幾何学问題解法研究

幾何學問題解法研究

緒論

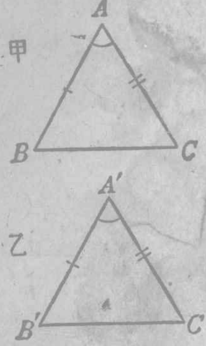
平面幾何學的研究範圍

初等平面幾何學的研究,可分作三方面:

1. 定理的證明
2. 軌跡的決定
3. 作圖

1. 定理的證明　如討論兩個圖形的大小關係,即相等或不相等的問題,那末根本的證明法是把兩個圖形重合,或用計算的方法。

例如比較二邊及夾角相等的甲、乙兩個三角形時,可把二個圖形中任意一個圖形(如甲)重合在另一圖形(如乙)上。如 AB 重合在和它相等的 $A'B'$ 邊上,因 $\angle BAC=\angle B'A'C'$, AC 邊又可重合在和它相等的 $A'C'$ 邊上。這樣,兩個圖形就完全密合了。



又例如證明"半徑相等的圓相等,半徑大的圓比半徑小的圓大"的命題時,先把兩圓的中心重合,觀察這兩個

圓能不能重合,就可知道兩圓是否相等。

但是有種圖形用這方法比較是非常困難,甚至完全不可能,例如(a)比較底邊和高都不相等的兩三角形的面積,(b)決定已知半徑的圓周,或面積。關於這種問題的決定,必須把上面所述的方法作基礎,而加以精密的計算。

故定理的證明法,可表示之如下:

定理證明法
- 重合法
  - 令圖形的一端重合,而由他端的重合或不重合以判別大小之法……(1)
  - 令中心重合,而由兩端或其外側的重合或不重合以判別大小之法……(2)
- 計算法……(3)

2.軌跡的決定 軌跡問題乃是研究點的移動。當點移動時如不加以任何條件,那就無從決定軌跡了。在初等幾何學中關於點的移動所加的條件大約如次:

決定軌跡的條件
- 關於某基準的方向……(1)
- 由某基準的距離……(2)
- 和某基準所作的角……(3)
- 由某基準的距離之比……(4)
- 由某基準的距離的平方或某倍數之和或差……(
- 由某基準的距離的積……(6

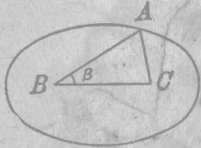
這裏所說的基準,有的是點、直線、圓等的任一種,有的是包括二種或二種以上。

決定軌跡的條件雖然是有好多種,但是所決定的軌跡不是直線便是圓,例如對於定直線,向一定方向移動的點的軌跡;距二定點的距離的平方差爲一定的點的軌跡,都是直線。距二定點的距離有一定比例的點的軌跡,和已知直線成一定角度的點的軌跡,都是圓周。

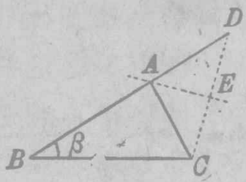
以上所述的結果,可表示之如下(註):

$$\text{點的軌跡}\begin{cases}\text{直線}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \text{圓周}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

3. 作圖　作圖的方法隨提出作圖的要素而異,通常雖由圖形所具有的條件以決定軌跡而作圖,但是稍涉高深的作圖題,必須活用已知定理。例如已知底邊和一底角及其他二邊的和而作三角形時,在較高程度的作圖法中,由底邊兩端 B、C 的距離之和爲一定的點的軌跡,乃是一個橢圓;然後由一端 B 引一直線,和底邊所作的角爲 β(已知),而求這直線和橢圓的交點,以作成三角形 ABC。但在初等作圖法中,則先在底邊 BC 上,引 BD 線,其長等於他二邊的和,BD 和 BC 所作的角爲 β 這樣作成三角形



BDC;然後求CD的垂直二等分線EA和BD的交點A,以作成三角形ABC。



這樣所作成的圖,乃是初步學習作圖時,並未由已知的條件BC、$\angle\beta$、$AB+AC$等直接地探究A的軌跡;而由已知定理的補助,間接地求出A點。

若欲充分研究作圖,必先對於定理和軌跡要有充分的研究。以下各章當次第討論之。

〔註〕 系統地研究軌跡問題是非常困難,對於多數問題僅能就其所有的共通性質加以分類。軌跡的結果除直線、圓外尚有面,例如由正三角形內一點至三邊的距離之和等於正三角形高的點的軌跡,乃是這三角形內部的面。

第一編　證明問題

第一章　由重合法證明的問題

第一節　定理證明法的研究

1. 定理的構成　無論甚麼定理,都是由假設和終結兩部分所成的,例如"兩三角形 ABC、$A'B'C'$ 的三邊各個相等,則兩三角形重合"的一定理中,"$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$內, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$"是假設;而"$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$"是終結。

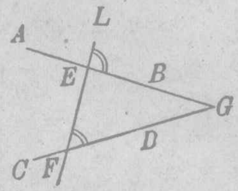
故定理的一般形式是

假設(如 $A=B$)+終結(則 $C=D$)。

2. 定理的證明法　證明每一個定理,必須把假設部分和終結部分分別清楚,而明白地論證由假設所得的終結之正確。在緒論(1)中,已經說過根本的證明法,不過一切定理都這樣根本地證明,未免過於煩雜,並且亦屬不必要。通常由補助的作圖,把定理變爲其他更簡單的已知定理,或由其他論理方法證明之,卽可。

例如證明"直角三角形的斜邊比其他任何一邊大"時,由"直角在三角形三內角中爲最大"的關係,而知它所對的一邊也是最大,因爲我們已經知道三角形內兩角不等時,大角的對邊比小角的對邊爲大。

但證明"二直線和一直線相交,如所作的同位角或錯角相等,則二直線平行"時,若以二直線 AB 和 CD 相交於 G 點,那末三角形 EFG 的一外角(如 $\angle LEG$) 等於和它不相隣的二內角(如 $\angle EFG$ 和 $\angle EGF$)之和(註)卽



$$\angle LEG = \angle EFG + \angle EGF,$$

$$\therefore \angle LEG > \angle EFG。$$

這樣證明 AB 和 CD 平行是不可以的;因爲"三角形的一外角等於和它不相隣的二內角之和"是在平行線各定理證明後纔能成立的;當證明關於三角形的定理時,把關於平行線的定理當作已知定理來使用,固然是可以,但是不能拿來逆用。這種本末倒置的錯誤是應該注意避免。

[註]　和外角不相隣的二內角,稱爲該外角的內對角。

3. 定理的逆關係　定理的一般形式

$A=B$(假設)時,則 $C=D$(終結) ………………(1)

如把上式所表示的定理的假設和終結互相交換,卽得

$C=D$(假設)時,則 $A=B$(終結)………………(2)

這稱爲逆定理。

(1)式的定理能成立時,(2)式未必卽能成立;換句

話說,(1)式眞時,(2)式或眞或不眞;現在拿"三角形的三內角的二等分線會於一點"爲例,這條定理固能成立,但是由三角形的三頂點所作的直線能够會合於一點的,不一定是三內角的二等分線。所以一條定理雖能成立,但是不能以爲它的逆定理也能成立,而拿來應用;故必須先證實其是否能同時成立。

第二節 直線形的研究

I 關於對頂角的研究

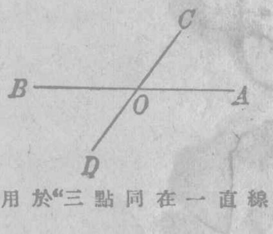
定理

1. 對頂角相等。

本定理可由兩角的頂點和一邊的重合,而求出其他一邊的重合以證明之。

2. 直線 AB 兩側的直線 CO、OD 會合於 AB 上一點 O,所成的角 COA 和 BOD 相等時,則 C、O、D 三點同在一直線上。

本定理可如下證明:



$\angle COA+\angle AOD$

$=\angle BOD+\angle AOD=180$.

【注意】 定理2的證明法常應用於"三點同在一直線上"和"二直線會於一點而成一直線"的證明。

問題一

(1)二直線相交所成的四個角中,有一角爲 α,求

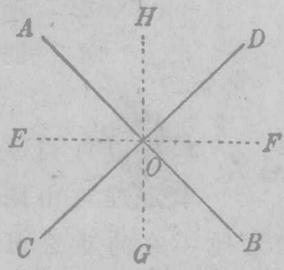
其他各角的大小。

【註】　注意對頂角相等，和相隣二角所成的補角。

答　二角 α，二角 $2R-\alpha$。

(2)四直線交於一點，所成的四個角均爲直角，試證此四直線爲二直線。

(3)二直線相交所成的四個角中，任意相鄰二角的二等分線，也等分其對頂角，且互相垂直，試證之。



【略解】　設 EO、GO 爲相隣二角 AOC、BOC 的二等分線，延長 EO 至 F，GO 至 H。故

$$\left.\begin{array}{l}\angle AOE=\angle BOF\\ \angle COE=\angle DOF\end{array}\right\}\text{(對頂角)}$$

但由假設　$\angle AOE=\angle COE$，

$\therefore\ \angle BOF=\angle DOF$；

同理，得　$\angle AOH=\angle DOH$。

卽 EO、GO 二等分 $\angle AOC$、$\angle BOC$ 的對頂角。

次由假設　$\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC$，

$\angle COG=\frac{1}{2}\angle BOC$。

但　$\angle AOC+\angle BOC=2\angle R$，

$\therefore\ \angle COE+\angle COG=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=\angle R$，

$\therefore\ \angle EOG=\angle R$。

II 關於平行線的研究

定理

1. 二直線和另一直線相交時,如能成立下列關係之一,則此二直線平行。

(*A*)一組的錯角相等;

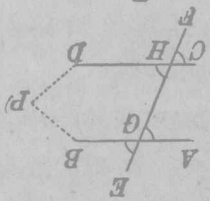
(*B*)一組的同位角相等;

(*C*)同側的內角互爲補角。

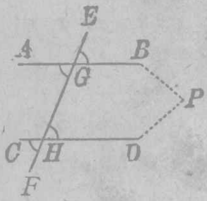
本定理爲幾何學的基本定理,非常重要,如能將(*A*)證明,其他卽可推得。

設 AB、CD 爲二直線,而與另一直線相交,如甲圖。將甲圖迴轉至乙圖的位置;這兩個圖形可完全密合(如丙圖),因 G、H 處 EF 交 AB 和 CD 所成的錯角相等。

乙

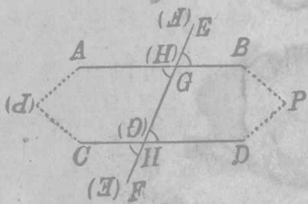


甲



設 AB、CD 二直線不平行,則此二直線必相交於一點 P(甲圖),但甲圖和乙圖既可完全重合,那末 AB 和 CD 在他端的延長線上又必相交於另一點 P(丙圖)。這

丙



樣,AB、CD二直線有二公用點了(兩直線只能相交於一點),這當然是不合理的,所以AB平行於CL。

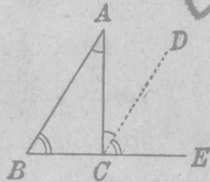
2. 定理1的逆定理亦眞。

【注意】 以後證明二直線平行時,只須證明其是否具有定理1所示的條件,而不必作如上一樣的根本證明。又作一直線CD和已知直線AB平行時,可先作一任意直線EF和AB相交,而後作一具備定理1所示各條件之一的直線CD即可。

問題二

(1)三角形的三內角之和等於二直角。

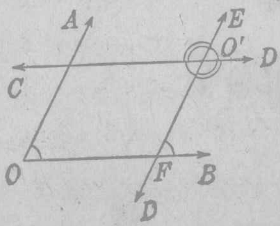
(2)三角形的外角等於其內對角。



【提示】 過$\triangle ABC$的任意一頂點C作一直線平行於其對邊,且將BC延長至E。

(3)試證二等邊三角形頂點的外角二等分線平行於底邊。

(4)一角的二邊各和他角的二邊平行,則此二角或相等,或互爲補角。



【略解】

第一　二角的二邊均在

同一方向 ($\angle AOB$ 和 $\angle EO'D'$), 或均在反對方向 ($\angle AOB$ 和 $\angle CO'D$),

$$\angle AOB=\angle EFB, \text{(同位角)}$$

$$\angle EFB=\angle CO'D=\angle EO'D' \text{(錯角,同位角)}$$

$$\therefore \angle AOB=\angle CO'D=\angle EO'D'。$$

第二　二角的一邊在同一方向,其他一邊則在反對方向 ($\angle AOB$ 和 $\angle CO'E$ 或 $\angle DO'D'$), 由前證明

$$\angle AOB=\angle CO'D,$$

但 $$\angle CO'E+\angle CO'D=2\angle R,$$

及 $$\angle DO'D'=\angle CO'E \text{(對頂角)};$$

$$\therefore \angle CO'E+\angle AOB=2\angle R,$$

$$\angle DO'D'+\angle AOB=2\angle R。$$

(5)設二直線相交,而和此平行的二直線亦相交。

III 關於三角形的研究

定理

第一類 內角和外角

1. 三角形的外角等於其內對角。

2. 三角形的三內角之和等於兩直角。

以上二定理爲關於三角形所常用的重要定理 (本節 II,問題 1、2 參照)。

第二類 全等形

3. 兩三角形有如次的關係存在,則兩形相等。

(*A*)二邊和其夾角相等;

(*B*)二角和其夾邊相等;

(*C*)三邊分別相等。

本定理均可由重合法證明之。

第三類　邊和角

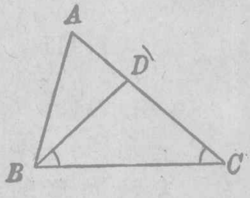
4. 三角形的二邊之和,比他一邊大。

因二點間的最短距離,爲連此二點的直線。

5. 三角形的二邊不相等,則大邊的對角比小邊的對角大。

【提示】 設 $AB>AC$, 由補助的作圖,在 AB 上取 D 點,令 $AD=AC$, 作 CD, 而得二等邊三角形 ACD。

6. 三角形的二角不相等,則大角的對邊比小角的對邊大。



設 $\angle ABC>\angle ACB$; 作 BD, 令 $\angle DBC=\angle BCD$。因 BD 在 $\angle ABC$ 之內,和 AC 相交於 D。故 $\triangle BDC$ 爲二等邊三角形,

$$BD=CD。$$

但 $$BD+AD>AB, \quad \therefore CD+AD>AB,$$

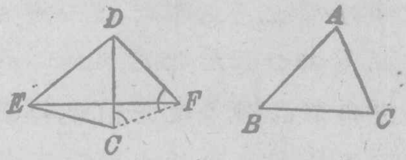
即 $$AC>AB。$$

第四類　兩三角形不相等

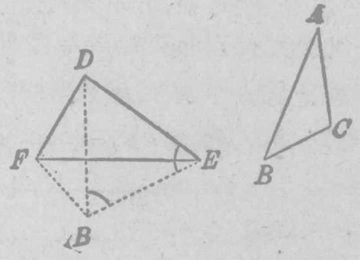
7. 兩三角形的兩邊彼此相等,若其所夾的角不等,則夾角大的三角形的第三邊,比另一三角形的第三邊大。

令兩三角形的夾角的頂點及相等的一邊重合,如兩三角形在同側,則當見相等的另一邊不能重合,而第三邊也不一致。

甲



乙



由此可引用其他定理,把這命題證明,其法如下:

在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 內,設

$$\left.\begin{array}{l} AB=DE \\ AC=DF \\ \angle BAC<\angle EDF \end{array}\right\}$$

如圖所示,AB 重合於 DE,且置兩三角形於同側,則得二等邊三角形 CDF。

$$\therefore \quad \angle DCF = \angle DFC,$$

在甲圖中　$\angle CFE = \angle DFC - \angle DFE$。

在乙圖中,爲 AC 和 DF 重合;若將 DE 和 AB 重合,那末 C 點就在 $\triangle DEF$ 內。證明時比較麻煩些。

在甲圖中:	在乙圖中:
$\angle ECF > \angle CFE,$	$\angle EBF > \angle BEF,$
$\therefore \ EF > EC = BC;$	$\therefore \ EF > FB = BC;$

即　$EF > BC$。

8. 兩三角形的兩邊彼此相等,若第三邊不相等,則大的第三邊所對的角,比小的第三邊所對的角大。

例如在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 內,$AB = DE$,$AC = DF$,$BC < EF$,則 $\angle A$ 和 $\angle D$ 的關係必爲下列三種之一:

$$\angle A > \angle D \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\angle A = \angle D \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\angle A < \angle D \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

若有 (1)、(2) 的關係,那末

$$\left.\begin{array}{l} BC > EF \\ BC = EF \end{array}\right\} \text{(定理 7)},$$

或

但這和假設矛盾,故 $\angle A$ 和 $\angle D$ 的關係必定是如 (3) 所示,即 $\angle A$ 小於 $\angle D$。

【注意】 有四邊以上的直線形如能分成爲三角形,則可應用一切三角形定理,故三角形的定理在平面幾何學

上實關重要。

問題三

(1)兩直角三角形如成立下列關係之一,則這兩直角三角形相等。

(A)斜邊和另一邊分別相等;

(B)夾直角的二邊分別相等;

(C)斜邊和一銳角相等;

(D)一腰和其相隣的銳角分別相等。

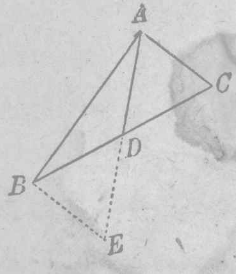
(2)由三角形底的兩端引至對邊的兩垂線相等,則此三角形等腰。

【提示】 前題的(A)參照。

(3)試比較由三角形一頂點所引的垂線、中線和分角線的大小。

【提示】 由一點到一直線的最短距離爲垂線;而由同一點所作斜邊的足離垂線足愈遠的,斜邊愈長。

(4)三角形的中線和小隣邊所作的角比和大隣邊所作的角大。



【略解】 設 AD 爲 $\triangle ABC$ 的中線,延長之,令 $AD=DE$; 聯 BE,

$$\triangle ACD \equiv \triangle EBD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BED,$$

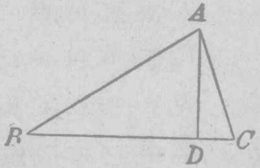
及 $$AC = EB.$$

故若 $AB>AC$，即 $AB>EB$；而在 $\triangle ABE$ 內，$\angle BED>\angle BAD$，

$$\therefore\ AB>AC,$$

則
$$\angle CAD>\angle BAD。$$

(5)三角形的二邊不等,則由其夾角頂點到對邊的垂線和這二邊所作的兩角也不等,垂線和大邊所成的角大。



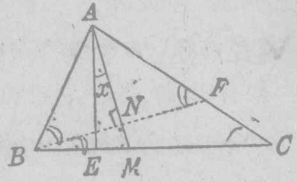
【提示】 注意由垂線所分的內角,如 $AB>AC$,

則
$$\angle ABC<\angle ACB。$$

但 $\angle BAD$ 和 $\angle CAD$ 分別爲其餘角,所以知道

$$\angle BAD>\angle CAD。$$

(6)三角形一內角的分角線 AM 和由這角到對邊的垂線 AE 所成的 x 角,等於兩底角差的一半。



【略解】 設 $AB<AC$；在 AC 上取 $AF=AB$，BF 和 AM 的交點爲 N。

$$\angle ABF=\angle AFB=\angle C+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C),$$

$$\angle BAN=\angle R-\angle ABF=\angle R-\left\{\angle C+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)\right\},$$

$$\angle BAE=\angle R-\angle B,$$

$$\therefore\ \angle BAN-\angle BAE=\angle B-\left\{\angle C+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)\right\}=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)。$$

(7) $\triangle ABC$ 內,$AB>AC$,由 A 所作的中線,二等分線、