

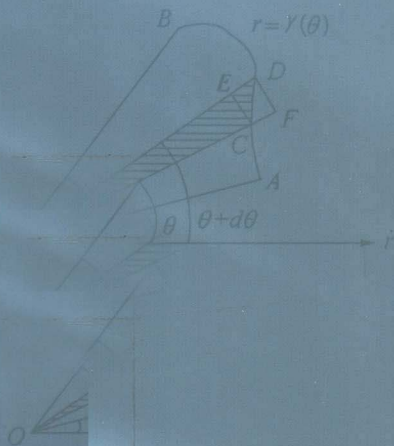
大学数学系列丛书

# 高等数学(下)

## Gaodeng Shuxue

主编 赵宝江 许宏文 / 副主编 王冰 韩明莲

(适用于经管类专业)



清华大学出版社  
<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



北京交通大学出版社  
<http://press.bjtu.edu.cn>

大学数学系列丛书

内容简介

# 高等数学 (下)

(适用于经管类专业)

主 编 赵宝江 许宏文

副主编 王 冰 韩明莲

出版学

1113

ISBN 955

1. ① 每

本 册 中 国

京 北

京 北 青 海 中

明 全 南 京

本 册 中 国

暴 : 册 藏 升 第

审 查 : 行 政 部 出 世

京 北

京 北 青 海 中

明 全 南 京

清华大学出版社

北京交通大学出版社

• 北京 •

清华大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社 北京交通大学出版社

## 内 容 简 介

本书是作者依据多年的教学实践经验和对高等学校经济管理类专业培养应用型人才教学改革的认识,并根据“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的。

本书结构严谨,内容深广度适当,贴近教学实际,便于教与学。全书分上、下两册出版,下册主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值和特征向量、二次型、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步。章后习题中有很多来自历年全国研究生和 MBA 的入学试题,并且书末附有习题参考答案。本书可作为高等学校经济管理类专业的教材,也可供报考经济学和管理学类硕士研究生的读者参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/赵宝江,许宏文主编. —北京:清华大学出版社;北京交通大学出版社,2011.2

(大学数学系列丛书)

ISBN 978-7-5121-0498-3

I. ①高… II. ①赵… ②许… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 017347 号

责任编辑:黎丹 特邀编辑:衣紫燕

出版发行:清华大学出版社 邮编:100084 电话:010-62776969

北京交通大学出版社 邮编:100044 电话:010-51686414

印刷者:北京瑞达方舟印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印张:22.25 字数:499千字

版 次:2011年3月第1版 2011年3月第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-5121-0498-3/O·84

印 数:1~4 000册 定价:32.00元

---

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043, 51686008; 传真:010-62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn。

# 前 言

本书是作者依据多年的教学实践经验和对高等学校经济管理类专业培养应用型人才教学改革的认识,并根据“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的。全书分上、下两册,系统并有重点地介绍了有关微积分、线性代数、概率论与数理统计的知识。下册主要内容包括:编写过程中特别注意以下几点。

1. 在内容安排上由浅入深,符合认知规律,既考虑了数学的科学性、系统性与逻辑性,又汲取了国内外一些优秀教材的优点,对传统的教学内容和结构作了适当的调整,增加了与经济、管理密切相关的数学理论和方法。

2. 在教学内容上实现了与经济管理类专业课程内容的整体化,能够更好地为后续课程服务,并能满足报考经济学和管理学类硕士研究生和将来从事实际工作的需要。

3. 贯彻问题教学法的基本思想,对重要概念、定理、方法,尽量先从解决经济管理领域中的实际问题入手,再引入数学概念,介绍数学定理、方法,最后解决所提出的问题,使学生能够了解实际背景,提高学习兴趣,同时增强应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

4. 例题和习题的选配层次分明,难易适度,并恰当选用经济管理中的应用案例。教材在每节后面都配置基本题,尽量使读者在做完本节习题后能够较好地理解和掌握本节的基本内容、基本理论和基本方法;在每章后配置总习题,总习题分为(A)、(B)两组,其中(A)组习题体现了经济管理类专业本科数学基础课程的基本要求,(B)组习题中的大部分来自历年全国研究生和MBA的入学试题,综合性较强,可供学有余力或有志报考经济学和管理学类硕士研究生的读者使用。

5. 行文追求简洁流畅,重点、难点阐述详细,逻辑性强,既富有启发性又通俗易懂。针对经管类专业教学的目标与特点,有些定理仅给出结论而略去证明过程,突出理论的应用和方法的介绍,内容深广度适当,贴近教学实际,便于教与学。

本书共10章,分别由王冰(第1章、第2章)、韩明莲(第4章、第5章)、赵宝江(第6章、第7章、第8章)、许宏文(第3章、第9章、第10章)执笔编写,全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由赵宝江承担。

王秀英教授详细审阅了本书,并提出了许多改进的意见,谨在此表示衷心的感谢。

本书配有教学课件和相关的教学资源,有需要的读者可以从网站 <http://press.bjtu.edu.cn> 下载或与 [cbsld@jg.bjtu.edu.cn](mailto:cbsld@jg.bjtu.edu.cn) 联系。



# 目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 $n$ 阶行列式	1
1.2 行列式的性质	9
1.3 行列式按行(列)展开	16
1.4 克拉默(Cramer)法则	23
总习题 1	27
第 2 章 矩阵	30
2.1 矩阵	30
2.2 矩阵的运算	34
2.3 矩阵的逆	45
2.4 矩阵的分块	52
2.5 矩阵的初等变换	57
2.6 矩阵的秩	65
总习题 2	68
第 3 章 线性方程组	74
3.1 线性方程组的消元解法	74
3.2 $n$ 维向量及其线性组合	83
3.3 向量组的线性相关性	88
3.4 向量组的秩	92
3.5 线性方程组解的结构	98
3.6 投入产出的数学模型	106
总习题 3	118
第 4 章 矩阵的特征值与特征向量	124
4.1 矩阵的特征值与特征向量	124
4.2 相似矩阵与矩阵的对角化	130
4.3 实对称矩阵的对角化	135
总习题 4	143
第 5 章 二次型	147
5.1 二次型的概念	147
5.2 二次型的标准形	152

5.3 正定二次型 .....	159
总习题 5 .....	164
<b>第 6 章 随机事件及其概率</b> .....	168
6.1 随机现象和随机事件 .....	168
6.2 随机事件的概率 .....	173
6.3 乘法公式和随机事件的独立性 .....	179
6.4 全概率公式和贝叶斯公式 .....	183
6.5 独立试验序列 .....	187
总习题 6 .....	189
<b>第 7 章 随机变量及其分布</b> .....	192
7.1 随机变量的概念 .....	192
7.2 离散型随机变量 .....	193
7.3 连续型随机变量 .....	196
7.4 随机变量的分布函数 .....	201
7.5 随机变量函数的分布 .....	205
总习题 7 .....	208
<b>第 8 章 多维随机变量及其分布</b> .....	211
8.1 二维随机变量及其分布 .....	211
8.2 边缘分布 .....	215
8.3 条件分布 .....	218
8.4 随机变量的独立性 .....	221
8.5 二维随机变量函数的分布 .....	224
总习题 8 .....	229
<b>第 9 章 随机变量的数字特征</b> .....	234
9.1 随机变量的数学期望 .....	234
9.2 随机变量的方差 .....	240
9.3 协方差与相关系数 .....	245
9.4 矩和协方差矩阵 .....	249
9.5 大数定律 .....	252
9.6 中心极限定理 .....	255
总习题 9 .....	258
<b>第 10 章 数理统计初步</b> .....	263
10.1 总体、样本与统计量 .....	263
10.2 抽样分布 .....	268
10.3 参数的点估计 .....	274

总习题 10 .....	284
附录 A 习题参考答案 .....	288
附录 B 泊松分布表 .....	329
附录 C 标准正态分布密度函数值表 .....	332
附录 D 标准正态分布函数值表 .....	334
附录 E F 分布上分位数表 .....	336
附录 F t 分布上分位数表 .....	344
附录 G $\chi^2$ 分布上分位数表 .....	345
参考文献 .....	346

# 第 1 章 行 列 式

行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的. 它是研究矩阵、线性方程组、向量间的线性关系、特征值和二次型等问题的有力工具, 它不仅贯穿于线性代数的始终, 而且在数学的其他分支及经济管理、科学技术中都有广泛的应用. 本章主要讨论  $n$  阶行列式的定义、性质及其计算方法, 进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则.

## 1.1 $n$ 阶行列式

### 1.1.1 二阶和三阶行列式

行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的. 考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

这里  $b_1, b_2$  是常数,  $a_{ij}$  是  $x_j$  的系数, 它有两个下标, 下标  $i$  表示它在第  $i$  个方程,  $j$  表示它是第  $j$  个未知量的系数.

利用消元法解方程组得到: 当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时, 此方程组有唯一解, 即

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆, 引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$D$  叫做二阶行列式. 它的横排叫做行, 竖排叫做列,  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) 称为行列式的元素. 元素  $a_{ij}$  的第一个下标  $i$  叫做行标, 第二个下标  $j$  叫做列标.

二阶行列式所表示的代数和可以用画线 (图 1-1) 的方法记忆, 即实线 (主对角线) 连接的两个元素之积减去虚线 (副对角线) 连接的两个元素之积, 此方法也称为二阶行列式的“对角线法则”.

利用二阶行列式的概念, 方程组 (1-1) 的解可以叙述为: 当二阶行列式

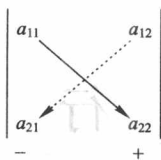


图 1-1

时, 该方程组有唯一解, 即

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

**【例 1-1】** 计算二阶行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ .

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-4) - 2 \times (-3) = 2$$

**【例 1-2】** 设  $D = \begin{vmatrix} t^2 & t \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ , 求  $t$  的值.

解  $D = -2t^2 - t$ , 由题设知  $-2t^2 - t = 0$ , 解得  $t = 0$  或  $t = -\frac{1}{2}$ .

**【例 1-3】** 解线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ .

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

所以方程组有唯一解. 又

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

于是方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2$$

对于三元线性方程组有相仿的结论. 设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-2)$$

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式.

同样, 三阶行列式也有对角线法则 (图 1-2), 将很方便地记忆上述的计算公式, 其中实线连接的三个元素的乘积取正号, 虚线连接的三个元素的乘积取负号, 所得六项的代数和就是三阶行列式的值.

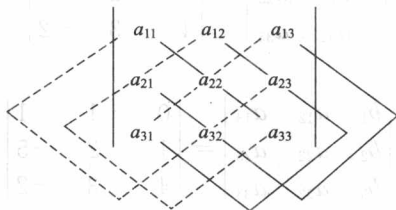


图 1-2

用消元法解线性方程组 (1-2), 可以得到与二元方程组 (1-1) 类似的结果, 即当系

数行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$  时, 方程组有唯一解.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

**【例 1-4】** 计算三阶行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$ .

解  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1) + 1 \times 0 \times 3 + 1 \times 1 \times (-7) - 1 \times 1 \times 3 - 1 \times 1 \times (-1) - 2 \times 0 \times (-7) = -11$

**【例 1-5】** 设  $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , 其中  $a, b$  为实数. 当  $a, b$  满足什么条件时,  $D=0$ .

解 因为  $D=a^2+b^2$ , 所以当  $a=b=0$  时,  $D=0$ .

**【例 1-6】** 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

所以方程组有唯一解. 令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

则方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{4}$$

### 1.1.2 排列与逆序

**定义 1-1** 由  $1, 2, \dots, n$  组成的一个有序数组, 称为一个  $n$  级排列.

显然  $12\cdots n$  是一个  $n$  级排列, 这个排列具有自然顺序, 就是按递增的顺序排起来的; 其它的排列或多或少地破坏了自然顺序. 例如,  $24315$  是一个 5 级排列;  $n(n-1)(n-2)\cdots 321$  是一个  $n$  级排列.

由  $1, 2, \dots, n$  组成的  $n$  级排列共有  $n!$  个.

**定义 1-2** 在一个  $n$  级排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  中, 如果一对数的前后位置与大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 那么它们就称为一个逆序. 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数, 记为  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ .

**定义 1-3** 逆序数为偶数的排列称为偶排列; 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

**【例 1-7】** 求下列排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性.

(1) 45132            (2)  $n(n-1)\cdots 21$

解 (1)  $\tau(45132) = 3 + 3 + 0 + 1 + 0 = 7$ , 故此排列为奇排列.

(2)  $\tau[n(n-1)\cdots 21] = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ , 故当  $n=4k$  或  $n=4k+1$  时, 该排列为偶排列; 当  $n=4k+2$  或  $n=4k+3$  时, 该排列为奇排列.

**定义 1-4** 在排列中某两个数的位置互换, 而其余的数不动, 就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个对换.

例如, 在排列  $2431$  中, 将  $4$  与  $1$  对换, 得到  $2134$ , 且其逆序数的奇偶性改变. 一般地, 有以下结论.

**定理 1-1** 任意一个排列, 经过一次对换后, 其奇偶性改变.

证略.

这就是说, 经过一次对换, 奇排列变成偶排列, 偶排列变成奇排列.

**推论** 在全部  $n$  级排列中, 奇、偶排列的个数相等, 各有  $\frac{n!}{2}$  ( $n \geq 2$ ) 个.

### 1.1.3 $n$ 阶行列式的概念

在给出  $n$  阶行列式的定义之前, 先来看三阶行列式的构成规律.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

从三阶行列式的值中可以看出, 它们都是一些乘积的代数和, 而且每一项乘积都是由行

列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的, 并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成的. 另一方面, 每一项乘积都带有符号. 这个符号是按什么原则决定的呢? 在三阶行列式的展开式中, 每项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中  $j_1 j_2 j_3$  恰好是 1, 2, 3 的一个排列. 可以看出, 当  $\tau(j_1 j_2 j_3)$  是偶数时, 对应的项前面是正号, 当  $\tau(j_1 j_2 j_3)$  是奇数时为负号.

仿此, 给出  $n$  阶行列式的定义.

**定义 1-5** 由  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-3)$$

称为  $n$  阶行列式, 其中横排叫做行, 竖排叫做列. 它等于所有取自不同行不同列的  $n$  个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1-4)$$

的代数和, 这里  $j_1 j_2 \cdots j_n$  是 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  的一个排列, 每一项都按下面规则带有符号; 当  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$  是偶数时, (1-4) 带有正号; 当  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$  是奇数时, (1-4) 带有负号, 则称 (1-3) 为  $n$  阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里  $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对所有  $n$  级排列求和.

定义 1-5 表明,  $n$  阶行列式是由  $n!$  项组成的.

**【例 1-8】** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

且只有当  $j_1=2, j_2=3, j_3=4, j_4=1$  时,  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$ , 所以

$$D = (-1)^{\tau(2341)} a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} = (-1)^3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = -24$$

## 【例 1-9】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这里  $a_{ii}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 称为主对角线上的元素.

解 在展开式中, 行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

因为行列式中第  $n$  行除  $a_{nn}$  以外全为零, 故只有取  $j_n = n$  时不为零; 在考察第  $n-1$  行  $j_{n-1}$  取值, 因为它不能再取第  $n$  列, 因此只有取  $j_{n-1} = n-1$  时不为零, 依次可知  $j_{n-2} = n-2, \dots, j_1 = 1$ . 不难看出, 展开式中除  $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$  不为零外, 其余项都为零. 而这一项的列标排列为偶排列, 所以这一项前面的符号是正的, 于是

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

该行列式称为上三角形行列式, 即上三角形行列式等于主对角线上元素的乘积.

除此以外, 特殊的行列式还有以下几种.

## (1) 主对角线行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

## (2) 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

## (3) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

下三角形行列式也等于主对角线上元素的乘积.

由于数的乘法满足交换律, 因此  $n$  阶行列式中取自不同行不同列的  $n$  个元素相乘时, 其顺序可以是任意的, 利用定理 1-1 可以证明:  $n$  阶行列式展开式中的一项还可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad \text{或} \quad (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中  $i_1 i_2 \cdots i_n$  与  $j_1 j_2 \cdots j_n$  均为  $n$  级排列. 于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

其中,  $\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}$  表示对所有  $n$  级排列求和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中,  $\sum$  表示对所有不同行不同列的  $n$  个元素之积求和.

### 习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a-b & b \\ -b & a+b \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

2. 计算下列三阶行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

3. 解下列方程.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & x & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. 证明下列等式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

5. 求下列排列的逆序数.

(1) 45321

(2) 137654

(3) 382457619

(4)  $(2k)_1(2k-1)_2 \cdots (k+1)_k$

6. 写出四阶行列式中含有因子  $a_{33}a_{44}$  的项.

7. 根据行列式的定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

中  $x^3$  的系数.

8. 用行列式的定义计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

9. 证明: 对于一个  $n$  阶行列式, 如果其中零元素的个数多于  $n^2 - n$  个, 那么行列式的值为零.

## 1.2 行列式的性质

行列式的计算是一个很重要的问题, 也是一个很麻烦的问题. 当行列式的阶数大于 3 时, 按定义来计算行列式是比较复杂的. 为了简化行列式的计算, 先来研究行列式的性质.

### 1.2.1 行列式的性质

**性质 1** 将行列式的行、列互换, 行列式的值不变. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$