新課程標準適用

建國教科書

高級中學

三角學

編著者　余介石

校者　何魯

中書局印行

第一章

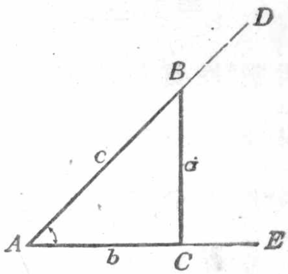
銳角三角函數;直角三角形解法

1. 平面三角學的定義 平面三角學,是討論三角函數*性質和平面三角形解法的科學.在初中數值三角學,我們已經學習過銳角三角函數的意義,同不用對數*解直角三角形的方法.本章將初中已授教材,仍提示要義;從銳角三角函數入手,并應用這種函數,去解直角三角形.第二章述對數要義,和採用對數解直角三角形法,以求計算上的簡便;且與初中所學習的算法,作一比較.以後各章,則推廣三角函數的意義到任意角,并研究如何去解任意三角形.關於含三角函數的等式,也和代數中情形一樣,有恆等式和方程式二種,本書將分別論其證法和解法.又三角形解法,必須用表,本書卽略論造表法,以殿全書.

三角函數 trigonometric function. 對數 logarithm.

2. 銳角的三角函數 幾何中有三角形內角和等於180°的理,表示諸角間的關係;又有畢氏定理*和其推廣,論三角形各邊間的關係;但無有涉及角與邊間的關係者.三角函數的功用即在此.茲先述銳角的情形.

有$\angle EAD$為一銳角,在一邊上任一點B,作BC垂直於他邊,成一直角三角形ABC.命大寫字母A, B, C(常表直角)表角,而依次以小寫字母a, b, c(常表斜邊)表各角相對邊的長度.由幾何的理,易知$\angle BAC$為固定時,不論點B如何去取,



(第 1 圖)

各邊長a, b, c所成的比,總是一定.但如另取一大小與前不同的角,則所得直角三角形各邊的諸比,將不復與前相同,換句話說,這些比值,隨着$\angle BAC$一同變化,所以是這角的一種函數,就叫做銳角的三角函數.

a, b, c三長度,可成六種比,即得銳角A的六個三角函數,其名稱和符號如下:

---

*畢氏定理 Pythagoras' theorem.

sin A, 爲 "A的正弦*"

cos A, 爲 "A的餘弦*"

tan A, 爲 "A的正切*"

csc A, 爲 "A的餘割*"

sec A, 爲 "A的正割*"

cot A, 爲 "A的餘切*"

這六個三角函數(卽比值)的定義如次:在第1圖中,

(1) $\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{a}{c}\right)$;　　(4) $\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{c}{a}\right)$;

(2) $\cos A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{b}{c}\right)$;　　(5) $\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}\left(=\dfrac{c}{b}\right)$;

(3) $\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{底邊}}\left(=\dfrac{a}{b}\right)$;　　(6) $\cot A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{b}{a}\right)$.

註　各函數的符號,他書間有不同. tan或作tg, csc或作cosec, cot或作ctn.

注意　函數符號須與角相連,方有意義.譬如sin A,並非sin與A相乘的意思,因爲sin只是一函數記法,而非數量也.明乎此,就不致弄出 $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$ 一類的笑話了(參看第五章§68).

3. 諸函數間的幾個基本關係　上列各函數的定

---

*正弦 sine. 餘弦 cosine. 正切 tangent. 餘割 cosecant. 正割 secant. 餘切 cotangent.

義,爲三角學的基本觀念,務要澈底了解幷熟記,方能進修三角學,今舉諸函數間的二種基本關係如下:

(一)倒數關係　由定義即知:

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

(二)餘角函數關係　將§2中各定義,施於銳角B,則得:

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

試與角A的函數去比較,便易見有:

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B;$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$

$$\tan A=\cot B;\qquad \cot A=\tan B.$$

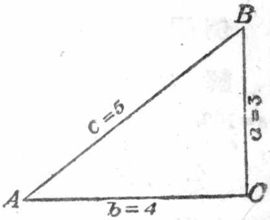
因A與B互爲餘角,即$A+B=90°$,故得一定理如次:

定理　銳角任一函數,等於其餘角的餘函數.

註　餘弦,餘切,餘割的命名,即本於這定理.

例一　已知直角三角形的二邊 $a=3$, $b=4$, 試求角 A 的各函數.

解　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, 如第2圖.



(第 2 圖)

按 § 2 (1) 至 (6) 各定義, 即有

$$\sin A=\frac{3}{5};\qquad \csc A=\frac{5}{3};$$

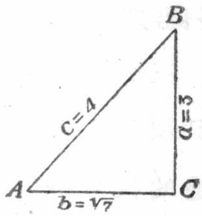
$$\cos A=\frac{4}{5};\qquad \sec A=\frac{5}{4};$$

$$\tan A=\frac{3}{4};\qquad \cot A=\frac{4}{3}.$$

試再求角 B 的各函數,並與上面各結果比較.

例二　已知直角三角形二邊 $a=3$, $c=4$, 試求角 B 的各函數.

解　$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$



(第 3 圖)

$$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4};\qquad \csc B=\frac{4}{\sqrt{7}};$$

$$\cos B=\frac{3}{4};\qquad \sec B=\frac{4}{3};$$

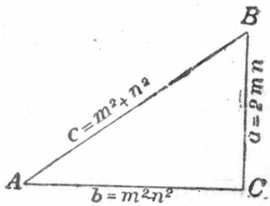
$$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3};\qquad \cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}.$$

試再求角 A 的各函數, 並和上面各結果比較.

例三　已知直角三角形二邊 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, 試求角 A 的各函數.

解　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2.$$



(第 4 圖)

$$\sin A=\frac{2mn}{m^2+n^2};\qquad \csc A=\frac{m^2+n^2}{2mn};$$

$$\cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};\qquad \sec A=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

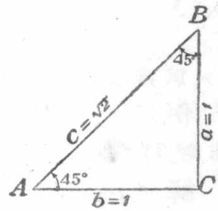
$$\tan A=\frac{2mn}{m^2-n^2};\qquad \cot A=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

例四 已知一直角三角形內, $\sin A=\frac{4}{5}$, $a=80$, 求 c.

解 按 §2 公式 (1) $\sin A=\frac{a}{c}$, 將 $\sin A$ 和 a 的值代入,得 $\frac{4}{5}=\frac{80}{c}$; 所以 $c=100$.

4. 特別角的三角函數 30°, 45°, 60° 的各函數,爲問題中所常遇的.這些結果頗重要,宜熟記.

(一) 求 45° 的各函數.



(第 5 圖)

作一二等邊直角三角形 ABC 如第 5 圖, 則 $\angle A=\angle B=45°$.

三角函數既爲各邊所成的比, 故只須知各邊相關長度.今選定二等邊的長度爲一單位,即 $a=1$, $b=1$, 則 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$.

$$\therefore\quad \sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad \csc 45°=\sqrt{2};$$

$$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad \sec 45°=\sqrt{2};$$

$$\tan 45°=1;\qquad \cot 45°=1.$$

(二) 求 30° 和 60° 的各函數.

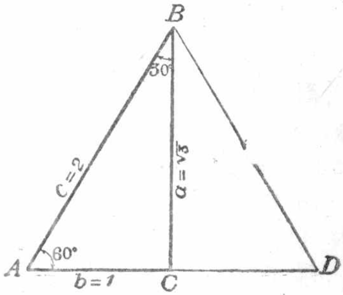
作一等邊三角形 ABD, 自 B 作 $BC\perp AD$. 則在 $\triangle ABC$ 內,

$\angle A = 60°$, $\angle ABC = 30°$, 如第 6 圖.

在直角三角形 ABC 內,取最短一邊為單位長,即 $b=1$,如此便得:

$$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2,$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$



(第 6 圖)

$$\therefore \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60° = \sqrt{3};$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\sec 60° = 2;$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

復因 $\angle ABC = 30°$, 故又可得:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}; \qquad \csc 30° = 2;$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \cot 30° = \sqrt{3}.$$

將上列各結果排成一表,得:

角	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}=0.50$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0.71+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.86+$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.86+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0.71+$	$\frac{1}{2}=0.50$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}=0.57+$	1	$\sqrt{3}=1.73+$

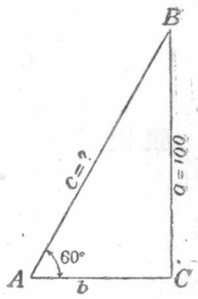
註　為助記憶計,可視第一列(卽正弦列)為$\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 被2除;第二列(卽餘弦列)與第一列次序相反;第三列(卽正切列)為用第二列各數,除第一列各相當數的商.

至餘割,正割,和餘切,皆易記憶;因其依次各為正弦,餘弦,和正切的倒數也.

注意　初學對於含45°與含30°, 60°的二種直角三角形,應當熟記;則可不由上表,而由圖形直接推出這些角的各函數值.

例一　已知一直角三角形中$A=60°$, $a=100$; 求c.

解　已知A時,其任何函數皆可知.今欲由a求c,故必取一含已知數a和未知數c的函數,卽正弦是.按§2公式(1),卽$\sin A=\frac{a}{c}$.



(第7圖)

將已知數$a=100$,和上面已求得的$\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$代入,便得$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{100}{c}$.

$$\therefore\quad c=\frac{200}{\sqrt{3}}=\frac{200}{1.7+}=117.6+.$$

如第7圖,$\angle B=?$.既得$\angle B$後,卽可用上法求出$b=58.8+$.

習　題　一

1. 已知$a=8$, $b=15$;試求$\angle A$的各函數.
2. 已知$a=5$, $c=7$;試求$\angle B$的各函數.
3. 已知$b=2$, $c=\sqrt{11}$;試求$\angle A$的各函數.
4. 已知$a=40$, $c=41$;試求$\angle B$的各函數.
5. 已知$a=p$, $b=q$;試求$\angle A$的各函數.
6. 已知$a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$;試求$\angle A$的各函數.
7. 已知$a=\sqrt{m^2+n^2}$, $c=m+n$;試求$\angle B$的各函數.
8. 已知$\sin A=\frac{3}{5}$, $c=200.5$;試求a.
9. 已知$\cos A=0.44$, $c=30.5$;試求b.
10. 已知$\tan A=\frac{11}{3}$, $b=\frac{27}{11}$;試求c.
11. 已知$A=30°$, $a=25$;試求c, B, 和b.
12. 已知$B=30°$, $c=48$;試求b, A, 和a.
13. 已知$B=45°$, $b=20$;試求c, A, 和a.
14. 求證$\sqrt{3}\sin 30°+\cos 30°=\cot 30°$.
15. 求證$\sin A\csc A+\cos A\sec A+\tan A\cot A=3$.

5. 三角函數表檢查法　上節中曾用初等幾何方法,求得30°, 45°, 60°的各函數值.然一般銳角的各函數值,則須查表.今先述表的檢查法.至於表的造法,則當於本書第七章示其概要.

應用下列的三角函數本值*表,可得自0°至90°間各角(卽任何銳角)的三角函數值,準確程度達於4位或5位有效數字.

---

*本值 natural value.

(一) 欲求自 0° 至 45° 間任一角的函數,先在最左邊的直行內,查出這角;其函數值,即可於這角橫行,和頂上記出那函數的直行內求得,例如:

$$\sin 15^\circ = 0.2588$$

$$\cot 41^\circ = 1.1504$$

(二) 欲求自 45° 至 90° 間任一角的函數,先於最右邊直行內,查出這角;其函數值,即可於這角橫行,和底下記出那函數的直行內求得. 例如:

$$\cos 64^\circ = 0.4384$$

$$\sec 85^\circ = 11.474$$

(三) 如已知某角的函數值,欲求這角,則可在頂上或底下,記明這函數的直行內,查出那已知值. 如在頂上記明這函數的直行內,查得該數,則所求角可在同橫行內最左邊的直行中求得. 如這函數係記在底下,則所求角,可在最右邊的直行內求得.

例一 已知 $\tan x = 0.7536$, 求角 x.

解 先在頂上記出 tan 的直行內,查出 0.7536. 在同橫行最左邊的直行內,查出角 $x = 37^\circ$.

例二 已知 $\sin x = 0.9816$, 求角 x.

解 先在底下記出 sin 的直行內,查出 0.9816. 在同橫行最右邊的直行內,查出角 $x = 79^\circ$.

三角函數本值表

度＼函數	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
0°	.0000	1.0000	.0000	∞	1.0000	∞	90°
1°	.0175	.9998	.0175	57.290	1.0002	57.299	89°
2°	.0349	.9994	.0349	28.636	1.0006	28.654	88°
3°	.0523	.9986	.0524	19.081	1.0014	19.107	87°
4°	.0698	.9976	.0699	14.300	1.0024	14.336	86°
5°	.0872	.9962	.0875	11.430	1.0038	11.474	85°
6°	.1045	.9945	.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84°
7°	.1219	.9925	.1228	8.1443	1.0075	8.2055	83°
8°	.1392	.9903	.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82°
9°	.1564	.9877	.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81°
10°	.1736	.9848	.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80°
11°	.1908	.9816	.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79°
12°	.2079	.9781	.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78°
13°	.2250	.9744	.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77°
14°	.2419	.9703	.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76°
15°	.2588	.9659	.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75°
16°	.2756	.9613	.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74°
17°	.2924	.9563	.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73°
18°	.3090	.9511	.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72°
19°	.3256	.9455	.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71°
20°	.3420	.9397	.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70°
21°	.3584	.9336	.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69°
22°	.3746	.9272	.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68°
23°	.3907	.9205	.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67°
24°	.4067	.9135	.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66°
25°	.4226	.9063	.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65°
26°	.4384	.8988	.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64°
27°	.4540	.8910	.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63°
28°	.4695	.8829	.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62°
29°	.4848	.8746	.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61°
30°	.5000	.8660	.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60°
31°	.5150	.8572	.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59°
32°	.5299	.8480	.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58°
33°	.5446	.8387	.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57°
34°	.5592	.8290	.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56°
35°	.5736	.8192	.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55°
36°	.5878	.8090	.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54°
37°	.6018	.7986	.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53°
38°	.6157	.7880	.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52°
39°	.6293	.7771	.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51°
40°	.6428	.7660	.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50°
41°	.6561	.7547	.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49°
42°	.6691	.7431	.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48°
43°	.6820	.7314	.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47°
44°	.6947	.7193	.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46°
45°	.7071	.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45°
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	函數＼度

6. 插入法 以上所述各例,必須角的度數,恰好爲整數,事實上這種情形頗不多得.通常情形所遇,角的度數,不必爲整數,如 $28.4°$, $5.63°$, $10°\,13'$, $72°\,27.4'$, $42°\,51'\,16''$,等.

欲求這些表中所無的角度函數值,和求對於表中所未載函數值的相當角度,我們必須用插入法*.這法的根據,在於一種假定,即:當角度變化很小時,其變化與各函數值的變化,成爲比例.但是當角度甚小時,正弦,正切,餘切等值的變化,不復合於這假設.在此如應用插入法,所得結果,不能合用,本書末章,當對此加以討論(見§93.)

例如自表中查得 $\sin 38° = 0.6157$

與 $\sin 37° = 0.6018$

相減,得對於一度差的函數值變化$=0.0139$,換句話說,就是在$37°$時,角度相差一度,使正弦值,改變0.0139.設x爲一角在$37°$左右,所生任何甚小差數;而d表在這時正弦值的相當差數.則按上述的假設,有

$$1° : x = 0.0139 : d,$$

$$\therefore \quad d = 0.0139\,x,$$

此處x表一度的小數部份.

今從$37°$至$38°$間,以0.1度爲間隔將各角正弦值,列爲

---

*插入法 interpolation.

下表：

x	d		
0.1°	0.0014	∴	$\sin 37.1° = 0.6018 + 0.0014 = 0.6032$
0.2°	0.0028	∴	$\sin 37.2° = 0.6018 + 0.0028 = 0.6046$
0.3°	0.0042	∴	$\sin 37.3° = 0.6018 + 0.0042 = 0.6060$
0.4°	0.0056	∴	$\sin 37.4° = 0.6018 + 0.0056 = 0.6074$
0.5°	0.0070	∴	$\sin 37.5° = 0.6018 + 0.0070 = 0.6088$
0.6°	0.0083	∴	$\sin 37.6° = 0.6018 + 0.0083 = 0.6101$
0.7°	0.0097	∴	$\sin 37.7° = 0.6018 + 0.0097 = 0.6115$
0.8°	0.0111	∴	$\sin 37.8° = 0.6018 + 0.0111 = 0.6129$
0.9°	0.0125	∴	$\sin 37.9° = 0.6018 + 0.0125 = 0.6143$

今更舉例以說明插入法對於求角和求函數值的應用.

(一) 對於表中所未載的一已知角,求其函數.

例一　求 $\sin 32.8°$

解　32.8° 的正弦,必介於 $\sin 32°$ 和 $\sin 33°$ 間. 由 § 5 的表查出

$$\begin{array}{r} \sin 33° = 0.5446 \\ \underline{\sin 32° = 0.5299} \ (- \end{array}$$

對於 1° 差的正弦變化 $=0.0147$ (這差數叫表差*)

今欲求 $\sin 32.8°$,必尋出相當於 0.8° 的正弦差,加於 $\sin 32°$ 上卽得. 以 d 表示相當於 0.8° 的差數,則按插入法的假定,得

$$1° : 0.8° = 0.0147 : d, \quad 卽 \quad d = 0.0118.$$

故

$$\begin{array}{r} \sin 32° = 0.5299 \\ \underline{d = 0.0118} \ (+ \\ \therefore \quad \sin 32.8° = 0.5417. \end{array}$$

例二　求 $\tan 47° 25'$

---

* 表差 tabular difference.

解 47° 25′ 的正切,必介於 tan 47° 和 tan 48° 間,由表查出

$$\tan 48° = 1.1106$$

$$\tan 47° = \underline{1.0724} \; (-$$

對於 60′(=1°) 差的表差 =0.0382

以 d 表示相當於 25′ 的差,則有

$$60' : 25' = 0.0382 : d, \quad \text{即} \quad d = 0.0159$$

$$\tan 47° = 1.0724$$

$$\underline{d = 0.0159} \; (+$$

$$\therefore \quad \tan 47° \, 25' = 1.0883.$$

例三 求 cos 68.57°.

解 68.57° 的餘弦,必介於 cos 68° 和 cos 69° 間.在表中查得

$$\cos 68° = 0.3746$$

$$\cos 69° = \underline{0.3584} \; (-$$

對於 1° 差的表差 =0.0162

以 d 表示相當於 0.57° 的差,則得

$$1° : 0.57° = 0.0162 : d, \quad \text{即} \quad d = 0.0092$$

注意表中當角度增加時,餘弦值反減;所以應當從 cos 68° 中,減去這差數,方可求得 cos 68.57°.

故

$$\cos 68° = 0.3746$$

$$\underline{d = 0.0092} \; (-$$

$$\therefore \quad \cos 68.57° = 0.3654$$

注意 在正弦,正切,和正割,應加上推得的差數;因為銳角增加,這些函數值也增加.在餘弦,餘切,和餘割,則當減去這差數;因銳角增加,這些函數值反減少.至於被加或被減的函數,必為二角中的較小者.

(二) 對於表中所未載的某種函數值,求其相當角.

例四 求正切值為 0.4320 的角,卽已知 $\tan x = 0.4320$, 求角 x.

解 先於頂上或底下記明正切的直行內,上下尋覓,務查出二數,使 0.4320 介於其間.這二數查明為 0.4245 和 0.4452; 前者是 $\tan 23°$,後者是 $\tan 24°$. 故欲求的角 x,必介於 23° 和 24° 間. 設 y 為角 x 與 23° 相差的數,則按插入法的假設,可知欲求 y,當先求 $\tan 23°$ 與 $\tan x$ 的差,查表得

$$\begin{array}{r} \tan x = 0.4320 \\ \tan 23° = \underline{0.4245}\ (- \\ 0.0075 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \tan 24° = 0.4452 \\ \tan 23° = \underline{0.4245}\ (- \\ 0.0207 \end{array}$$

(與角 x 和 23° 相差數的相當正切差) (與角度差 1° 相當的表差)

按插入法的假設,開出比例,卽得

$$1° : y = 0.0207 : 0.0075, \quad 故 \quad y = 0.36°.$$

$$\therefore \quad x = 23° + y = 23.36°.$$

註 如欲用度和分表角,則以 60 乘 0.36°, 得 21.6′, 故所求角為 23° 21.6′, 或 23° 21′ 36″. 或用分數開出比例式,卽可直接求出 y 的分數:

$$60' : y = 0.0207 : 0.0075, \quad 卽 \quad y = 21.6'.$$

$$\therefore \quad x = 23° + y = 23°\ 21.6' = 23°\ 21'\ 36''.$$

注意 對於正弦,正切,和正割,取查得二函數中小者與已知函數值相減.對於餘弦,餘切,和餘割,則取大者與已知函數值相減,其理與(一)中的注意同.

7. 測量和計算的準確程度 欲明準確程度的意義,可看下例:

設 $c=267$, $A=35°$, 求 $c \sin A$, 則查表得 $\sin 35° = 0.5736$, 依常法相乘如下:

$$\begin{array}{r} \sin 35° = 0.5736 \\ \underline{267} \\ 40152 \\ 34416 \\ \underline{11472} \\ a = 153.1512 \end{array}$$

但是表中所載各正弦值,不多於四位有效數字.換句話說,即從第五位起,均已略去.故在乘積內,除首四位數外,其餘未必可靠.因此這乘積的末三位數,應行略去.因多寫這三位,不特不能使結果更精密,反得一似是而非的準確程度.欲明此理,可取編者所輯的五位算學用表(中華書局出版),在 p. 85 查得:

$$
\begin{array}{r}
\sin 35^\circ = 0.57358 \\
267 \\
\hline
401506 \\
344148 \\
114716 \\
\hline
a = 153.14586
\end{array}
$$

取這二結果比較,便知只有首四位有效數字相同,所以只應取 $a=153.1$.

在本書中,所設各已知數字,皆假定其爲十分準確.譬如已知一三角形的兩邊和夾角,爲135尺,217尺,與25.3°,乃假設由測量得這些數值時,絲毫無誤.但在工程等方面實際問題,由實地測量所得數字,其中差誤,雖可使其小於某限度,但不能完全免除.故實行測量所得各結果,須注意其準確程度,是否相同,如量某三角形的一邊,嘗十分謹慎,但量至他一邊時,又草草了事,則費力所得較精確的結果,亦受其累.因用以入計算時,所得結果的準確程度,至佳亦不能高於草率測量者.同理,測量一三角