依照教育部修正課程標準編輯

高級中學
教科書

解析幾何學

甲組用
上冊

陳懷書編

商務印書館發行

依照教育部修正課程標準編輯

高級中學
教科書

解析幾何學

甲組用
上冊

陳懷書編

商務印書館發行

目 錄

高中教科書

解析幾何學

上冊

緒論

近代中學所習之初等幾何學發達已臻極盛,而實導源於希臘文化最高之時,最初爲系統之研究者,乃紀元三百年前之歐幾里得(Euclid)也.

希臘人不知有代數,其源實出於印度,所謂阿剌伯數字之系統亦可歸功於印人.其後傳播至西歐,未及中世紀之末,斯學已極發達,有如近世中學所授者矣.

學者已習代數及幾何二科,自應爲進一步之研究,著名之哲學家及數學家笛卡兒(René Descartes)於1637年出版幾何一書,首先發明應用代數研究幾何之法.笛氏遂爲解析幾何學之創始者.

初等幾何之原理及軌迹問題之解法幾全恃乎智巧,對於此類之新穎問題,無一般之解法.解析幾何

則與是，能以普遍適用之方法探討此類問題．應用之，且可解決古人所未思及之問題，而爲近世數學及數學物理之主腦．因此兩大科目之存在，端賴此新幾何及微積分而始獲成功也．

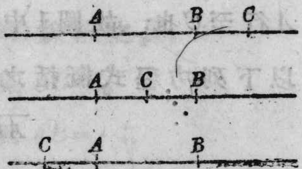
以代數研究幾何，其先決問題爲如何使用負數，俾與正數之用相同．此事容於以下數節詳論之．

第一章

有向線段,正射影,坐標,曲線及方程式

§1. 有向線段. 設有一無限直線L於此,於L上取兩點A及B,則L上A與B間之一段在平面幾何學中名爲線段(line-segment)以AB表之.

設於L上再取第三點C,如圖1,則因C點有不同之位置三,故三線段之關係,得以下列三式表之:



(圖 1)

$$(a)\quad AB+BC=AC;$$

$$(b)\quad AB-CB=AC;$$

$$(c)\quad CB-AB=CA.$$

若L上之A, B兩點互換其位置,則另有不同之式三,讀者試寫出之.

綜觀以上各方程式未能一致,故欲合併之成一公共之方程式,應推廣線段之觀念. 不以AB及BA表同一之線段,而各定一方向(direction 或 Sense)以分別之. 例如AB乃表此線段之方向係由A至B, BA乃表由B

至 A, 即與 AB 之方向相反. 此等線段名為有向線段 (directed line-segment), 以 $\overline{AB}$ 及 $\overline{BA}$ 表之, 俾與無向線段有別.

如行路然有向線段 $\overline{AB}$ 表由 A 行至 B, $\overline{BA}$ 表由 B 行至 A. 以此為喻, 而論圖1中之有向線段 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, 及 $\overline{AC}$, 則因由 A 行至 B, 再由 B 行至 C, 就終點言之, 無異於由 A 行至 C 也. 故圖1中三種場合及其他三種場合均可以下列方程式概括之:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

由是得一定義, 曰, 有向線段 $\overline{AB}$ 及 $\overline{BC}$ 之和為有向線段 $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}. \tag{1}$$

由此定義推之, 若 A, B, C, D 為 L 上任意四點, 則

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}. \tag{2}$$

因由 (1) 知 (2) 之首二項之和為 $\overline{AC}$, 而由定義又知 $\overline{AC}$ 與 $\overline{CD}$ 之和為 $\overline{AD}$ 故也.

仿此, 若 M, M_1, M_2, $\cdots$, M_{n-1}, N 為 L 上任意諸點, 則

$$\overline{MM_1}+\overline{M_1M_2}+\cdots+\overline{M_{n-2}M_{n-1}}+\overline{M_{n-1}N}=\overline{MN}. \tag{3}$$

兩有向線段在同一直線上或在兩平行直線上, 若其長相等而又同向, 則兩有向線段相等.

§2. **有向線段之代數表示法.** 於直線L上任意選定其兩方向之一爲正方向 (positive direction), 而令其他一方向爲負方向 (negative direction). 則L上之有向線段$\overline{AB}$若與L之正方向相同則亦爲正方向, 若與L之負方向相同亦爲負方向

吾人可指定一數以表有向線段$\overline{AB}$仍用$\overline{AB}$紀之, 有如下式, 設l爲普通的(卽無方向的)線段之長,

$$\text{若 } \overline{AB} \text{ 爲正向線段, 則 } \overline{AB}=l;$$

$$\text{若 } \overline{AB} \text{ 爲負向線段, 則 } \overline{AB}=-l.$$

若$\overline{AB}=l$, 則$\overline{BA}=-l$; 又若$\overline{AB}=-l$, 則$\overline{BA}=l$. 故對於任一場合, 得

(1) $$\overline{AB}+\overline{BA}=0 \quad \text{或} \quad \overline{AB}=-\overline{BA}.$$

如行路然, 由A行至B, 再由B行至A, 是仍歸於原處不啻未嘗行動. 故就線段自身論之卽可得方程式(1), 不藉數以表此等線段之長亦可證明(1)也.

第一節中(1), (2), (3)三方程式, 若以相當之數表各線段之長, 亦可證實其正確, 其故用同樣符號$\overline{AB}$表示有限線段及代表有向線段之長之數不虞錯誤及混淆.

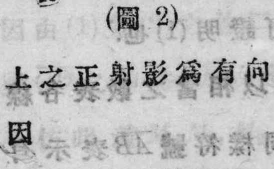
吾人今後更可用一簡單符號以表有向線段, 卽將$\overline{AB}$文字頂上所加之橫線略去, 簡寫作AB. 此符號不獨

可表有向線段或代表有向線段之長之數，且可表示有向線段之自身．蓋不但於上下文中可瞭解在意義，即此符號所表現者已彰彰明矣．

絕對值．有時僅欲表示有向線段AB之長而不問其方向如何，則用符號$|AB|$，讀爲"AB之絕對值"(absolute value).

同樣，某數a之數值 (numerical value) 或絕對值紀作$|a|$．例如$|-3|=3$，及$|3|=3$.

§3　折線之正射影．一點P在直線L上之正射影(orthogonal projection)即自P至L所作垂線之足．若P在L線上，則其自身即爲正射影．



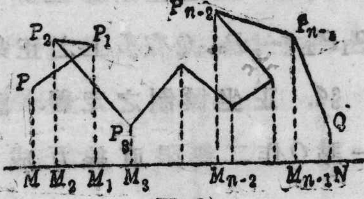
(圖 2)

設L爲任意一直線，PQ爲有向線段．設M及N爲P及Q在L上之正射影．則有向線段PQ在L上之正射影爲有向線段MN或代表MN之長之數．

因
$$MN=-NM,$$
故得　　PQ之正射影$=-QP$之正射影．

若PQ在垂直於L之線上，則M點與N點相合，故PQ在L上之正射影爲零．

設 $PP_1P_2\cdots P_{n-1}Q$ 爲任意一折線(broken line)，則其在 L 上之正射影爲各有向線段 $PP_1, P_1P_2, \cdots P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射線之和，即



(圖 3)

$$MM_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-1}N.$$

此和之值與 MN 相同，即有向線段 PQ 在 L 上之正射影；參看§1，(3)：

$$MM_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-1}N=MN.$$

由是得一定理：

定理1. 聯結 P 與 Q 之折線之各段 $PP_1, P_1P_2, \cdots P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射影之和等於有向線段 PQ 在 L 上之正射影.

設聯結 P 與 Q 成另一折線 $PP_1'P_2'\cdots P'_{n-1}Q$，則其在 L 上之正射影仍等於 MN：

$$MM'_1+M'_1M'_2+\cdots+M'_{n-1}N=MN.$$

故又得一定理：

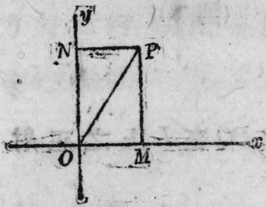
定理2. 有兩端之點相同之二折線，

$$PP_1P_2\cdots P_{n-1}Q \text{ 及 } PP'_1P'_2\cdots P'_{n-1}Q.$$

設 L 爲任意一直線，則第一折線之各段 $PP_1, P_1P_2, \cdots,$

$P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射影之和等於第二折線之各段 PP'_1, $P'_1P'_2$, ..., $P_{n-1}Q$ 在 L 上之正射影之和.

§4. 正坐標制之定義. 設有一平面於此,經過其上一點 O 作二無限直線互成正交,并於各線上選定正方向. 設 P 爲此平面上任意一點. 則 OP 爲有向線段,其在過 O 之二有向線上之正射影爲 OM 及 ON. 則代表 OM 及 ON 之長之二數連同適當之符號(參看§2),名爲 P 之坐標(coördinates),以 x 及 y 表之:



(圖 4)

$$x=OM, \qquad y=ON.$$

而書之於括弧內:(x, y),第一數,x,稱爲 P 之 x 坐標或橫坐標(x-coördinate 或 abscissa);第二數,y,稱爲 y 坐標或縱坐標(y-coördinate 或 ordinate). O 點名坐標之原點(origin),過 O 之二有向直線名坐標軸(axes of coördinates 或 coördinate axes);其中橫線名 x 軸(axis of x);縱線名 y 軸(axis of y). 通常所用之坐標軸如圖4,其方向則 x 軸以左至右爲正,y 軸以由下而上爲正.

凡在平面上每一點 P 均有一定之坐標 (x, y). 逆言之,凡有二實數 x 及 y 必有一點與之相應,其坐標爲

(x,y). 欲將此點作出可於x軸上取$OM=x$, 於M點作x軸之垂線,在此垂線上取$MP=y$, 則得P點,或於y軸上取$ON=y$(參看圖1),自N作y軸之垂線,於其上取$NP=x$亦可. 所當注意者,凡平行於一坐標軸之直線之方向須與坐標軸之方向相同.換言之,其方向應視x或y之爲正或負而定.

(圖 5)

原點之坐標爲$(0,0)$. x軸上每點之縱坐標均爲0,且在一平面上僅有此類點具有此性質. 故代表x軸之方程式爲

$$y=0, \qquad (x\text{軸}).$$

仿此,代表y軸之方程式爲

$$x=0, \qquad (y\text{軸})$$

兩坐標軸分平面爲四份,每份名象限(quadrant). 在正x軸及正y軸間之一份爲第一象限;在正y軸及負x軸間者爲第二象限;第三,第四象限類推. 故第一象限內各點之坐標橫縱皆正;第二象限內各點之橫坐標爲負,縱坐標爲正;餘類推.

上述之坐標制度名正坐標制或卡氏坐標(system of rectangular or Cartesian coördinates).

習題一

學者欲作下列各題及本書中其他諸題,應自備方格紙或坐標紙(squared or coördinate paper). 方格紙之劃為公分及再分為公釐者最適用.

1. 以1公分為單位,求作下列各點:

(a) $(0,1)$; (b) $(1,0)$; (c) $(1,1)$;

(d) $(1,-1)$; (e) $(-1,-1)$; (f) $(2,-4)$;

(g) $(0,-2.5)$; (h) $(-3.6,0)$; (i) $\left(-1\frac{1}{4},-1\frac{1}{2}\right)$;

(j) $(-4,3.5)$; (k) $(-0.87,3.24)$; (l) $(-2.35,-1.67)$.

2. 設以一公分為單位,求圖4中P點之坐標. 又若以一吋為單位則如何?

§5. **有向線段在坐標軸上之正射影.** 設P_1之坐標為(x_1,y_1), 又P_2: (x_2,y_2),* P_1, P_2為平面上任意兩點. 今求有向線段P_1P_2在坐標軸上之正射影.

(圖 6)

作折線P_1OP_2,則由§3,定理1知此折線在坐標

---

* P_2之坐標為(x_2,y_2),簡寫為P_2:(x_2,y_2)。以後仿此。

軸上之正射影等於有向線段P_1P_2在坐標軸上之正射影.先就x軸上之正射影論之,

$$P_1P_2\text{之正射影}=P_1O\text{之正射影}+OP_2\text{之正射影}$$
$$=-OP_1\text{之正射影}+OP_2\text{之正射影}$$

由定義知上式中最後兩項爲$-x_1$及x_2.故

(1) P_1P_2在x軸上之正射影$=x_2-x_1$.

仿此,

(2) P_1P_2在y軸上之正射影$=y_2-y_1$.

P_1P_2在平行於兩坐標軸之二直線上之正射影,與上列兩式相同,不待辭費.

習題二

1. 設P_1爲習題一之第一題中點(a), P_2爲(b),作P_1P_2.用上述公式求P_1P_2之正射影,并就所作之圖以證實之.

2. 同上題,但

(i) P_1爲(e), P_2爲(f);

(ii) P_1爲(c), P_2爲(d);

(iii) P_1爲(i), P_2爲(l).