现代化管理丛书之四

线性规划

与企业最优经济决策

马致山
赵新良 编著

中国新闻出版社

线性规划与企业最优经济决策

马致山　赵新良　　编著

一九八五年二月

线性规划与企业最优经济决策

马致山　赵新良

中国新闻出版社出版
辽宁省新华书店发行
辽宁法库印刷厂印刷

字数：210，0000　开本：787×10921/32　印张：$9\frac{3}{4}$

印数：1—16，000

1985年8月第一版　1985年8月第一次印刷

统一书号：4363.004　定价：1.70

序　　言

我国城市经济体制的改革正在深入发展。我们的企业要在公有制基础上的有计划的商品经济中求得生存和发展，只靠上级公布指令性计划、指导性计划来组织生产经营，已经不能适应新的经济形势。充满生机和活力的新经济体制既给企业的发展带来强大的经济动力，也同时施加了强大的压力。在激烈的竞争中，企业的经营计划部门、经济研究和咨询部门、企业的决策者和领导者，必须努力提高素质，增长才干，才能适应经济新形式发展的需要。

有没有使我们头脑聪明起来，善于扑捉各种经济信息，迅速制定最佳决策方案的办法呢？答案是肯定的。那就是灵活运用经济数学方法和电子计算机。但是，经济数学方法很多，哪些更适合解决我们当前所面临的问题，这是需要认真讨论研究的。大量的应用实践告诉我们，当您想完成订货合同，又想认真选择原料的结构和产地，力图大力降低原料总成本的时候，您可以用线性规划这种方法；当您想充分利用已经掌握到手的设备、原材料和优秀工人，瞄准市场动态，调整产品结构，仔细安排各种产品之间的经济配比关系，希望使销售利润和税金的总水平最大的时候，您可以用线性规划这种方法；当您想花最少的费用去巡迴检测厂里的各种设备，运送原料和半成品给各生产车间的时候，您可以用线性规划这种方法；当您想增加最少的投资来大力压缩技术改造、改建扩建项目的工期时，您可以用线性规划这种方法；

至于总图布局、设备配置、任务分派、加工路线、原料配方等经营管理中的课题，哪种方法最合理，您不妨都用线性规划来试试。只要模型科学、数据可靠，肯定会使您觉得自己突然增长了才干。其实这一点也不奇怪，因为科学技术就是生产力。掌握了现代科学技术，我们就会大幅度提高工作效率和水平。国内外经济发展的规律告诉我们，谁掌握了现代科学技术知识和现代经济管理知识，谁就能使经济迅速起飞。

这本书是笔者根据实际应用经验和教学实践编写出来的。主要目的是想用这本通俗读物培养企业管理人员、决策人员学习现代化管理知识的兴趣，提供给大家一些基本的方法和应用技巧。为了适应中、初级管理人员、决策人员的数学水平，尽量避免高深的数学推导和抽象的公式表达，尽量采用一些实例来做形象的描述。欢迎大家在应用、研究中对我们提出要求和意见。

编　者

一九八五年二月

目　　录

第一章　引　论

一、只有一种产品安排方案和一种配料方法吗?

一个聪明的计划人员、决策人员在安排生产的时候，总是想充分运用自己能够调动的资源，包括原材料、能源、设备、人力等等，获得最大的经济效益，诸如利润最高、成本最低等等。这种想法能否实现?决窍在哪里?我们先举两个简单的例子来说明。

某工厂准备用甲、乙两台设备生产A、B两种产品，按工艺要求，每种产品都要依次经过甲、乙设备进行加工。据统计，生产一件A产品在甲、乙两台设备上的加工时间分别为2小时和3小时，生产一件B产品在甲、乙两台设备上的加工时间分别为4小时和2小时。甲、乙两台设备每周可分别开动180小时和150小时。如果每件A产品的利润为40元，每件B产品的利润为60元。请您想一想，这个工厂应该如何安排生产才能够获得最大的利润呢?

对这个工厂来说，就是合理选择产品的品种，确定每种产品的数量。如果A、B两种产品都是市场畅销的产品，并且没有纳入指令性计划，那就可以有多种生产方案供选择。可以只生产A、B两种产品中的一种；也可以同时生产A、B两种产品，但是可以选择不同的数量配比。在所有可行的方案中，利润最大的生产方案是哪一个呢?从表面现象看，每

件 B产品的利润比A产品的利润多20元，应该把全部生产能力都用来生产 B产品。那么，可生产多少 B产品，获得多少利润呢？由于一件 B产品在甲、乙两台设备的加工时间分别为4 小时和2 小时，而甲、 乙两台设备每周只能开动180小时和150 小时。因此，限制性环节是甲设备，最多能生产45件 B产品，相应得到的利润为$60\times45=2700$元。这样一来，甲设备开动$4\times45=180$小时，已无增产可能；乙设备开动$2\times45=90$小时，剩余$150-90=60$小时的加工能力没有被充分利用。很明显，这是一种可行方案，但不是好的生产方案。为了充分地利用甲、乙两种设备的生产能力，应该生产A、 B两种产品，並确定这两种产品的某种数量组合，才能更有效地利用现有生产能力，使工厂获得的利润最大。这是规划问题的一种类型，即产品组合问题。

另外一种规划问题，是配料问题。为了完成即定的任务，如何选择原料，使耗费的资源最少。

例如：某种合金产品由甲、乙两种金属熔炼制成，按技术标准要求，合金中金属甲的含量不能超过6%，金属乙的含量不能少于92%，为简便起见，其他杂质不计。若金属甲、乙的价格分别为2元/公斤和5元/公斤，如何配料，可使冶炼这种合金的炉料成本最低呢？由于甲金属比乙金属便宜得多，因此配料中，甲金属按上限配，其余由乙金属补，则每公斤合金的炉料成本为$0.06\times2+0.94\times5=4.82$元。这个方案是否最优？大家可以通过调整甲、乙金属的配比来计算比较。配料比例不同，炉料成本也不同。对于如此高度简化的问题，我们可以很容易地根据原料价格不同来确定各种金属的比例。但在合金产品的化学成分比较复杂，含有多种元

素，并且杂质含量不能忽视，而且可供选择的原料又比较多，每种原料中含有的各种元素含量不同，价格也不同时，选择一种合适的配料方案就不是一件容易的事情了。那么，怎样在若干种配料方案中寻求既保证产品质量要求，又使原料成本最低的配料方案呢？这正是用线性规划方法可以解决的最早又最有成效的问题之一。

如果您认为这些类型的问题确有研究的必要，就请和我们一起来讨论研究以下各章。

二、一种简便易学的规划方法——线性规划

从前面所列举的两个问题可以看出，问题提出的角度虽然不同，但实质都是资源的最优配置问题。只不过一种含义是在一定的资源条件下，如何规划，使完成的任务最多；另一种含义是为完成某种给定的任务，如何规划，使耗费的资源最少。从实践经验看，企业的经营活动、经营目标、资源条件千差万别，变动也很频繁，能否用数学方法描述庞大而复杂的现实系统或活动过程，把经济系统运行内在的规律性的东西抽象出来，归纳为一些特定的类型，形成简炼易懂的数学表达式，帮助人们进行科学地思考、精确地分析，并为计算机在经营管理中的应用铺平道路呢？回答是肯定的。

线性规划在经济实践中推广应用的几十年历史说明，运用数学的抽象所形成的数学模型，能够高度概括现实的经济系统，不仅有助于了解问题的全貌，还能够使我们抓住问题的重要特点和主要因素，明确它们之间的内在联系和相互关

系，把无限的可能方案精简为对有限方案的分析求解过程。线性规划模型把所要解决的问题归结成为控制一组因素，在一组限制条件下，寻求一个函数的最大值或最小值问题。通常，要控制的因素，例如产量多少、配料比例等可以调整的经济活动水平，往往用变量来表示，称为决策变量。所要满足的限制条件，例如机器加工的总工时、合金化学成分标准等等，往往表示成变量之间的关系，称为约束条件。而描述目标的函数，即目标函数，例如总利润、总成本等生产经营的最主要目标，通常表示为变量的函数形式。只不过要求模型中的约束条件要表示为线性等式或不等式，目标函数表示为线性函数。这里所说的线性，是指变量之间的一种特殊的相互关系——线性关系，即当一个变量发生变化时，他们的增量对应成比例。如果用图形来表示这两个变量之间的关系，在直角坐标系内，就是一条斜率固定的直线。

前面所提到的第一个简例，控制因素是计划期内A、B两种产品的生产量，如果用数学语言来描述，可设其为X_1、X_2件。由于每一件A产品和B产品的利润分别为40元，和60元，因此，生产X_1件A产品所获得的利润为$40X_1$元，而生产X_2件B产品所获得的利润为$60X_2$元。于是，总共获得的利润就是

$$40X_1+60X_2$$

我们希望上式所确定的利润值越大越好。这就是所谓的目标函数。若用f（X）代表总利润，则可表示成求

$$f(X)=40X_1+60X_2$$

的最大值。

从上式可以看出，不同的产量X_1和X_2，将带来不同的利润

水平。如果没有任何约束，产量X_1和X_2越大，利润f（X）也会越大。但由于生产每一件产品都要消耗设备的生产能力，而甲、乙两台设备的生产能力是有限的，因此，A、B两种产品的生产数量也不能任意增加，这意味着上式的变量X_1、X_2不能任意取值。由于甲设备用于生产A、B产品的生产时间只有180小时，所以，确定A、B产品的生产量时，必须保证它们所需要的甲设备的生产时间不超过其可用生产时间。据条件已知生产一件A产品需消耗甲设备2个小时，现生产X_1件A产品，则需甲设备的生产时间为$2X_1$；而生产一件B产品需消耗甲设备4个小时，现生产X_2件B产品，则需甲设备的生产时间为$4X_2$。于是，生产了X_1件A产品和X_2件B产品一共消耗甲设备的生产时间就为

$$2X_1+4X_2$$

当然，这个生产时间不能比甲设备可用的生产时间180小时多，也就是说，可以小于或等于180小时。用不等式可以描述成

$$2X_1+4X_2\leqslant 180$$

同理，生产X_1件A产品和X_2件B产品所消耗的乙设备，也必须在其所允许的生产能力之内，即它们所消耗的乙设备的生产时间不能大于给定的150小时，即

$$3X_1+2X_2\leqslant 150$$

还有，由于A、B两种产品的生产数量不可能取负值，要满足变量的非负性条件，即

$$X_1\geqslant 0, \qquad X_2\geqslant 0$$

综上所述，此问题的数学模型可以概括为：求一组变量X_1、X_2，满足下述约束条件

$$\begin{cases} 2X_1+4X_2\leqslant 180 \\ 3X_1+2X_2\leqslant 150 \\ X_1\geqslant 0, \quad X_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

使目标函数

$$f_*(X) = 40X_1+60X_2 \tag{1.2}$$

为最大。

按照同样的思路，我们建立前面所提出的第二个简例的数学模型。控制因素是在生产合金产品的过程中，使用金属甲、乙的数量。我们设每百公斤合金产品中甲、乙金属的含量百分比分别为X_1、X_2，则目标就是合金的原料成本，它的函数表达式可以写成

$$f(X) = 2X_1+5X_2$$

要使原料成本最低，最简单的办法就是增加低价金属的含量，但必须是在满足合金成分含量的要求，即保证产品质量的前提下来考虑甲、乙金属的含量。按合金性能的要求，合金中金属甲的含量不能超过6%，即每生产100公斤合金中，至多金属甲的含量不得超过6公斤。这个约束条件可以用不等式表示成

$$X_1\leqslant 6$$

而对于金属乙的含量约束，同样可描述为

$$X_2\geqslant 92$$

由于合金产品是由甲、乙两种金属熔炼而成，金属甲、乙的总和应当满足平衡关系式

$$X_1+X_2=100$$

显而易见，金属甲、乙的含量都不能是负值，即还应有变量的非负性条件

$$X_1 \geqslant 0, \quad X_2 \geqslant 0$$

归纳起来，这一问题的数学模型为：求一组变量X_1、X_2，满足下述约束条件

$$\begin{cases} X_1 \leqslant 6 \\ X_2 \geqslant 92 \\ X_1 + X_2 = 100 \\ X_1 \geqslant 0, \quad X_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

使目标函数

$$f(X) = 2X_1 + 5X_2 \tag{1.4}$$

为最小。

从上述例子可以看出，生产方案要在生产能力的允许之内安排，配料比例要满足合金成分含量的要求。问题的本质是要从许多方案中选取一个最优方案达到即定目标：或者是利润最大，或者是成本最低。因此，从建立数学模型的角度看，线性规划是求一组非负的变量，满足一组线性等式或不等式的约束条件，使一个线性目标函数达到最大或最小。

如果把这类问题扩展开来，增加控制因素和约束条件，将如何表达呢？设经济系统运行时所要控制的因素有n个，而其所必须满足的条件有m个，则可把线性规划的数学模型描述为求一组非负的变量X_1、X_2、……、X_n，使之满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n \ (\leqslant = \geqslant)\ b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}X_n \ (\leqslant = \geqslant)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots\cdots + a_{mn}X_n \ (\leqslant = \geqslant)\ b_m \\ X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

并且使目标函数

$$f(x) = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots\cdots + C_nx_n \qquad (1.6)$$

达到最大值或最小值。

其中，（≤=≥）表示在一个具体问题中三种符号只取其一种，但在不同的约束条件关系中，符号可以不同。而 C_j（j叫做下标，可取1，2，……，n各值，通常表示为 $j=1, 2, \cdots\cdots, n$）称为利润系数或成本系数；b_i（$i=1, 2, \cdots\cdots, m$）为限定系数，或称其为常数项；a_{ij}（$i=1, 2, \cdots\cdots, m$；$j=1, 2, \cdots\cdots, n$）为消耗系数或结构系数。

为便于讨论，需要进一步指出上述线性规划模型中各参数的一些假定条件。

第一条假定是指在目标函数

$$f(x) = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots\cdots + C_nx_n$$

中，C_j（$j=1, 2, \cdots\cdots, n$）为常数。在一定的限度内，决策变量X_j的单位变化量对目标的影响相同，这也就是我们前面所提出的目标函数为决策变量的线性函数。在实际问题中，C_j并不一定总是确定的常数，即决策变量X_j的单位变化量对目标函数的影响不一定完全相同。例如在开工不足的时候，加大产量所增加的利润就不同于满负荷运转时增加产量获得的利润。这样，目标函数就可能为非线性函数。但在较为正常的情况下，利润系数或成本系数较为稳定，用线性规划模型近似地描述实际问题仍是可行的。

约束条件

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots + a_{in}x_n = b_i$$

中的a_{ij}，也是这种情况，假定为常数。

第二条假定是在线性规划模型中，决策变量X_j的系数

C_j、a_{ij}只与X_j有关，对其他变量不产生影响 也就是每一个决策变量对目标的影响都是独立的，其影响结果可以相加。如甲产品的单位利润不受乙产品生产的影响。同样，甲产品的消耗系数也不因乙产品的消耗而变化。

第三条假定是线性规划的解的形式，即决策变量的取值可以为任意的非负值（包括小数在内）。有时候，对于特定问题这种取值往往不合乎实际。如不可能生产18/5台机床，也不可能需要3/2个人。对于这类问题，可以借助于整数规划来求解，也可以在允许的条件下给非整数以新的含义。

第四条假定是线性规划问题的目标函数是单一目标，如利润最大或费用最小。虽然，现实经济生活中，对问题的研究往往不能只从一个角度来考虑，而要追求很多个目标，这就是所谓多目标优化问题。在具体作法上，我们可以把多目标演化成单目标，或者用目标规划等办法来处理。而这些方法又都是以单目标规划方法为基础的。所以，这样提出问题并不影响线性规划在实际应用中的意义。

最后一个假定是线性规划模型中所有C_j、b_i、a_{ij}都是确定性的，即在整个规划期内这些参数不变。但由于我们要规划未来，而在未来的问题中，有些参数不可能一成不变。对于这类情况，可以借助于灵敏度分析及参数规划、随机线性规划来解决。

由于有了上述这些假定，就使线性规划模型的计算大大地简化了。特别是对于大量的实际应用问题，上述假定基本符合企业生产经营活动的实际情况。因而，线性规划才能得以迅速的发展，并获得广泛的应用