代数和初等函数学习指导

许纯舫编

中国青年出版社

目 次

下册

目 次

下册

第十四章　实数指数幂和幂函数

一　有关指数的公式

我們以前討論到的冪和方根，它們的指数(包括根指数)都限于正整数。把这种冪和方根的重要性質重新汇集在一起，得到下列的十种公式：

1. 冪的积　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。　(1)

2. 冪的商　$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。　$(a\neq 0,m>n)$　(2)

　　$\dfrac{a^m}{a^n}=1$。　$(a\neq 0,m=n)$　(3)

　　$\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{1}{a^{n-m}}$。　$(a\neq 0,m<n)$　(4)

3. 冪的冪　$(a^m)^n=a^{mn}$。　(5)

4. 积的冪　$(abc\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots$。　(6)

5. 商的冪　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$。　$(b\neq 0)$　(7)

6. 冪的方根　$\sqrt[n]{a^m}=a^{m\div n}$。($n$ 能整除 $m,n>1$)　(8)

7. 方根的冪　$(\sqrt[n]{a})^m=a^{m\div n}$。($n$ 能整除 $m,n>1$)　(9)

8. 积的方根　$\sqrt[n]{abc\cdots}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots$。　$(n>1)$　(10)

9. 商的方根　$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$。　$(b\neq 0,n>1)$　(11)

10. 方根的方根　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$。　$(m>1,n>1)$　(12)

二 实数指数幂

在上节所举的許多公式中，幂和方根的指数不但都限于正整数，而且有些还有别的限制，有些不能統一(像幂的商有三种情况)。因此，我們現在要把指数的概念加以推广，一方面把某些限制取消，一方面把不統一的統一起来。

下面就是我們推广而得的几种实数的指数幂：

1. 零指数幂 不等于零的任何数的零次幂都等于1.

公式： $a^0=1.$ $(a\neq 0)$ (13)

理由 为了要把公式(3)归并到(2)，我們取消(2)式中$m\neq n$①的限制，把由(3)所得的$\frac{a^m}{a^m}=1$和由(2)所得的$\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0$統一起来，規定：

$$a^0=1.$$

2. 負整数指数幂 不等于零的数的$-p$次幂(p是正整数)，等于这个数的p次幂的倒数.

公式： $a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$ $(a\neq 0, p$是正整数) (14)

理由 为了要把公式(4)归并到(2)，我們再取消(2)式中$m\nless n$的限制，把由(4)所得的$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$和由(2)所得的$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=a^{-(n-m)}$統一起来，使

$$a^{-(n-m)}=\frac{1}{a^{n-m}}.$$

上式中的$(n-m)$是正整数，用p来代替，所以我們規定了：

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

3. 正分数指数幂 正数的$\frac{m}{n}$次幂(m是正整数，n是大

① $m>n$这一个关系，包括了$m\neq n$和$m\nless n$两个关系在里面.

于 1 的整数)，等于这个正数的 m 次幂的 n 次方根。

公式：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. ($a\geqq 0, m、n$ 是正整数，$n>1$) (15)

理由 为了要使 m 不是 n 的整数倍的时候，公式(8)和(9)也能适用，我們作了上面的規定.

4. 負分数指数幂 正数的 $-\frac{m}{n}$ 次幂(m 是正整数，n 是大于 1 的整数)，等于这个正数的 m 次幂的 n 次方根的倒数。

公式：$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. ($a>0$, $m、n$ 是正整数，$n>1$) (16)

理由 这是把負整数指数幂公式中的正整数 p 推广而为正分数 $\frac{m}{n}$，再由正分数指数幂的定义而作出的規定.

注意 因为小数就是以 10 的幂为分母的分数，所以正的或負的小数指数幂也有了意义. 例如 $a^{1.4}=a^{\frac{14}{10}}=\sqrt[10]{a^{14}}$; $a^{-0.23}=a^{-\frac{23}{100}}=\frac{1}{\sqrt[100]{a^{23}}}$.

5. 正无理数指数幂 如果 α 是一个正无理数，α_1 是它的任何精确度的不足近似值，α_2 是它的任何精确度的过剩近似值，而 a 是一个正数，那末我們規定 a^α 是这样的一个实数：

(1) 当 $a>1$ 的时候，$a^{\alpha_1}<a^\alpha<a^{\alpha_2}$;

(2) 当 $a<1$ 的时候，$a^{\alpha_1}>a^\alpha>a^{\alpha_2}$.

理由 例如 $\sqrt{2}$ 的各个不足近似值是 1.4, 1.41, 1.414, ……; 而各个过剩近似值是 1.5, 1.42, 1.415, ……, 我們来分别說明 $10^{\sqrt{2}}$ 和 $0.1^{\sqrt{2}}$ 的意义：

(1) 因为当底数大于 1 的时候，指数較大的，幂也就較大，所以 $10^{\sqrt{2}}$ 应該大于 $10^{1.4}$, $10^{1.41}$, $10^{1.414}$, ……中的任何一个数；又应該小于 $10^{1.5}$, $10^{1.42}$, $10^{1.415}$, ……中的任何一个数. 我們就把 $10^{\sqrt{2}}$ 規定为具有这个性質的一个实数.

(2) 因为当底数小于 1 的时候，指数較大的，幂反而較小，所以 $0.1^{\sqrt{2}}$ 应

該小于$0.1^{1.4}$, $0.1^{1.41}$, $0.1^{1.414}$, ……中的任何一个数；又应該大于$0.1^{1.5}$, $0.1^{1.42}$, $0.1^{1.415}$, ……中的任何一个数。我們就把$0.1^{\sqrt{2}}$規定为具有这个性質的一个实数。

6. 負无理数指数冪 如果α是一个正无理数，a是一个正数，那末$a^{-\alpha}$就是a^{α}的倒数。

理由 我們为了要使負无理数的指数冪和負分数指数冪、負整数指数冪的性質統一起来，所以作了上面的規定。

我們把指数的概念作了这样的推广以后，經过驗証，知道上节中所举的有关指数的許多公式，对于本节中所講的各种实数的指数冪也都是适用的。并且，規定了各种新指数冪的意义以后，上节的某些公式就可以归并到别的公式里面。例如公式(3)和(4)可以归并到公式(2)，已不必說，就是公式(2)也可以归并到公式(1)，理由是：

$$\frac{a^m}{a^n}=a^m\cdot\frac{1}{a^n}=a^m\cdot a^{-n},$$

这就可以利用公式(1)求出結果来了。另外，凡是公式中含有根号的，除掉公式(8)和(9)可以包括在正分数指数冪的定义里面以外，其他的几个公式也都可以归并到别的公式里去。例如：

$$\sqrt[n]{abc\cdots}=(abc\cdots)^{\frac{1}{n}},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}},$$

所以公式(10)可以归入(6)，公式(11)可以归入(7)，公式(12)可以归入(5)。

三 关于实数指数幂的运算

1. 关于零指数幂和負整数指数幂的 利用公式 (13) 和 (14)，以及第一节中的公式，可以計算关于零指数幂和負整数指数幂的問題。

例題 301. 化簡下列各式：

(1) 3^{-2}；(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$；(3) $(0.3)^{-4}$；(4) $\left(4\frac{2}{5}\right)^{0}$。

解 (1) $$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9};$$

(2) $$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{-\frac{1}{8}}=-8;$$

(3) $$(0.3)^{-4}=\frac{1}{(0.3)^4}=\frac{1}{0.0081}=123\frac{37}{81};$$

(4) $$\left(4\frac{2}{5}\right)^{0}=1.$$

例題 302. 計算下列各題：

(1) $(3a^{-2}b^2c^{-3})(0.8ab^{-3}c^4)$；

(2) $(x^{-1}y^{-3}z^{-2})\div(5x^2y^{-4}z^{-2})$；

(3) $(2ab^2x^{-3})^{-2}$； (4) $\sqrt{9a^4b^{-2}c^{-6}}$。

解 (1) $$(3a^{-2}b^2c^{-3})(0.8ab^{-3}c^4)=2.4a^{-2+1}b^{2+(-3)}c^{(-3)+4}$$
$$=2.4a^{-1}b^{-1}c=\frac{2.4c}{ab};$$

(2) $$(x^{-1}y^{-3}z^{-2})\div(5x^2y^{-4}z^{-2})=\frac{1}{5}x^{-1-2}y^{-3-(-4)}z^{-2-(-2)}$$
$$=\frac{1}{5}x^{-3}y^1z^0=\frac{y}{5x^3};$$

(3) $$(2ab^2x^{-3})^{-2}=2^{-2}a^{-2}b^{2(-2)}x^{(-3)(-2)}=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^4}\cdot x^6=\frac{x^6}{4a^2b^4};$$

(4) $$\sqrt{9a^4b^{-2}c^{-6}}=3a^{4\div2}b^{-2\div2}c^{-6\div2}=3a^2b^{-1}c^{-3}=\frac{3a^2}{bc^3}.$$

例題 303. 計算下列各題：

（1）$(x^{-2}-y^{-1})^2$；　　（2）$(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})$；

（3）$\dfrac{x^4-y^4}{x^{-2}+y^{-2}}$；　　（4）$\left[\left(\dfrac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y^{-1}}\right)^2\right]^{-3}$.

解（1）
$$(x^{-2}-y^{-1})^2=(x^{-2})^2-2x^{-2}y^{-1}+(y^{-1})^2$$
$$=x^{-4}-2x^{-2}y^{-1}+y^{-2}=\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2y}+\frac{1}{y^2};$$

（2）
$$(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})=(a^{-2})^2-(b^{-3})^2=a^{-4}-b^{-6}=\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^6};$$

（3）
$$\frac{x^4-y^4}{x^{-2}+y^{-2}}=\frac{x^4-y^4}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}=\frac{x^4-y^4}{\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}}$$
$$=(x^4-y^4)\cdot\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=x^2y^2(x^2-y^2);$$

（4）
$$\left[\left(\frac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y^{-1}}\right)^2\right]^{-3}=\left(\frac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y^{-1}}\right)^{-6}$$
$$=\frac{3^{-6}a^{-18}b^{12}c^{18}}{2^{-6}x^{-12}y^6}=\frac{64b^{12}c^{18}x^{12}}{729a^{18}y^6}.$$

注意　从公式(14)，我們可以知道，一个負整数指数幂如果是在分子里，那末可以把它变作正整数指数幂，而移到分母里；如果是在分母里，那末也可以用同法变化，而移到分子里.

2. 关于分数指数幂的　利用公式(15)和(16)，以及第一节中的公式，可以計算关于分数指数幂的問題.

例題 304.　化簡下列各式：

（1）$25^{\frac{1}{2}}$；（2）$64^{-\frac{2}{3}}$；（3）$(\frac{4}{25})^{-\frac{3}{2}}$；（4）$81^{0.25}$.

解（1）
$$25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5;$$

（2）
$$64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16};$$

（3）
$$\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^3}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3}=\frac{1}{\frac{8}{125}}=\frac{125}{8}=15\frac{5}{8};$$

（4）
$$81^{0.25}=81^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=3.$$

注意　$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$，应用公式(15)和(16)时，不必拘泥于$\sqrt[n]{a^m}$，有时为

了計算便利，可以改用$(\sqrt[n]{a})^m$.

例題 305. 計算下列各題：

（1）$a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{5}}c^{-1}\cdot(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}}c^{-3})^{-\frac{1}{2}}$；

（2）$x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\div x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$；

（3）$(x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})(x^{-\frac{4}{3}}-x^{-1}+x^{-\frac{2}{3}})$；

（4）$\sqrt{12a^{-4}b^5}\div\left[\left(\frac{a^5}{3b^4}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}$.

解 （1）$a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{5}}c^{-1}\cdot(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}}c^{-3})^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{5}}c^{-1}\cdot a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{5}}c^{\frac{3}{2}}$

$$=a^1b^0c^{\frac{1}{2}}=a\sqrt{c}\text{；}$$

（2）$x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\div x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}=x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}\div x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}=x^0y^0=1$；

（3）$(x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})(x^{-\frac{4}{3}}-x^{-1}+x^{-\frac{2}{3}})$

$$=(x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})[(x^{-\frac{2}{3}})^2-x^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+(x^{-\frac{1}{3}})^2]$$

$$=(x^{-\frac{2}{3}})^3+(x^{-\frac{1}{3}})^3=x^{-2}+x^{-1}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}.$$

（4）$\sqrt{12a^{-4}b^5}\div[(\frac{a^5}{3b^4})^{-2}]^{\frac{1}{4}}=2\cdot3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{5}{2}}\div(\frac{a^5}{3b^4})^{-\frac{1}{2}}$

$$=2\cdot3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{5}{2}}\div\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^{-2}}$$

$$=2\cdot3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{3^{-\frac{1}{2}}b^{-2}}{a^{-\frac{5}{2}}}$$

$$=2\cdot3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{5}{2}}\cdot3^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{5}{2}}b^{-2}$$

$$=2\cdot3^0a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{ab}.$$

注意 题中有根式的，有时用分数指数幂来表示，解法比較簡便．另外，在除式里的幂，有时可以把指数的号反过来，化作乘式来做，也比較簡便．

3. 关于无理数指数幂的 无理数指数幂也适用第一节

中的許多公式.

例题 306. 已知 $10^{0.30103}=2$ (指数是近似值), $10^{0.47712}=3$ (指数是近似值),試把下列各数写成 10 的冪的形式:

(1) 6; (2) 8; (3) 54; (4) 1.5; (5) $\sqrt{2}$.

解 (1) $6=2\cdot3=10^{0.30103}\cdot10^{0.47712}=10^{0.77815}$;

(2) $8=2^3=(10^{0.30103})^3=10^{0.90309}$;

(3) $54=2\cdot3^3=10^{0.30103}\cdot(10^{0.47712})^3$

$=10^{0.30103}\cdot10^{1.43136}=10^{1.73239}$;

(4) $1.5=\dfrac{3}{2}=\dfrac{10^{0.47712}}{10^{0.30103}}=10^{0.17609}$;

(5) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=(10^{0.30103})^{\frac{1}{2}}=10^{0.15052}$.

研究題四八

化簡下列各題中的冪(1.—3.):

1. (1) $27^{\frac{2}{3}}$; (2) $4^{-\frac{3}{2}}$; (3) $16^{0.75}$; (4) $64^{-0.5}$.

2. (1) $100^{-\frac{7}{2}}$; (2) $81^{-\frac{3}{4}}$; (3) $36^{-\frac{1}{2}}$; (4) 2^{-3}.

3. (1) $(\frac{27}{125})^{-\frac{4}{3}}$; (2) $(\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}}$; (3) $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}$; (4) $(\frac{1}{16})^{1.5}$.

計算下列各題(4.—6.):

4. (1) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{8}}\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$; (2) $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$;

   (3) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c\cdot a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$; (4) $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$.

5. (1) $(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^2$; (2) $(a^{-1}b^{\frac{1}{6}})^{-\frac{3}{2}}$;

   (3) $[(a^{-2})^2]^{\frac{3}{4}}$; (4) $[(a^{-\frac{5}{6}})^3]^{-\frac{1}{5}}$.

6. (1) $20a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}\div4a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}$; (2) $(a^{\frac{3}{4}})^3\div(a^{\frac{3}{4}})^{-2}\div(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}$;

   (3) $(x^3)^{\frac{1}{3}}\div(x^{-3})^{-\frac{1}{3}}\div(4a^2b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$;

(4) $(27a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$.

利用分数指数計算下列各題(7.8.)：

7. (1) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a}$； (2) $\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a^4}$；

(3) $\sqrt{a^3x}\sqrt[3]{a^2x^5}$； (4) $\sqrt{a^3b^{-2}}\div\sqrt[3]{a^{-4}b^5}$.

8. (1) $\sqrt[3]{a^7}\sqrt[5]{a^7}\sqrt[3]{a^{-1}}\div\sqrt[5]{a^2}$； (2) $\sqrt[3]{a^6\sqrt{b^3\sqrt{c}}}\div\sqrt{a^4b\sqrt[3]{c}}$.

計算下列各題(9.10.)：

9. (1) $(x^{\frac{1}{2}}-4)(x^{\frac{1}{2}}+5)$； (2) $(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3$；

(3) $(m^{\frac{1}{4}}+n^{-\frac{1}{2}})(m^{\frac{1}{4}}-n^{-\frac{1}{2}})$；

(4) $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$.

10. (1) $(x-y)\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$； (2) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})\div(x^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}})$.

11. 已知 $10^{\alpha}=5$，$10^{\beta}=6$，求 $10^{2\alpha+\beta}$；$10^{-\frac{1}{3}\alpha}$；$10^{3(\alpha-\beta)}$.

12. 解下列各方程：

(1) $3x+3x^{-1}-10=0$； (2) $6x+x^{\frac{1}{2}}-2=0$；

(3) $x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}+6=0$； (4) $x^{\frac{1}{3}}+5x^{-\frac{1}{3}}-6=0$.

四 冪函数

像 $y=x^n$ 的形式的函数，叫做"冪函数"。在冪函数 $y=x^n$ 中，x 是自变量，n 是任何不等于零的实数的常量（如果 $n=0$，那末 $y=x^n$ 是一个常数 1，这沒有討論的必要）。这里只研究几种簡单的有理数的冪函数，就是說在上式中的 n 限于几个特殊的有理数。

1. 冪函数 $y=x^2$ 这个冪函数就是最簡单的二次函数，它的定义域是全体实数，值域是全体正数和零。从第十二章

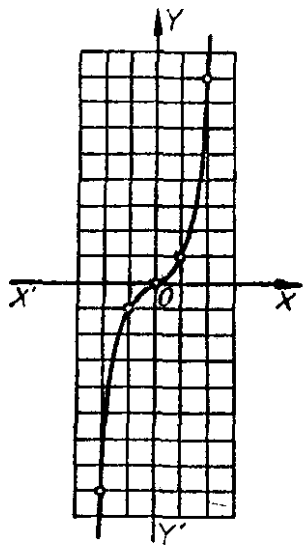

图46.

第一节的1，知道它的图象是抛物綫．这条抛物綫以原点做頂点，关于縱軸是对称的，从原点起往左右两边同时向上无限伸展．

2．冪函数 $y=x^3$ 这个冪函数的定义域和值域都是全体实数．我們求出 x 和 y 的各組对应值，列成下面的一张表，用它們来作为点的坐标，可以画出这个函数的图象，如图46．

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-27	-8	-1	0	1	8	27	…

这个图象叫做"立方抛物綫"，它有下列的几个性質：

（1） 經过原点．

（2） 关于原点是对称的．

（3） 从原点起向右上方和左下方同时无限伸展．

說明 因为当 $x=0$ 时，得到 $y=0$，所以有性質（1）．因为当 x 取两个相反数的时候，y 的两个对应值也成相反数，所以有性質（2）．因为 x 的值和 y 的对应值同是正值，或同是負值，而且当其中一个数的絕对值逐渐增加时，另一个数的絕对值也逐渐增加，所以有性質（3）．

3．冪函数 $y=x^{-1}$ 这个冪函数就是 $y=\frac{1}{x}$，它的定义域是 $x\neq 0$，值域是 $y\neq 0$．我們在它的定义域內求出 x 和 y 的各組对应值，列成下面的一张表，用它們来作为点的坐标，可以画出这个函数的图象，如图47．

x	…	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	…	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
y	…	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	…	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…

这个图象是特殊的双曲綫，叫做“等軸双曲綫”①，它有下列的几个性質：

（1）有两个分支，一个在第一象限內，另一个在第三象限內。

（2）不通过原点。

（3）关于原点是对称的。

（4）离原点愈远就愈接近于两軸，但和两軸都不相交；这就是說，两軸是它的漸近綫。

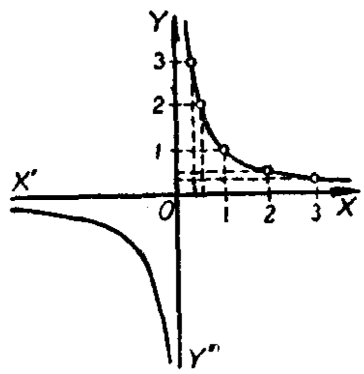

图47.

說明 因为x和对应的y两个值同是正值，或同是負值，所以有性質（1）。因为当x等于零时，y沒有意义，所以有性質（2）。因为当x取两个相反数的时候，y的两个对应值也成相反数，所以有性質（3）。因为当x的絕对值逐漸增大（或縮小）时，对应的y的絕对值就逐漸縮小（或增大），而且x和y分別都不等于零，所以有性質（4）。

注意 考察上面講过的三种冪函数，再推广到$y=x^4$，$y=x^{-2}$，……，知道：

（1）凡是指数是偶数的冪函数，如果改变x的值的号，y的值不变，所以它的图象关于縱軸是对称的．这样的冪函数叫做“偶函数”．

（2）凡是指数是奇数的冪函数，如果改变x的值的号，y的值就变做相反数，所以它的图象关于原点是对称的．这样的冪函数叫做“奇函数”．

① 凡是两条漸近綫互相垂直，即虛軸$2b$和实軸$2a$等长的双曲綫，都是等軸双曲綫（或称等边双曲綫），它的标准方程是$x^2-y^2=a^2$．現在所講的冪函数$y=x^{-1}$或下条的反比例函数$y=kx^{-1}$是可以化成这个标准方程的，到第十七章里再講．

4. 反比例函数 $y=kx^{-1}$ 这个函数就是 $y=\frac{k}{x}$（其中的 k 是不等于零的常量）。凡是两个变量 x 和 y 間的函数关系能用上式表示的，就可以称 x 和 y 成反比例关系。这个函数是幂函数 $y=x^{-1}$ 的推广，叫做“成反比例关系的函数”，簡称做“反比例函数”。

反比例函数的图象是和函数 $y=x^{-1}$ 相类似的等軸双曲綫，它的两个分支的位置是：

（1）当 $k>0$ 时，它們分别在第一象限和第三象限內。

（2）当 $k<0$ 时，它們分别在第二象限和第四象限內。

例 設函数 $y=\frac{5}{x}$，除零以外任意取自变量 x 的几个值，分别算出 y 的对应值，列成下表：

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	…
y	…	$-\frac{5}{6}$	-1	$-1\frac{1}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$-2\frac{1}{2}$	-5	5	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{6}$	…

用表里的各組对应值作为坐标，描出各个点，再通过这些点画出图象，得如图 48 的等軸双曲綫，它們的两个分支分别在第一象限和第三象限內。因为不可以取 $x=0$，而 x 不論何值，y 的值都不是零，所以这个图象和两条軸都不相交，只是离原点愈远就和两軸愈接近。

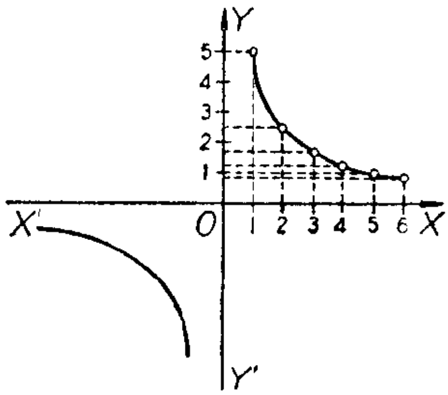

图 48.

設函数 $y=\frac{-5}{x}$，照上法画出它的图象，得如图 49 的等軸双曲綫，它的两个分支分别在第二象限和第四象限內。和前面同样的原因，这个图象也和两条軸都不相交，而是离原点愈远就和两軸愈接近。