GONG CHENG SHU XUE

工程数学

复变函数

盖云英　包革军　编
罗声政　审

工 程 数 学

复　变　函　数

盖云英　包革军　编

罗声政　审

哈尔滨工业大学出版社

(黑)新登字第4号

内 容 提 要

本书内容包括：复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分、级数、留数和保形映射。

本书可作为高等工科院校各专业教材，也可供有关工程技术人员参考。

复 变 函 数

董云英 包革军 编

罗声政 审

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

黑龙江大学印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张7.875 字数215千字

1994年8月第1版 1994年8月第1次印刷

印数 1—3000

ISBN 7-5603-1059-1/O·64 定价7.80元

前　言

这本《复变函数》是在1991年我校教材科出版的《复变函数》教材及三年的教学实践基础上并参照国家教委1993年批准印发的"工程数学复变函数课程教学基本要求"编写的。可供普通高等工科院校电类各专业使用，也可作为其它专业选作教材和工程技术人员自学复变函数的参考书。

在编写过程中，我们力求做到深入浅出，通俗易懂。在内容上突出基本概念和方法；在理论上既注意到体系的完整，又做到数学推导适合工科特点。为了满足不同专业对复变函数理论的需要和考虑到部分读者将要报考研究生，教材应当具有适当的伸缩余地，故增加了一些超出基本要求的内容，以供选用。每章后面配备了大量习题，并分为A、B两类。我们建议A类习题读者应该独立完成，而B类习题是为那些尚有余力的读者准备的。

本书由盖云英、包革军合作编写（盖云英一、二、三章，包革军四、五、六章），由罗声政教授审阅，我们谨在此致以衷心地感谢。我们也非常感谢哈尔滨工业大学出版社的有关同志，是他们的细致工作和对教材建设的积极支持，才使这本《复变函数》能与读者见面。

由于水平所限，书中疏漏之处在所难免，诚请读者批评指正。

编　者

1994年于哈尔滨工业大学

目　录

引　言

我们在学习高等数学课程时，所遇到的函数及自变量的取值范围（即定义域）都是实数，实数可以用有向直线（即数轴）上的点来表示。本书是要将函数的定义域扩充到复数上来，进而研究它们的性质。

在高中代数课中，我们学过复数，它可以用平面上的点来表示，因为平面上的点比直线上的点有更丰富的几何性质。正因如此，复变函数的理论和方法也有与高等数学不同的完全新颖的内容和更为严密而完整的理论。就以基本初等函数 e^x 为例，当自变量实数 x 扩充到复数 z 之后，e^z 产生了周期性，具有虚周期 $2\pi i$ 。

复变函数属于工程数学，它所研究的问题，有些是由其本身发展提出的，有些是由实际问题或其它学科提出的。在许多领域里，如流体力学、天体力学、电磁学、热学、自动控制和空气动力学以及弹性理论等，复变函数的理论和方法都有极为重要的应用。

复变函数课可以看作是高等数学课的继续和提高。在学习本课时，既要注意它们的相似之处，更要注意它们的不同点，以便掌握好它的理论和方法，更好地为我们所从事的专业领域的研究和发展服务。

第一章　复数与复变函数

§1.1　复数及其四则运算

1. 复数的概念

在高中代数中已经讲述过复数。为了便于以后讨论，我们把有关复数的基本定义及结论，在这里回顾一下：

设 x、y 为两实数，则

$$z = x + iy \quad (\text{或 } x + yi)$$

表示复数，这里 i 为虚单位，具有性质 $i^2 = -1$。x 及 y 分别叫做 z 的实部与虚部，常记为

$$x = \mathrm{Re}z \qquad y = \mathrm{Im}z$$

虚部为零的复数为实数，即 $x + i0 = x$。因此，全体实数是全体复数的一部分。特别地 $0 + i0 = 0$，即，当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零。

实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数。

如果两复数的实部和虚部分别相等，则称两复数相等。

2. 四则运算

复数的四则（加、减、乘、除）运算，可以按照多项式的四则运算进行，只要注意将 i^2 换成 -1。设

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

则

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) \\ &= (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$z_1-z_2 = (x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)$$

$$=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \tag{1.1.2}$$

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

如果 $z_2\neq 0$，则

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2}&=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}\\ &=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

从(1.1.1)—(1.1.4)式即知复数经过四则运算得到的仍旧是复数。又从(1.1.1)、(1.1.2)式以及实部与虚部的定义得出

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_1\pm z_2)&=\mathrm{Re}z_1\pm\mathrm{Re}z_2\\ \mathrm{Im}(z_1\pm z_2)&=\mathrm{Im}z_1\pm\mathrm{Im}z_2 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

例 1.1.1 化简 $i^3,i^4,\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}$。

解

$$i^3=i^2\cdot i=-i$$

$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

$$\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i}=\frac{-1-2i}{1+i}$$

$$=\frac{(-1-2i)(1-i)}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

例 1.1.2 计算

$$(1)\ \frac{2+3i}{2-3i}\qquad (2)\ \frac{2i}{\sqrt{3}-i}-\frac{3}{\sqrt{3}i-1}$$

解 (1)

$$\frac{2+3i}{2-3i}=\frac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{4+12i-9}{4+9}=-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$$

(2)

$$\frac{2i}{\sqrt{3}-i}-\frac{3}{\sqrt{3}i-1}=\frac{2i}{\sqrt{3}-i}-\frac{3}{i(\sqrt{3}+i)}$$

$$=\frac{2i}{\sqrt{3}-i}+\frac{3i}{\sqrt{3}+i}=\frac{1}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{4}i$$

例 1.1.3 已知 $x+yi=(2x-1)+y^2i$，求 $z=x+iy$。

解 $x=2x-1 \quad x=1$

$y=y^2 \quad y=0$ 或 $y=1$

由此，$z=1$ 或 $z=1+i$。

§1.2 复数的几何表示

1. 用平面上的点和向量表示复数

复数 $z=x+iy$，由实部 x 与虚部 y 唯一确定，这也就是说由一对有序实数 (x,y) 唯一确定。而有序实数对 (x,y) 又与平面直角坐标系中的点 $p(x,y)$ 一一对应，于是可用平面直角坐标系中的点来表示复数。

每一点 (x,y) 表示一个复数 $z=x+iy$ 的直角坐标平面称为复平面。由于 x 轴上的点对应实数，y 轴上的点对应纯虚数，故称 x 轴为实轴，称 y 轴为虚轴。由于复数与复平面上的点是一一对应的，以后把"点 z"和"复数 z"作为同义词而不加区别。

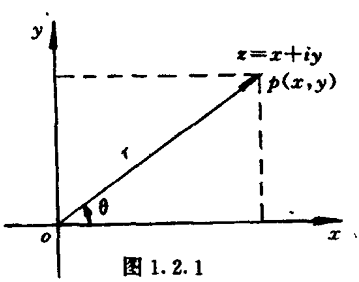

图 1.2.1

在复平面上，如图 1.2.1 所示，从原点 o 到点 $p(x,y)$ 引向量 $\overrightarrow{op}$。我们看到 $\overrightarrow{op}$ 与这个复数 z 也构成一一对应关系（复数 0 对应着零向量），因此也可以用向量 $\overrightarrow{op}$ 来表示复数 $z=x+iy$，其中 x、y 顺次等于 $\overrightarrow{op}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量。今后把"复数 z"与其对应的"向量 z"也视为同义词。

在物理学中，如力、速度、加速度等都可用向量表示，说明复数可以用来表示实有的物理量。

.2. 模与辐角

向量$\overrightarrow{op}$的长度r叫做复数z的模或绝对值，记作$|z|$，即$|z|=r$。实轴正向转到与向量$\overrightarrow{op}$方向一致时，所成的角度θ叫做复数的辐角，记作 $\mathrm{Arg}z$，即 $\mathrm{Arg}z=\theta$。

复数0的模为零，即$|0|=0$，其辐角是不确定的。任何不为零的复数z的辐角$\mathrm{Arg}z$均有无穷多个值，彼此之间相差2π的整数倍。通常把满足$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$的辐角值$\theta_0$称为$\mathrm{Arg}z$的主值，记为$\arg z$，于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

由直角坐标与极坐标的关系(见图1.2.1)，我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$\begin{cases} r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \\ \mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

以及

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \tag{1.2.2}$$

于是复数z又可表示为

$$\begin{aligned} z &= x+iy \\ &= r(\cos\theta+i\sin\theta) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

(1.2.3) 式通常称为复数z的三角表示式。如果再利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

我们又可以得到

$$z=re^{i\theta} \tag{1.2.4}$$

这种形式称为复数的指数表示式。

在§1.1节中已经指出：两复数的实部与虚部分别相等，则称两复数相等。于是从(1.2.1)式与(1.2.2)式即知两复数相等，其

模必定相等，其辐角可以差 2π 的整数倍（辐角如果都取主值，则应相等）。反之，如果复数的绝对值及辐角分别相等，则从 (1.2.3) 式即知这两个复数必然相等。

复数用向量表示，即有大小，又有方向；所以两个复数，如果不都是实数，就无法比较大小。但是，两个复数的模都是实数，就可以比较大小。

从图 1.2.1 可以看出

$$-r \leqslant x, y \leqslant r$$

即

$$-|z| \leqslant \mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z \leqslant |z| \tag{1.2.5}$$

例1.2.1 求下列各复数的模及辐角：

(1) i (2) -1 (3) $-i$ (4) $1+i$

解 由 z 平面上的对应点的位置，可以看出

(1) $|i|=1$ $\quad \arg i=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \mathrm{Arg}\, i=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

(2) $|-1|=1$ $\quad \arg(-1)=\pi$ $\quad \mathrm{Arg}(-1)=\pi+2k\pi$

(3) $|-i|=1$ $\quad \arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \mathrm{Arg}(-i)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

(4) $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4} \qquad \mathrm{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

例1.2.2 将复数 $z=1-\sqrt{3}i$ 化为三角表示式和指数表示式。

解 因为 $x=1$，$y=-\sqrt{3}$，所以

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

又 z 在第四象限内，于是

$$\theta=\arg z=\mathrm{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\frac{\pi}{3}$$

所以

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

由于辐角的多值性，亦可表为

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]$$

指数表示式为

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i + 2k\pi i} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

3. 加法与减法

以 $\overrightarrow{oz_1}$ 和 $\overrightarrow{oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 oz_1zz_2，通过图1.2.2可以说明，复数的加法、减法法则与向量的加法、减法法则一致。

通过两向量的和与差的几何作图法，在复平面中可以求出相应两复数的和 z_1+z_2 与差 z_1-z_2 的对应点。

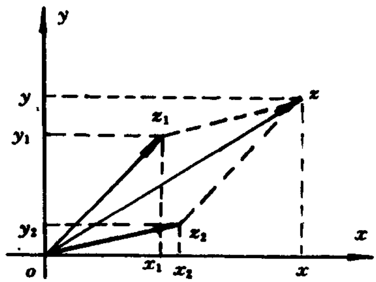

图1.2.2

在图1.2.3中，以向量 $\overrightarrow{oz_1}$、$\overrightarrow{oz_2}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线向量 $\overrightarrow{oz}$ 及 $\overrightarrow{z_2z_1}$，就分别对应于复数 z_1+z_2 及 z_1-z_2。由于 $\overrightarrow{oz}$ 的起点为原点 o，因而终点 z 所对应的复数就是 z_1+z_2；而向量 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 的起点不是原点，经平移得起点为原点 o 的向量 $\overrightarrow{os}$，则终点 s 所对应的复数就是 z_1-z_2。

从图1.2.3还可以看到：$|z_1-z_2|$ 表示复平面上两点 z_1 与 z_2 之间的距离。事实上，有

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

这正是平面上两点距离的表达式。

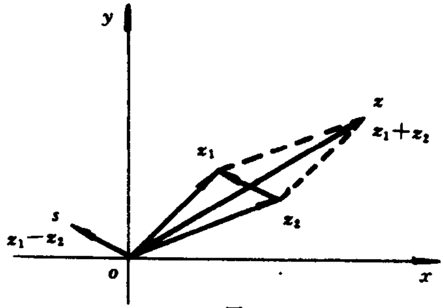

图1.2.3

§1.3 共轭复数

1. 定义及性质

实部相等、虚部符号相反的两个复数叫做共轭复数。如果其中一个复数记为 z，则其共轭复数记为 $\bar{z}$。于是

$$x - iy = \overline{x + iy}$$

由定义，显然 $\bar{\bar{z}}=z$。特别地，实数的共轭复数是该实数本身；反之，如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等，则这个复数便是一个实数。

由定义不难验证，两复数的和、差、积、商的共轭复数，分别等于这两复数的共轭复数的和、差、积、商，即

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \tag{1.3.1}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \tag{1.3.2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{1.3.3}$$

我们还可以用共轭复数来表示复数的实部与虚部以及模。如

$$2\mathrm{Re}z = z + \bar{z}$$

$$2i\mathrm{Im}z = z - \overline{z}$$
$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$
$$|\overline{z}| = |z|$$

2. 三角不等式

利用共轭复数的性质，我们能够比较容易地证明两个重要的不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1.3.4}$$
$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2|| \tag{1.3.5}$$

事实上，从共轭复数的性质，我们有

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + \overline{z_1\overline{z_2}} + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2\end{aligned}$$

由此即可得不等式(1.3.4)。如将上式中z_2换成$-z_2$，则有

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\geqslant |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| - |z_2|)^2\end{aligned}$$

由此即可推出不等式(1.3.5)。

当然在图1.2.3中利用三角形三边关系也可证明不等式(1.3.4)及(1.3.5)。

例1.3.1 A、C为实数，$A\neq 0$，β为复数，证明z平面上的圆周可以写成

$$Az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + C = 0$$

证 在解析几何中，已知任意一圆的方程可写作

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Dy + C = 0 \tag{1.3.6}$$

这里 A、B、C、D 为实数，且 $A\neq 0$。我们知道

$$x^2+y^2=z\bar{z} \quad x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

以此代入方程式（1.3.6），有

$$Az\bar{z}+\frac{B}{2}(z+\bar{z})+\frac{D}{2i}(z-\bar{z})+C=0$$

也就是

$$Az\bar{z}+\frac{1}{2}(B-Di)z+\frac{1}{2}(B+Di)\bar{z}+C=0 \tag{1.3.7}$$

令
$$\beta=\frac{1}{2}(B+Di)$$

以此代入（1.3.7）即得证。

例1.3.2 计算 $(2+3i)\overline{(2+3i)}-(4-3i)^2$。

解 $(2+3i)\overline{(2+3i)}-(4-3i)^2$

$=(2+3i)(2-3i)-(16-24i-9)$

$=4+9-7+24i$

$=6+24i$

例1.3.3 证明等式 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并对此等式作出几何解释。

证 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

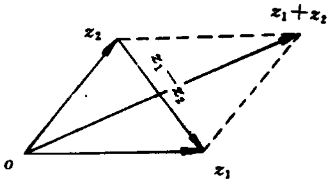

图 1.3.1

将此二式相加便得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

这等式的几何意义是：平行四边形的对角线的平方和等于四条边的平方和。

§1.4 乘方与开方

1. 乘除

把复数表示成三角函数式，再进行乘除或乘方、开方，比直接用代数式运算有时要方便得多。下面我们首先来讨论乘法。

设
$$\begin{aligned} z_1&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\\ z_2&=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

则
$$\begin{aligned} z_1z_2&=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)]\\ &=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\ &\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

由此可知，把两复数相乘，只要把它们的模相乘、辐角相加即可。

由此得到两复数乘积的几何作图法：将向量 z_1 沿本身方向伸长（或缩短）$|z_2|$ 倍，再旋转一个角 $\mathrm{Arg}z_2$，该向量的终点即为积 z_1z_2（见图1.4.1）。

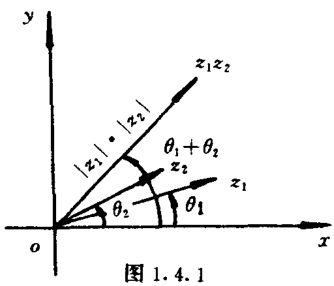

图 1.4.1