

依照教育部修正課程標準編訂

高級中學教科書
解析幾何學

甲組用
上册

陳懷書編
商務印書館發行

依照教育部修正課程標準編輯

高級中學
教科書
解析幾何學

甲組用
上册

陳懷書編
商務印書館發行

一九五四年
查訖

目 錄

緒 論.....1

第一章 有向線段 正射影 坐標
曲線及方程式.....3

1. 有向線段. 2. 有向線段之代數表示法. 3. 折線之正射影. 4. 正坐標制之定義. 5. 有向線段在坐標軸上之正射影. 6. 兩點間之距離. 7. 直線之線坡. 8. 線段之中點. 9. 線段依定比之分點. 10. 曲線作圖法, 曲線之方程式. 11. 兩曲線之交點. 第一章之習題.

第二章 直線.....20

12. 經過兩點之直線方程式. 13. 經過一定點且有已知之線坡之直線. 14. 一般一次方程式. 15. 截距. 16. 直線方程式之截距式. 17. 平行線及正交線. 18. 二線間之角. 19. 自一線至一點之距離. 20. 三角形之面積. 21. 平行線及正交線之一般理論. 22. 求平行線及正交線之第二法. 23. 三直線經過一點, 三點在一直線. 第二章之習題.

第三章 圓67

24. 圓之方程式. 25. 圓方程式之又一形狀. 26. 切線. 27. 經過三點之圓. 第三章之習題.

第四章 軌跡導論 曲線之對稱81

28. 軌跡問題. 29. 對稱. 第四章之問題.

第五章 拋物線92

30. 定義. 31. 拋物線之方程式. 32. 切線. 第五章之問題.

第六章 橢圓104

33. 定義. 34. 幾何作圖法. 35. 橢圓之方程式. 36. 切線之線坡及其方程式. 37. 一個重要的軌迹問題. 38. $e < 1$ 時之討論. 39. 拋物線為橢圓之極限. 40. 橢圓之幾何作圖之又一法. 第六章之問題.

第七章 雙曲線124

41. 定義. 42. 雙曲線之方程式. 43. 軸, 離心率, 焦點半徑. 44. 幾近線. 45. 切線. 46. 新定義, 準標. 47. 拋物線為雙曲線之極限. 48. 共軛雙曲線. 49. 參變

數方程式. 50. 圓錐曲線. 51. 同焦點錐線. 第七章之問題.

第八章 切線 曲線族 153

52. 切線. 53. 圓錐曲線之切線. 54. 直線族, 曲線族, 方程式 $u+kv=0$. 55. 方程式 $w=0$. 56. 有既定線坡之切線. 57. 有既定線坡之切線之公式. 58. 自錐線外一點所作之切線. 第八章之問題.

第九章 極坐標 195

59. 定義. 60. 圓. 61. 直線. 62. 方程式之圖解. 63. 圓錐曲線. 64. 正坐標與極坐標之互變. 第九章之問題.

第十章 坐標之變換 221

65. 平行移軸法. 66. 轉軸法. 67. 坐標軸移轉之總說. 第十章之問題.

第十一章 一般二次方程式 235

68. 移軸法之效用. 69. 轉軸法之效用. 70. 轉軸法效用之通論. 71. $B^2-4AC \neq 0$ 時, 一般方程式之討論.

72. $B^2 - 4AC = 0$ 時，一般方程式之討論。 73. 摘要，不變式。 第十一章之問題。

第十二章 軌跡詳論 264

74. 求軌迹法之擴充。 75. 一個助變數。 76. 以構成曲線之點之坐標爲助變數。 77. 含二個或多個助變數之其他問題。 78. 二次方程式之根之和之應用。 79. 不等式之軌迹。 80. 二或二以上聯立不等式之軌迹。 81. 二直線間之角之平分線。 第十二章之問題。

第十三章 直徑、極及極線 295

82. 橢圓之直徑。 83. 橢圓之配徑。 84. 雙曲線之直徑。 85. 雙曲線之配徑。 86. 拋物線之直徑。 87. 配徑之端點及其長。 88. 調和分。 89. 一點之極線。 90. 直線之極。 91. 極及極線之性質。 92. 極及極線之位置關係。 93. 作圖問題。 第十三章之問題。

第十四章 反形 337

94. 定義。 95. 反形方程式。 96. 圓錐曲線之反形。 97. 兩圓之交角。 98. 反演時角爲不變量。 第十四章之問題。

高中教科書

幾何學

上册

緒論

近代中學所習之初等幾何學發達已臻極盛，而實導源於希臘文化最高之時，最初為系統之研究者，乃紀元三百年前之歐幾里得 (Euclid) 也。

希臘人不知有代數，其源實出於印度，所謂阿刺伯數字之系統亦可歸功於印人。其後傳播至西歐，未及中世紀之末，斯學已極發達，有如近世中學所授者矣。

學者已習代數及幾何二科，自應為進一步之研究，著名之哲學家及數學家笛卡兒 (René Descartes) 於1637年出版幾何一書，首先發明應用代數研究幾何之法。笛氏遂為解析幾何學之創始者。

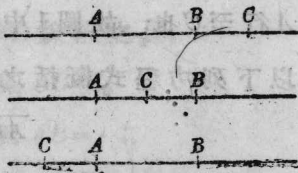
初等幾何之原理及軌迹問題之解法幾全恃乎智巧，對於此類之新穎問題，無一般之解法。解析幾何

第一章

有向線段, 正射影, 坐標, 曲線及方程式

§1. 有向線段. 設有一無限直線 L 於此, 於 L 上取兩點 A 及 B , 則 L 上 A 與 B 間之一段在平面幾何學中名爲線段 (line-segment) 以 AB 表之.

設於 L 上再取第三點 C , 如圖



1, 則因 C 點有不同之位置三, 故三線段之關係, 得以下列三式表之:

(圖 1)

(a) $AB + BC = AC$;

(b) $AB - CB = AC$;

(c) $CB - AB = CA$.

若 L 上之 A, B 兩點互換其位置, 則另有不同之式三, 讀者試寫出之.

綜觀以上各方程式未能一致, 故欲合併之成一公共之方程式, 應推廣線段之觀念. 不以 AB 及 BA 表同一之線段, 而各定一方向 (direction 或 Sense) 以分別之.

例如 AB 乃表此線段之方向係由 A 至 B , BA 乃表由 B

至 A , 即與 AB 之方向相反。此等線段名爲有向線段 (directed line-segment), 以 \overline{AB} 及 \overline{BA} 表之, 俾與無向線段有別。

如行路然有向線段 \overline{AB} 表由 A 行至 B , \overline{BA} 表由 B 行至 A 。以此爲喻, 而論圖 1 中之有向線段 \overline{AB} , \overline{BC} , 及 \overline{AC} , 則因由 A 行至 B , 再由 B 行至 C , 就終點言之, 無異於由 A 行至 C 也。故圖 1 中三種場合及其他三種場合均可以下列方程式概括之:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

由是得一定義, 曰, 有向線段 \overline{AB} 及 \overline{BC} 之和爲有向線段 \overline{AC} :

$$(1) \quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

由此定義推之, 若 A, B, C, D 爲 L 上任意四點, 則

$$(2) \quad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}.$$

因由 (1) 知 (2) 之首二項之和爲 \overline{AC} , 而由定義又知 \overline{AC} 與 \overline{CD} 之和爲 \overline{AD} 故也。

仿此, 若 $M, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, N$ 爲 L 上任意諸點, 則

$$(3) \quad \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} + \dots + \overline{M_{n-2}M_{n-1}} + \overline{M_{n-1}N} = \overline{MN}.$$

兩有向線段在同一直線上或在兩平行直線上, 若其長相等而又同向, 則兩有向線段相等。

§2. 有向線段之代數表示法. 於直線 L 上任意選定其兩方向之一為正方向 (positive direction), 而令其他一方向為負方向 (negative direction). 則 L 上之有向線段 \overline{AB} 若與 L 之正方向相同則亦為正方向, 若與 L 之負方向相同亦為負方向.

吾人可指定一數以表有向線段 \overline{AB} 仍用 \overline{AB} 紀之, 有如下式, 設 l 為普通的 (即無方向的) 線段之長,

若 \overline{AB} 為正向線段, 則 $\overline{AB} = l$;

若 \overline{AB} 為負向線段, 則 $\overline{AB} = -l$.

若 $\overline{AB} = l$, 則 $\overline{BA} = -l$; 又若 $\overline{AB} = -l$, 則 $\overline{BA} = l$. 故對於任一場合, 得

$$(1) \quad \overline{AB} + \overline{BA} = 0 \quad \text{或} \quad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

如行路然, 由 A 行至 B , 再由 B 行至 A , 是仍歸於原處不啻未嘗行動. 故就線段自身論之即可得方程式 (1), 不藉數以表此等線段之長亦可證明 (1) 也.

第一節中 (1), (2), (3) 三方程式, 若以相當之數表各線段之長, 亦可證實其正確, 其故用同樣符號 \overline{AB} 表示有限線段及代表有向線段之長之數不虞錯誤及混淆. 吾人今後更可用一簡單符號以表有向線段, 即將 \overline{AB} 文字頂上所加之橫線略去, 簡寫作 AB . 此符號不獨

可表有向線段或代表有向線段之長之數，且可表示有向線段之自身。蓋不但於上下文中可瞭解在意義，即此符號所表現者已彰彰明矣。

絕對值。有時僅欲表示有向線段 AB 之長而不問其方向如何，則用符號 $|AB|$ ，讀為“ AB 之絕對值”(absolute value)。

同樣，某數 a 之數值 (numerical value) 或絕對值記作 $|a|$ 。例如 $|-3|=3$ ，及 $|3|=3$ 。

§3 折線之正射影。一點 P 在直線 L 上之正射影 (orthogonal projection) 即自 P 至 L 所作垂線之足。若 P



(圖 2)

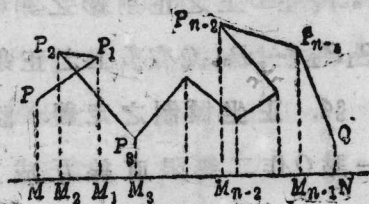
在 L 線上，則其自身即為正射影。

設 L 為任意一直線， PQ 為有向線段。設 M 及 N 為 P 及 Q 在 L 上之正射影。則有向線段 PQ 在 L 上之正射影為有向線段 MN 或代表 MN 之長之數。

因 $MN = -NM$ ，故得 PQ 之正射影 $= -QP$ 之正射影。

若 PQ 在垂直於 L 之線上，則 M 點與 N 點相合，故 PQ 在 L 上之正射影為零。

設 $PP_1P_2\dots P_{n-1}Q$ 爲任意一折線 (broken line), 則其在 L 上之正射影爲各有向線段 $PP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射線之和, 卽



(圖 3)

$$MM_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}N.$$

此和之值與 MN 相同, 卽有向線段 PQ 在 L 上之正射影; 參看 §1, (3):

$$MM_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}N = MN.$$

由是得一定理:

定理 1. 聯結 P 與 Q 之折線之各段 $PP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射影之和等於有向線段 PQ 在 L 上之正射影.

設聯結 P 與 Q 成另一折線 $PP_1'P_2'\dots P_{n-1}'Q$, 則其在 L 上之正射影仍等於 MN :

$$MM_1' + M_1'M_2' + \dots + M_{n-1}'N = MN.$$

故又得一定理:

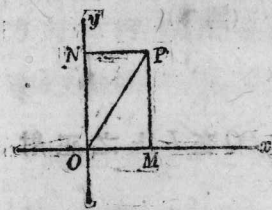
定理 2. 有兩端之點相同之二折線,

$$PP_1P_2\dots P_{n-1}Q \quad \text{及} \quad PP_1'P_2'\dots P_{n-1}'Q.$$

(設 L 爲任意一直線, 則第一折線之各段 $PP_1, P_1P_2, \dots,$

$P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射影之和等於第二折線之各段 PP_1 , $P_1P_2, \dots, P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射影之和。

§4. 正坐標制之定義. 設有一平面於此, 經過其上



(圖 4)

一點 O 作二無限直線互成正交, 并於各線上選定正

方向. 設 P 爲此平面上任意一點. 則 OP 爲有向線段, 其在過 O 之二有向線上之正射影爲 OM 及 ON .

則代表 OM 及 ON 之長之二數

連同適當之符號(參看 §2), 名爲 P

之坐標 (coördinates), 以 x 及 y 表之:

$$x = OM, \quad y = ON.$$

而書之於括弧內: (x, y) , 第一數, x , 稱爲 P 之 x 坐標或橫坐標 (x -coördinate 或 abscissa); 第二數, y , 稱爲 y 坐標或

縱坐標 (y -coordinate 或 ordinate). O 點名坐標之原點

(origin), 過 O 之二有向直線名坐標軸 (axes of coördinates

或 coördinate axes); 其中橫線名 x 軸 (axis of x); 縱線名 y

軸 (axis of y). 通常所用之坐標軸如圖 4, 其方向則 x

軸以左至右爲正, y 軸以由下而上爲正.

凡在平面上每一點 P 均有一定之坐標 (x, y) . 逆言

之, 凡有二實數 x 及 y 必有一點與之相應, 其坐標爲

第一章 有向線段, 正射影, 坐標, 曲線及方程式 9

(x, y) . 欲將此點作出可於 x 軸上取 $OM=x$, 於 M 點作 x 軸之垂線, 在此垂線上取 $MP=y$, 則得 P 點, 或於 y 軸上取 $ON=y$ (參看圖 1), 自 N 作 y 軸之垂線, 於其上取 $NP=x$ 亦可. 所當注意者, 凡平行於一坐標軸之直線之方向須與坐標軸之方向相同. 換言之, 其方向應視 x 或 y 之爲正或負而定.



(圖 5)

原點之坐標爲 $(0, 0)$. x 軸上每點之縱坐標均爲 0 , 且在一平面上僅有此類點具有此性質. 故代表 x 軸之方程式爲

$$y=0, \quad (x \text{ 軸}).$$

仿此, 代表 y 軸之方程式爲

$$x=0, \quad (y \text{ 軸})$$

兩坐標軸分平面爲四份, 每份名象限 (quadrant). 在正 x 軸及正 y 軸間之一份爲第一象限; 在正 y 軸及負 x 軸間者爲第二象限; 第三, 第四象限類推. 故第一象限內各點之坐標橫縱皆正; 第二象限內各點之橫坐標爲負, 縱坐標爲正; 餘類推.

上述之坐標制度名正坐標制或卡氏坐標 (system of rectangular or Cartesian coördinates).

習題 一

學者欲作下列各題及本書中其他諸題，應自備方格紙或坐標紙(squared or coordinate paper)。方格紙之劃為公分及再分為公釐者最適用。

1. 以 1 公分為單位，求作下列各點：

(a) $(0, 1)$; (b) $(1, 0)$; (c) $(1, 1)$;

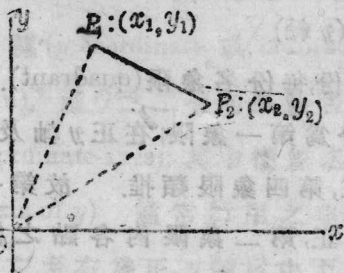
(d) $(1, -1)$; (e) $(-1, -1)$; (f) $(2, -4)$;

(g) $(0, -2.5)$; (h) $(-3.6, 0)$; (i) $(-1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2})$;

(j) $(-4, 3.5)$; (k) $(-0.87, 3.24)$; (l) $(-2.85, -1.67)$ 。

2. 設以一公分為單位，求圖 4 中 P 點之坐標。又若以一寸為單位則如何？

§5. 有向線段在坐標軸上之正射影。設 P_1 之坐標



(圖 6)

為 (x_1, y_1) ，又 P_2 之坐標為 (x_2, y_2) ，*

P_1, P_2 為平面上任意兩

點。今求有向線段 P_1P_2

在坐標軸上之正射影。

作折線 P_1OP_2 ，則由 §3，

定理 1 知此折線在坐標

* P_2 之坐標為 (x_2, y_2) ，簡寫為 $P_2(x_2, y_2)$ 。以後仿此。

軸上之正射影等於有向線段 P_1P_2 在坐標軸上之正射影。先就 x 軸上之正射影論之,

$$\begin{aligned} P_1P_2 \text{ 之正射影} &= P_1O \text{ 之正射影} + OP_2 \text{ 之正射影} \\ &= -OP_1 \text{ 之正射影} + OP_2 \text{ 之正射影} \end{aligned}$$

由定義知上式中最後兩項爲 $-x_1$ 及 x_2 。故

$$(1) \quad P_1P_2 \text{ 在 } x \text{ 軸上之正射影} = x_2 - x_1.$$

仿此,

$$(2) \quad P_1P_2 \text{ 在 } y \text{ 軸上之正射影} = y_2 - y_1.$$

P_1P_2 在平行於兩坐標軸之二直線上之正射影, 與上列兩式相同, 不待辭費。

習題二

1. 設 P_1 爲習題一之第一題中點 (a) , P_2 爲 (b) , 作 P_1P_2 。用上述公式求 P_1P_2 之正射影, 并就所作之圖以證實之。

2. 同上題, 但

(i) P_1 爲 (e) , P_2 爲 (f) ;

(ii) P_1 爲 (c) , P_2 爲 (d) ;

(iii) P_1 爲 (i) , P_2 爲 (l) 。