用范围在不断扩大。但是壳体结构的进一步扩大与普及遇到的困难之一，就是数学上解算的困难。现有文献大都是从壳体的一般理论出发，推演出各种型式的基本方程，壳体受力特性不形象直观，物理概念不通俗易懂。对于工程应用来说，数学如不是纯粹作为工程计算的工具（这里是指对工程应用而言，并不排斥在壳体理论研究中、充分利用数学科学的成果，但是壳体理论的研究必须坚持理论与生产实践紧密结合的原则。）完全摒弃形象直观，过多的数学演绎与方程变换，就会使一大堆数学符号掩盖了壳体受力的实质内容，使人望而生畏、难于理解、难于应用。虽然我国科技工作者在简化壳体计算的研究方面曾取得了很多成果，而进一步简化壳体结构计算的工程分析

方法，使能为广大工程技术人员所掌握，仍是壳体结构理论与实践的一个重要课题。

如果研究某些壳体的受力情况后，可以发现，当从这些壳体中取出一个纵条或一个单元体来，它们除在壳面受有荷载外，在纵条的两侧或单元体的四周，还受有与壳体径向位移成正比法向力的合力的作用，这就形成了一面受力二面或四面抵抗的趋势，由于这个法向力的合力与壳体的径向位移成正比，它就相当于弹性地基的反力，壳体的受力特性就相当于弹性地基上的梁或板；壳体由于具有一定的原始曲度，就等于增添了一个弹性地基。这样，我们就可以把一些壳体的计算比拟成弹性地基梁或板的计算问题。弹性地基梁是工程技术人员比较熟悉的工程计算问题，因此，应用弹性地基梁比拟法来建立一些工程上常见的壳体的基本方程和计算公式，不仅物理概念通俗易懂，受力特征直观明确，计算方法易于为大家所掌握，便于分析，便于计算；同时可以把弹性地基梁的理论成果应用到壳体的计算中来，进一步丰富与发展壳体的计算理论。

把壳体比拟成弹性地基上的梁是早已提出来的了，但是并没有被充分重视，作为壳体计算的一种分析方法没有被充分应用，近年来国内外发表的有关壳体的简化计算方法，追其壳体的力学模型，很多方法实质上就是把弹性地基梁或板当作壳体的计算模型，从而简化了壳体的计算。由此可见，以弹性地基梁作为壳体有矩理论和边界效应的力学模型，不仅可以简化基本方程的推演，而且可以使壳体受力特征形象直观，计算方法易于掌握，为简化壳体计算的有效途径。

结合当前壳体结构应用于公路桥梁生产实践的需要，壳体结构受有一列汽车轮压的情形是壳体工程应用中的一个新课题，本书中研究了壳体承受一个集中荷载和一系列集中荷载

作用时的简化计算。

关于壳体的薄膜理论，本书仅选择了具有典型性的双曲扁壳在书的开头作了简要的论述，其他诸如圆柱形壳、旋转面壳的薄膜内力公式均在以后各章中作为壳体有矩理论非齐次方程式的特解和计算壳体边界效应的形变协调方程式中的荷载项顺便给出。

李 炳 威

目 录

第一章 绪 论	1
第一节 壳体的受力特性	1
第二节 壳体的分类与组成	4
第三节 壳体的内力	8
第二章 双曲扁壳的薄膜理论	10
第一节 薄膜理论的平衡微分方程式	10
第二节 椭圆抛物面扁壳的薄膜内力解	16
第三节 扁球型扁壳的薄膜内力解	25
第四节 矩形底边球面扁壳的薄膜内力解	26
第五节 有限差分法解薄膜理论平衡微分 方程式	30
第三章 弹性地基上的梁	38
第一节 弹性地基梁的挠曲线微分方程式	38
第二节 弹性地基上无限长梁	40
第三节 无限长梁受有多个集中荷载的作用	45
第四章 圆柱壳在轴对称荷载作用下的有矩理 论和边界效应	48
第一节 圆柱壳的有矩理论	48
第二节 薄壁圆柱容器和圆形水池的边 界效应	54
第五章 四边简支双曲扁壳的简化计算	62
第一节 简化计算的假定与壳体的基本方程式	62
第二节 弹性地基梁比拟法计算四边简支不等 曲率双曲扁壳	63

第三节	例 题	68
第六章	弹性地基上的板和四边简支球形扁壳的有矩理论	72
第一节	弹性地基上的板	72
第二节	四边简支球形扁壳的有矩理论	74
第三节	双重三角级数解法	79
第四节	有限差分法解法	83
第五节	四边简支球形扁壳角点附近的顺剪力和扭矩	90
第七章	双曲扁壳在集中荷载作用下的简化计算	92
第一节	弹性地基上的无限板	92
第二节	球形扁壳在集中荷载作用下的位移与内力解	95
第三节	不等曲率双曲扁壳在集中荷载作用下位移与内力的修正解	105
第八章	球形扁壳在一系列集中荷载作用下的简化计算	110
第一节	在一系列等间距集中荷载作用下的弹性地基上无限板	110
第二节	壳体中面的内力	118
第三节	例 题	126
第九章	地基系数变化的弹性地基上变截面梁和圆锥形壳体的有矩理论	145
第一节	地基系数变化的弹性地基上变截面梁	145
第二节	变截面圆柱形水池	146
第三节	圆锥壳的有矩理论	152
第十章	弹性地基上的圆拱和旋转壳在轴对称	

荷载作用下的边界效应	162
第一节 弹性地基上的圆拱	162
第二节 圆球形壳体的边界效应	166
第三节 椭球形壳体的边界效应	178
第四节 任意旋转壳边界效应的近似计算	181
第十一章 球形扁壳开孔引起的应力集中问题	184
第一节 在任意法向荷载作用下的无限壳	184
第二节 球形扁壳在环行线荷载作用下的计算	188
第三节 球形扁壳在环行线力偶矩作用下 的计算	194
第四节 球形扁壳开孔问题	198
第十二章 用能量原理和变分法计算壳体结构	208
第一节 最小位能原理	208
第二节 虚位移原理	214
第三节 用变分法计算四边简支球形扁壳 的位移与内力	224
第四节 四边简支球形扁壳的动力计算	229
第十三章 用有限单元法分析薄板与壳体结构	235
第一节 有限单元法的基本原理	236
第二节 有限单元法分析平面问题	245
第三节 有限单元法分析平板的弯曲问题	263
第四节 有限单元法计算四边简支矩形底 球形扁壳	283
第五节 有限单元法计算壳体结构	289
附录 1 贝塞尔函数理论的若干知识	309
附录 2 矩 阵	316
附录 3 计算用表	325

第一章 绪 论

第一节 壳体的受力特性

原始形状具有一定曲度的薄板称为壳体，壳体结构是表面呈曲面，厚度与其他尺寸相比甚为微小的一种薄壁空间结构。和杆件结构中的梁与拱相类似，壳体由于存在原始曲度，它和平板是两种受力性能完全不同的结构类型。壳体结构的强度和刚度主要是利用了几何形状的合理，而不是从增大它的体量取得的。因而，壳体结构是一种强度高、刚度大、材料省、既经济又合理的结构型式。

远在公元前二百多年的西汉王朝，用砖砌圆顶来建造陵墓，以及在晋朝可能还要早些时候，拱已应用于桥梁的历史记载，生动地证明了一切真知只能从社会的实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验中来这个真理。古代劳动人民根据在生产实践中累积起来的直接经验，早已掌握了拱与圆顶结构的优良性能，充分表现了就地取材，最大限度地发挥材料效用的智慧。

工程结构的任务是承受荷载，传递荷载；若力从结构传到地基，走的途径愈直接，则结构受力性能就愈好，结构自重最轻，消耗材料最少。一根柱子要把一端承受的外力，传递到另一端的地基上〔图1-1(a)〕，当外力沿轴线以最直接的路线传达到地基时，构件内只产生沿轴向作用的直接压力，应力分布最均匀，材料的利用最充分。但是当外力偏离轴线

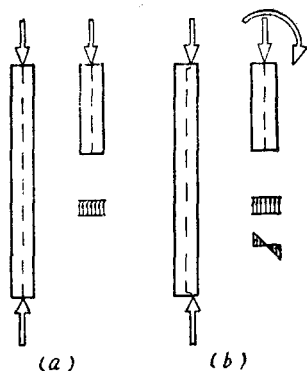


图 1-1

作用时〔图1-1(b)〕,力就要走“弯路”,使构件发生偏转,产生力矩,构件内部除产生沿轴向作用的直接压力外,还同时产生弯矩;由于弯曲产生的应力分布不均匀,偏心受压拉的材料就只能被局部利用。一根梁的任务是要把荷载传到两端支座上,在通常的情况下,梁承受的外力均垂直于轴线,因此,梁传递外力时,就要走相当的“弯路”〔图1-2(a)〕,力走的“弯路”愈长,在构件内产生的弯矩就愈大,事实上,例如等截面矩形梁的材料最多也只能发挥50%的作用。如果把梁的直线轴线改为曲线,且支座均为能够承受水平推力的固定支座,梁就演变为拱,这是两种受力性能完全不同的结构类型,当一两铰拱承受外力作用时,外力到达支座的传递路线称为压力线,压力线就好象一个倒置的索多边形,当拱的轴线与压力线完全重合时,拱的受力情形就和材料适用于受压的倒置的悬索完全一样〔图1-2(b)、(c)〕,力是最直接的途径传达到支座,拱截面内只产生轴向压力。由于应力分布均匀,可以最大限度地发挥材料的效用。平板与壳

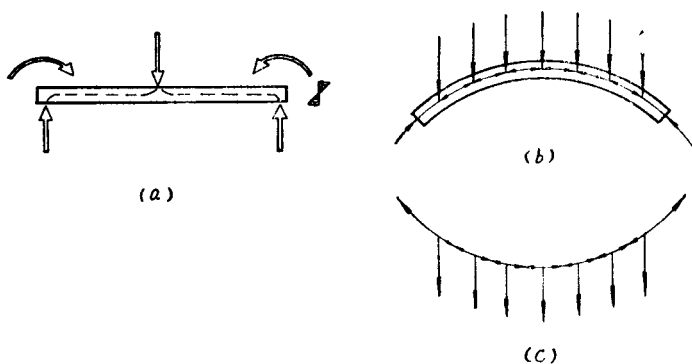


图 1-2

体的受力特性和杆件结构中的梁与拱相类似，平板主要是通过内力弯矩和扭矩来承受荷载和传递荷载，因此，材料发挥的效用最多也只是50%。如果将平板做成圆柱曲面，并在两端设置横隔板，平板就演变为圆柱形壳，受力性能发生了根本的变化（图1-3）。若设想用一内接于壳体曲面的多边褶皱板

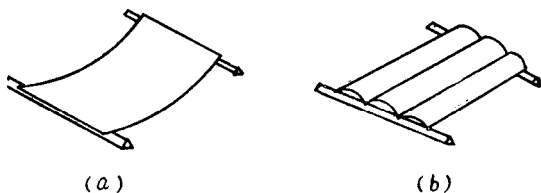


图 1-3

结构来代替圆柱壳〔图1-4(a)〕，则可以清楚地看到，多边褶皱板结构的荷载是通过纵横两个方向的工作，最后传达到支座的。作用在褶皱板上的荷载先由横向传递到两块板相交的棱边处，然后将作用在棱边处的力分解为两个沿板平面作用的分

力，这些分力再在纵向通过板本身作为梁传到两端支座〔图1-4(b)〕。反之，若设想增加板条数量减小每块板的宽度，使多边褶皱板结构无限趋近于圆柱壳，则板的横向弯矩随着板数的增加板宽即板的横向跨度的减小而迅速减小，圆柱壳在横向主要承受轴向压力；在纵向，由于板在自身平面内的刚度很大，而壳体结构沿壳面的刚度较多边褶皱板结构沿板面刚度之和就更大，因之它所要求的壳体厚度可以减至最小限度，这就可以说明为什么壳体结构耗费材料最少，重量最轻，却具有最大的承载能力，能跨越较大的跨度。

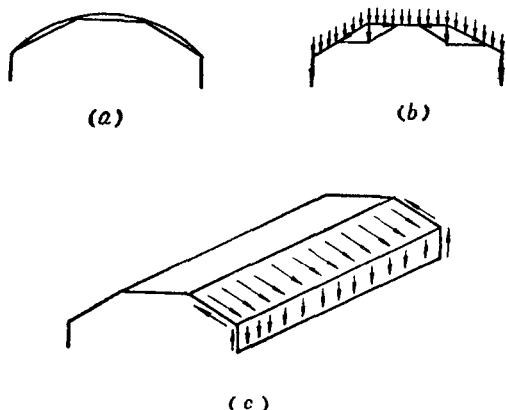


图 1-4

第二节 壳体的分类与组成

一、壳体的分类

壳体结构优良的受力性能，主要是利用了它的几何形状的合理，因此，形状对壳体的强度刚度有很大的影响，下面就壳体的曲率、几何形成把壳体进行分类。

(一)按高斯曲率,壳体可以分为三类:

曲面上每点的两个主曲率 k_1 和 k_2 的乘积称为曲面在此点的高斯曲率 K , 即

$$K = k_1 k_2 \quad (1-1)$$

1. $K > 0$, 即曲面上任一点的主曲率 k_1, k_2 均为正值, 这类壳体的原始形状只有一个方向的曲度, 或两个曲率中心在曲面的同一侧, 例如双曲扁壳。

2. $K = 0$, 即曲面上任一点的主曲率 k_1, k_2 中有一个为零 $k_1 (= k_2) = 0$, 例如圆柱壳。

3. $K < 0$, 即曲面上任一点的主曲率 k_1, k_2 为一正一负, 例如马鞍形壳 (双曲抛物面壳)。

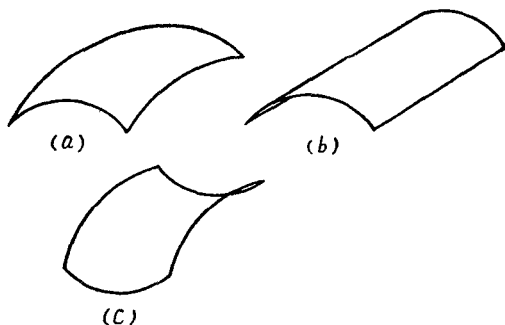


图 1-5

(二)按形成的几何过程,壳体可以分为两类:

1. 移动壳

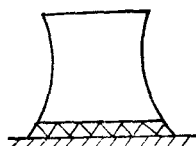
壳体的曲面由一竖向曲线沿另一竖向曲线平行移动所形成者称为移动壳, 图 1-5(a)、(b)、(c) 所示的椭圆抛物面壳, 柱形抛物面壳, 双曲抛物面壳都是移动壳。

2. 旋转壳

壳体的曲面由一平面曲线 (经线) 围绕其平面内的轴线旋转一周所形成者称为旋转壳, 图 1-6(a)、(b) 所示的球壳



(a) 球壳屋顶



(b) 双曲线旋转面
冷却塔

图 1-6

和双曲线旋转面壳就是分别以圆弧和双曲线为经线的旋转壳。

二、壳体的组成

圆柱壳由壳体、横隔与边梁三部分组成 (图1-7)。

横隔

由上述可知, 多边褶皱结构的荷载最终在纵向沿着板的平面传到支座。对于壳体而言, 就相当于荷载沿壳体截面的切线方向通过剪力传给支座 (图 1-8)。这就要求沿壳体曲线边缘处使壳体受到连续的支持, 在曲线边缘处支持壳体的构件称为横隔。横隔在自身平面内的刚度很大, 可以阻止壳体截面的变形, 但不能阻止壳体端部各点的纵向位移, 横隔

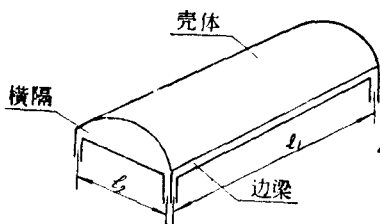


图 1-7



图 1-8

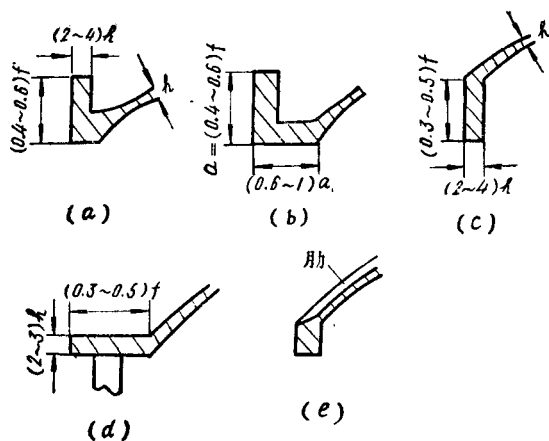


图 1-9

(a)边梁向上式；(b)宽沟边梁式；(c)边梁向下式；(d)水平板式；
(e)小肋式

的型式是多种多样的，它取决于跨度、建筑空间要求、支承情况等等。一般情形下，可以采用钢筋混凝土实体梁、双铰拱、空腹桁架等型式，视具体要求而定。

边梁

壳体的厚度很小，因此，在边缘处应予加强，沿壳体纵向边缘设置的侧边构件称为边梁，边梁为减小壳体水平位移所必需，同时也用于放置壳体的主受拉钢筋，边梁可有如图 1-9 所示的各种型式

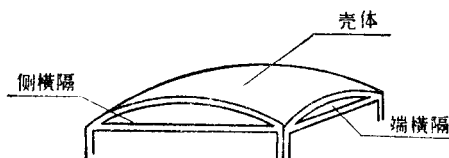


图 1-10

双曲扁壳则如图1-10所示由壳体、端横隔和侧横隔三部分组成。

第三节 壳体的内力

壳体中的内力可以分为两类：作用于中面内的薄膜内力和中面外的弯曲内力。

一、薄膜内力

蛋壳虽薄，却能承受相当大的荷载，这是因为壳体很薄时，壳体就象一个倒置的薄膜，理想的薄膜没有抵抗弯曲和扭曲的能力，只承受位于中面内的法向力 N_x 、 N_y 和顺剪力 $S_{xy} = S_{yx}$ 的作用〔图 1-11(a) 所示为薄膜内力的正值方向〕，这些内力统称为薄膜内力。薄膜内力是应中面的拉伸、压缩和剪切变形而产生的，由于薄膜内力沿壳体厚度方向均匀分布，材料的利用最充分，因此，当壳体主要通过薄膜内力传递荷载时，材料最省，重量最轻，强度与刚度很大，且可用脆性材料组成。自然界中各种生物，例如乌龟、甲鱼、蜗牛以及荔枝与栗子等外壳都系类似扁的或圆的等外形，壳壁很薄，它们是符合达尔文的物种演进原理，长期受到自然环境考验而演变过来的，可以作为壳体薄膜理论最好的例证。

壳体实现薄膜内力需要满足下列一些条件：（1）壳体具有均匀连续变化的曲面；（2）壳体上的荷载是均匀连续分布的；（3）壳体的各边界能够沿着曲面的法线方向自由移动，支座只产生阻止曲面切线方向位移的反力。

二、弯曲内力

当壳体厚度不是很小，抗弯刚度所起的作用不能不考虑，或者上述实现薄膜内力状态的条件不能满足时，就会产生弯曲内力，弯曲内力是由于中面的曲率和扭率的改变而产生