普通高等教育"十一五"规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

Engineering Mechanics

GONGCHENG LIXUE

工程力学

郭应征　周志红　编著

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育"十一五"规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

GONGCHENG LIXUE

工程力学

编　著　郭应征　周志红
主　审　吴文龙

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是普通高等教育“十一五”规划教材，也是江苏省“工程力学系列课程教学内容课程体系改革的研究与实践”项目的研究成果。

全书共分两篇，即工程静力学和工程动力学，主要内容包括力系的简化、力系的平衡、杆件的内力、拉压杆的强度设计、扭转轴的强度设计与刚度设计、弯曲梁的强度设计、弯曲梁的刚度设计、复杂应力状态下的强度条件、组合变形杆件及连接件的强度设计、压杆的稳定性设计、点的合成运动、刚体的平面运动、质点动力学、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗贝尔原理、单自由度系统的振动、动载荷、疲劳强度设计。

本书的主要特点：①理论阐述简明，文字简洁；②按照“工程静力设计”和“工程动力设计”形成工程力学教材的新体系，突出工程观念的培养和力学在工程设计中的应用；③编入了许多密切联系工程实际的例题与习题，以便于教师选用和学生练习之用；④通过对工程实例的简化和比较，培养学生建立力学模型和解决实际问题的能力；⑤力求进行启发式教学，在正文中编入一些思考题，尝试用提问的方式进行教学，给学生留下思考的空间。

本书可作为高等院校机械类、能源动力类、电气信息类和土建类等专业的工程力学教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学/郭应征，周志红编著．—北京：中国电力出版社，2008

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-6990-7

Ⅰ．工…　Ⅱ．①郭…②周…　Ⅲ．工程力学—高等学校—教材　Ⅳ．TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 043463 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http：//jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2008 年 6 月第一版　　2008 年 6 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　25 印张　611 千字

定价 **35.00** 元

前 言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育“十一五”教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

本书是普通高等教育“十一五”规划教材，是江苏省“工程力学系列课程教学内容课程体系改革的研究与实践”项目的研究成果，是为新世纪的工科大学生编写的工程力学课程的更新教材。主要特点如下：

1. 适当提高起点，删除了与物理学重复的内容，增加了反映现代科学技术的有关内容。同时注意精选内容，以减少教学学时。

2. 按照力学在工程设计中的应用形成教材体系，即按照“工程静力设计”和“工程动力设计”形成工程力学教材的新体系，突出工程观念的培养和力学在工程设计中的应用。编入了许多密切联系工程实际的例题与习题，以便于教师选用和学生练习之用。在编写过程中，注意通过对工程实例的简化和比较，培养学生建立力学模型和解决实际问题的能力。

3. 全书体系合理，理论阐述简明，概念叙述准确，文字简洁。注意将难点分解，力求易教易学，便于学生真正理解和掌握工程力学的基本概念和方法。

4. 按照最新的工程力学教学基本要求，对非基本内容均加了星号以示区别，便于使用者根据需要选用。加星号的内容属于加深和加宽部分，叙述力求简练，内容力求精练和压缩。

5. 力求进行启发式教学，在正文中用楷体编入一些思考题，尝试用提问的方式进行教学，从而深入理解重要概念，给学生留下思考的空间。

本书为工程力学的基础部分，适用于工科各专业。全书共分两篇：工程静力学和工程动力学。编写中考虑到便于使用者取舍，采用了模块式结构（以章为模块），可根据需要拼装成不同学时类型的工程力学教材。

全书由郭应征编写，周志红参加了校对工作，由南京航空航天大学吴文龙教授主审。东南大学的诸关炯教授和胡增强教授等对本书的编写提出了宝贵的意见，在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书在编写过程中，主要参考了梁治明和邱侃编写的《材料力学》，郭应征和周志红编写的《理论力学》以及郭应征和李兆霞主编的《应用力学基础》，同时还参考了国内外一些优秀教材，在此也向这些教材的编著者们深表感谢。

编 者

2007 年 8 月 18 日于东南大学

目 录

第二篇 工程动力学

绪 论

力学是研究物体机械运动一般规律的学科。所谓机械运动是指物体在空间的位置随时间而发生的变化，这是自然界中最基本的运动形式。随着生产和科学技术的发展，力学已形成多种不同的学科或分支。作为工科院校的一门基础力学课程——工程力学，则是众多力学学科分支中最基础的部分。

§0.1 工程力学的内容和任务

自然界中的物体由于相互的机械作用，即力的作用，使物体处于平衡或运动状态，同时使物体的形状发生改变。使物体运动状态改变（包括平衡状态）是力的**外效应**（external effect）；使物体变形是力的**内效应**（internal effect）。**平衡**（equilibrium）是指物体相对于地球（作为参考体）处于静止状态或匀速直线运动状态。工程力学课程研究物体的受力、平衡、运动、变形等方面的基本规律，为工程结构设计提供理论基础和计算方法。

工程结构的零、部件，统称为**构件**（element）。工程中的力学设计，可分为**静力设计**（static design）和**动力设计**（dynamic design）两个方面。

静力设计的主要任务是：保证构件在确定的外力作用下正常工作而不失效，即具有足够的强度、刚度和稳定性。所谓**强度**（strength），是指构件在外力作用下不发生断裂或塑性变形的能力；所谓**刚度**（stiffness）是指构件在外力作用下不发生过大的弹性变形的能力；所谓**稳定性**（stability），是指构件在外力作用下能够保持其原有平衡形态的能力。

动力设计则比静力设计要复杂得多。首先要分析构件的运动规律，以及运动与力之间的关系，然后要研究在动态力的作用下，构件的强度与刚度等问题。

在研究构件的强度、刚度和稳定性时，还应了解材料在外力作用下的力学性能，其中材料的静力和动力性能要由材料试验来测定。因此，研究材料的力学性能也是本课程的重要内容。

工程力学课程的任务是在满足强度、刚度和稳定性的要求下，为工程构件的力学设计提供必要的理论基础和分析计算方法，以便设计出既安全又经济的构件。

§0.2 工程力学的研究方法

工程力学课程所研究的问题，都是工程或生活实际中的问题。遵循认识论的规律，其研究方法首先是从生活、工程或实验中观察各种现象，从复杂的现象中抓住共性，找出反映事物本质的主要因素，略去次要因素，经过简化，把做机械运动的实际物体抽象为**力学模型**（mechanical model）。建立力学模型是工程力学研究方法中很重要的一个步骤。因为实际中的力学问题往往是很复杂的，这就需要对同一个研究对象，为了不同的研究目的，进行多次实验，反复观察，仔细分析，抓住问题的本质，作出正确的假设，使问题理想化或简化，从

而达到在满足一定精确度的要求下用简单的模型解决问题的目的。

工程力学的研究与数学有着密切的关系，建立了力学模型以后，还要按照机械运动的基本规律和力学定理，对力学模型进行数学描述，建立力学量之间的数量关系，得到力学方程，即**数学模型**（mathematical model）。然后，经过逻辑推理和数学演绎进行理论分析和计算，或用计算机求数值解。最后，所得到的结果和结论是否正确，还要进一步通过实验或工程实践来检验。

§0.3 工程力学的研究对象

实际物体在外力作用下都要发生变形。但是，工程中构件的变形通常是很微小的，对于力对物体的外效应影响极小。因此，在研究物体的受力、平衡及运动时，忽略这种微小的变形，将受力物体抽象为不变形的**刚体**（rigid body）。如果物体的运动范围远远超过其本身的几何尺寸，且仅是为了分析其质心的运动规律时，可将物体进一步简化为只有质量而无体积的一个**质点**（particle）。

在研究构件的强度、刚度、稳定性等问题时物体的变形将成为主要矛盾，这时应将物体视为**可变形的固体**（deformable body）。任何固体在外力作用下均将发生变形，若卸除外力后能完全消失的变形，称为**弹性变形**（elastic deformation）；不能消失而残留下来的那一部分变形，则称为**塑性变形**（plastic deformation）。

变形固体有多方面的属性，研究的角度不同，侧重面也不一样。本课程是从宏观的角度研究物体内部的受力和变形规律的，为得到简化的力学模型，一般认为变形固体具有如下的基本属性：

1. 均匀性、连续性

实际变形固体的材料，从微观的层次看是不连续的，因为组成固体的粒子之间存在着空隙。但这种空隙与构件的尺寸相比极其微小，于是可理想化地认为固体内部毫无空隙地充满了物质，这就是变形固体的**连续性假设**（continuity assumption）。另外，组成固体的粒子，彼此的物理性质并不完全相同，但因构件的任一部分都包含为数极多的微小粒子，而且无规则地排列着，从统计平均的角度看，认为由同一种材料组成的构件，各处的物理性质是相同的，这就是变形固体的**均匀性假设**（homogenization assumption）。

根据变形固体的均匀性、连续性假设，就可以从固体内任意截取一部分来研究，且在外力作用下引起的内力、应力、应变等力学量均可表示为坐标的连续函数，以便于进行数学分析。

同时还应指出，在正常工作条件下，变形前连续的固体，变形后仍应保持其连续性，即变形固体的相邻部分既不引起空隙也不产生重叠的现象，这种变形连续性的条件称为**几何相容条件**（geometric compatibility condition）。

2. 各向同性与各向异性

材料沿不同方向上的力学性能都相同，称为**各向同性**（isotropy）；沿不同方向的力学性能不同，称为**各向异性**（anisotropy）。绝大多数材料，如金属、工程塑料、搅拌均匀的混凝土等，都可视作各向同性材料。例如，金属从微观上看是多晶体材料，单个晶体的力学性能是有方向性的，但由于各晶体是随机排列的，在宏观上表现为各向同性。

有些材料，如木材、纤维增强复合材料，其整体的力学性能具有明显的方向性，则应看作是各向异性材料。

本课程主要研究均匀、连续、各向同性的变形固体，且通常限于研究在弹性变形范围内和小变形条件下的问题。

根据几何形状和尺寸的不同，工程构件大致可分为：杆件、平板、壳体和块体四大类。在研究构件的强度、刚度和稳定性问题时，本课程主要涉及**杆件**（bar）。若研究板、壳及块体的强度、刚度和稳定性问题，可进一步学习“弹性力学”和“板壳理论”等课程。

第一篇 工程静力学

第一章 力系的简化

作用在物体上的一组力称为**力系**（system of forces）。若刚体分别受到两个不同力系的作用而其运动状态产生完全相同的变化，则称这两个力系彼此**等效**（equivalence）。用简单力系等效代换复杂力系，称为**力系的简化**（reduction of force system）。根据力系简化的结果，可导出力系的平衡条件，其为构件强度、刚度和稳定性计算提供基础，而且也为动力学问题的研究创造条件。

本章首先介绍力、力矩和力偶的基本概念，然后研究空间任意力系的简化，最后讨论物体的受力分析。

§1.1 力、力矩、力偶

一、力

力是物体间的相互作用，这种作用能使物体运动状态改变或使物体变形。实践表明，力对物体的作用效应取决于三个要素：大小、方向和作用点。在我国法定计量单位制中，力的单位是 N 或 kN。

可用有向线段表示力的三要素，线段的长度表示力的大小，箭头指向表示力的方向，线段的始端或末端表示力的作用点，因为两个共点力的合成符合矢量求和规则，即平行四边形法则，所以力是矢量。

设力 $\boldsymbol{F}$ 与直角坐标轴正向的夹角分别为 α，β，γ，各坐标轴的单位矢量为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，如图 1.1 所示，则力 $\boldsymbol{F}$ 在各轴上的投影为

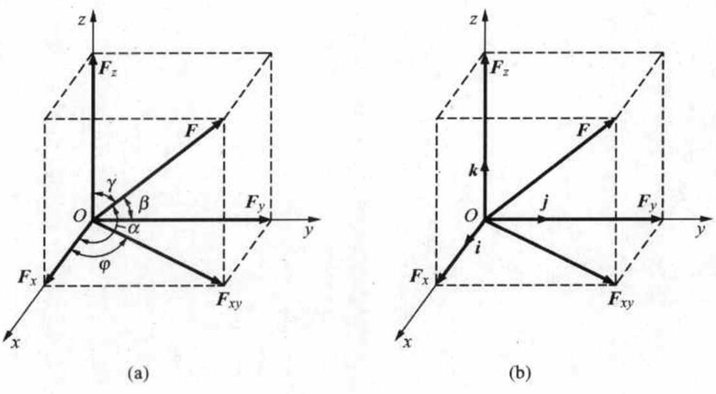

图 1.1

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \boldsymbol{F i} = F\cos\alpha \\ F_y &= \boldsymbol{F j} = F\cos\beta \\ F_z &= \boldsymbol{F k} = F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

则力 $\boldsymbol{F}$ 的解析表达式为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向余弦为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= F_x/F \\ \cos\beta &= F_y/F \\ \cos\gamma &= F_z/F \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

当已知 φ 和 γ 时 [图 1.1 (a)]，可先作力 $\boldsymbol{F}$ 到 Oxy 平面的投影，得到 F_{xy}，作 $\boldsymbol{F}$ 到垂直于该平面的轴 z 上的投影，得到 F_z，然后再作 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 到轴 x 和轴 y 的投影，得到 F_x 和 F_y，这就是常用的二次投影法。

二、力对点的矩矢

如图 1.2 所示，$\boldsymbol{r}$ 表示点 O 至力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 A 的矢径，力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩的矢量用 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 表示。该矢量的模表示力矩的大小，即

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| &= Fh = 2A_{\triangle OAB} \\ &= Fr\sin\alpha = |\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}| \end{aligned} \tag{1.5}$$

式中，$A_{\triangle OAB}$ 为 $\triangle OAB$ 的面积。此外，力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 的方向与 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 的方向也一致，所以有

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1.6}$$

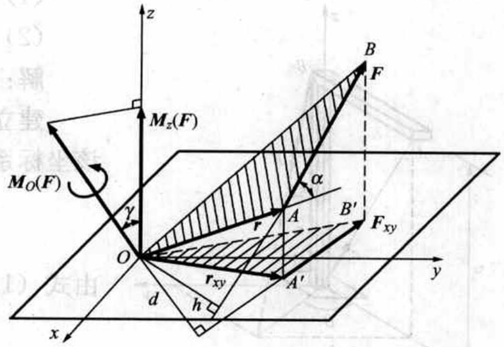

图 1.2

即力对点的矩矢等于矩心到力作用点的矢径与该力的矢量积。

显然，力对点的矩矢的大小与方向均与矩心 O 的位置有关，**是固定矢**（fixed vector），其始端必须放在矩心上。力矩的单位为 N·m 或 kN·m。

如图 1.2 所示，令 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为各坐标轴的单位矢量，力 $\boldsymbol{F}$ 由式（1.2）表示，$\boldsymbol{r}$ 的解析式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

则力对点 O 的矩矢的解析表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1.7}$$

三、力对轴的矩

如图 1.2 所示，力 $\boldsymbol{F}$ 对任意轴 z 的矩用 $M_z(\boldsymbol{F})$ 表示。由于 $\boldsymbol{F}$ 与轴 z 平行的分力 $\boldsymbol{F}_z$ 对轴 z 的矩为零，所以 $M_z(\boldsymbol{F})$ 就等于 Oxy 平面内分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对轴 z 与该面交点 O 的矩，即

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}d = \pm 2A_{\triangle OA'B'} \tag{1.8}$$

力对轴的矩是力使刚体绕该轴转动效应的度量，是代数量，其正负号由右手螺旋规则确

定，即拇指指向与轴 Oz 方向一致为正，反之为负。由式（1.8）可知，当力沿作用线滑动时，力对轴的矩不变。若力的作用线与轴平行（$F_{xy}=0$）或相交（$d=0$），力对轴的矩为零。所以，力与轴共面时，力对该轴的矩为零。

如图 1.2 所示，由几何学可知

$$A_{\triangle OAB}\cos\gamma = A_{\triangle OA'B'}$$

由式（1.5）和式（1.8）可得

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\cos\gamma = M_z(\boldsymbol{F})$$

用 $[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z$ 表示矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 在轴 z 上的投影，即

$$M_z(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} \tag{1.9}$$

上式表明，**力对点的矩矢在通过该点的任一轴上的投影等于力对该轴的矩。**所以有

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k} \tag{1.10}$$

【例 1.1】 刚架受力如图 1.3 所示，已知力 $\boldsymbol{F}$ 的模 F，a，b，c，θ 和 φ。试求：

（1）$\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩；

（2）$\boldsymbol{F}$ 对轴 OA 的矩。

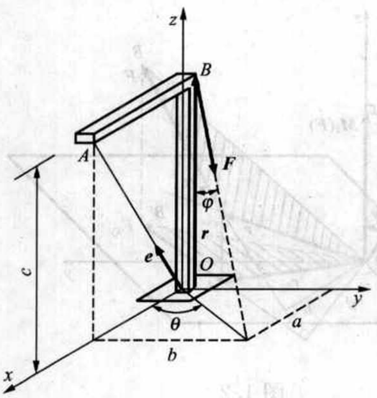

图 1.3

解：（1）求 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$。

建立坐标系如图 1.3 所示，写出点 B 矢径 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 在该坐标系中的解析表达式为

$$\boldsymbol{r} = c\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F} = F(\sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{j} - \cos\varphi\boldsymbol{k})$$

由式（1.7）可得

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & c \\ F\sin\varphi\cos\theta & F\sin\varphi\sin\theta & -F\cos\varphi \end{vmatrix} = Fc\sin\varphi(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})$$

（2）求 $M_{OA}(\boldsymbol{F})$。

设 $\boldsymbol{e}$ 为 OA 轴的单位矢量，则

$$\boldsymbol{e}_{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{a\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

由式（1.9）可得

$$M_{OA}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{e}_{OA} = -\frac{Fac\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

四、力偶矩矢

由大小相等，作用线不重合的两个反向平行力组成的特殊力系，称为**力偶**（couple）。显然，力偶不可能与一个力等效，所以力偶是一种不可能再简化的最简力系。力偶能使刚体改变转动状态，使变形体产生扭曲变形。

力偶两力所在的平面称为**力偶的作用面**，两力作用线间的垂直距离称为**力偶臂**，力偶中一个力的大小和力偶臂的乘积称为**力偶矩**（moment of couple）。空间力偶对刚体的作用效应取决于力偶矩的大小、作用面的方位和力偶的旋转方向，称为**力偶三要素**（three elements of couple）。可以用一个矢量将这三个要素同时表示出来：矢量的长短按一定比例表

示力偶矩的大小，矢量的方位表示力偶作用面法线的方位，矢量的箭头指向按右手螺旋规则确定，表示力偶的转向（图 1.4）。这个矢量称为**力偶矩矢**（moment vector of couple），用 $\boldsymbol{M}$ 表示。作用于刚体上的一组力偶称为力偶系，力偶矩矢在空间任意分布的力偶系称为空间力偶系。

实践表明，力偶的作用效应与矩心无关，所以力偶矩矢沿矩矢方向任意滑动或平行移动都不影响力偶对同一刚体的作用效应，可见力偶矩矢是**自由矢**（free vector）。进一步可知，作用在刚体上两力偶的等效条件是：力偶矩矢相等。

能否以“力偶是自由矢”为理由，将图 1.5 中梁 CD 上的力偶 M 移到梁 AC 上？为什么？

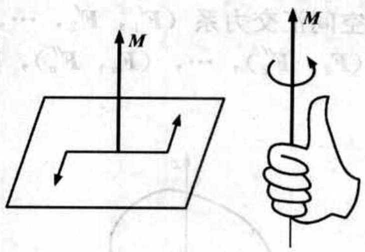

图 1.4

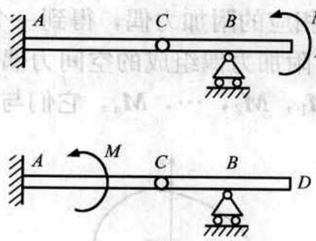

图 1.5

§1.2 力系的简化

1. 力的平移

图 1.6 表示力 $\boldsymbol{F}$ 作用在刚体的点 A 上，为把它平移到刚体上的任意点 O，可在点 O 加上一对与力 $\boldsymbol{F}$ 等值且平行的力 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$，由于 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$ 为共线平衡力系，合力为零，所以力系（$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$，$\boldsymbol{F}''$）与原力 $\boldsymbol{F}$ 是等效的。若将 $\boldsymbol{F}'$ 看作 $\boldsymbol{F}$ 平移到点 O 的力，则 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}''$ 构成一个附加力偶，若用 $\boldsymbol{r}$ 表示点 O 至点 A 的矢径，由式（1.6）可知，附加力偶矩矢等于原力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩矢为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1.11}$$

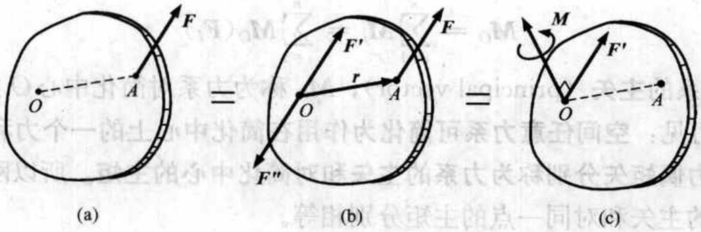

图 1.6

由此得到如下结论：**作用在刚体上某一点的力可平移到该刚体上任一点，但需增加一附**

加力偶才能与原力等效，此力偶矩矢等于原力对新的作用点的矩矢。

当刚体上的力沿其作用线移动时，附加力偶的力偶矩矢等于零，即作用在刚体上的力可沿其作用线任意移动而不改变其对刚体的作用效应，此性质称为**力的可传性**（transmissibility of force）。这样，作用在刚体上力的三要素成为：大小、方向和作用线。因此，作用于刚体上的力是**滑移矢**（sliding vector）。

力的可传性适用于变形体吗？为什么？试举例说明。

2. 力系向一点简化

力的作用线在空间任意分布的力系称为空间任意力系，各力作用线汇交于一点的空间力系称为**空间汇交力系**（concurrent force system in space）。设刚体上作用有空间任意力系 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$，如图 1.7 所示。以刚体内任意点 O 为简化中心，将力系中各力平移到点 O，并加上相应的附加力偶，得到一个作用于点 O 的空间汇交力系（$\boldsymbol{F}'_1$，$\boldsymbol{F}'_2$，…，$\boldsymbol{F}'_n$）和一个由所有附加力偶组成的空间力偶系（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}''_1$），（$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}''_2$），…，（$\boldsymbol{F}_n$，$\boldsymbol{F}''_n$），其力偶矩矢分别为 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$，…，$\boldsymbol{M}_n$，它们与原力系等效。

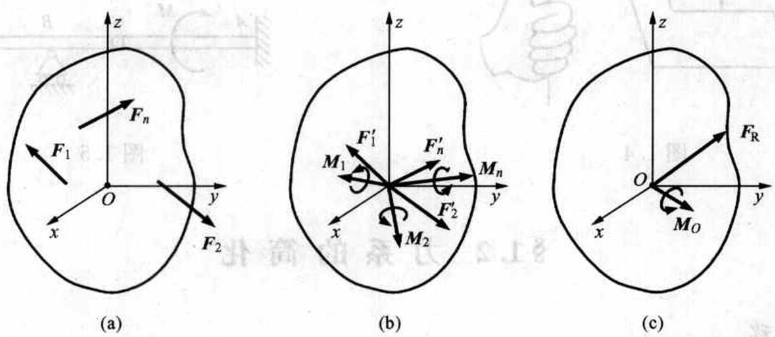

图 1.7

利用矢量合成的平行四边形法则分别对空间汇交力系和空间力偶系的各矢量逐次合成，得到作用线过点 O 的一个力和一个力偶，该力的力矢等于原力系各力的矢量和 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$，该力偶的力偶矩矢等于原力系中各力对简化中心的矩的矢量和 $\boldsymbol{M}_O$，即

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}'_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.13}$$

式中，$\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ 称为力系的**主矢**（principal vector），$\boldsymbol{M}_O$ 称为力系对简化中心 O 的**主矩**（principal moment）。由此可见：**空间任意力系可简化为作用在简化中心上的一个力和一个力偶，该力的力矢和力偶的力偶矩矢分别称为力系的主矢和对简化中心的主矩。**所以刚体上两力系等效的条件是：力系的主矢和对同一点的主矩分别相等。

主矢和力系中各力的解析式分别为

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{R} = F_{\mathrm{R}x}\boldsymbol{i} + F_{\mathrm{R}y}\boldsymbol{j} + F_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{F}_i = F_{ix}\boldsymbol{i} + F_{iy}\boldsymbol{j} + F_{iz}\boldsymbol{k} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

代入式（1.12），比较系数可得

$$F_{Rx}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix},\quad F_{Ry}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy},\quad F_{Rz}=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}$$

或简写为

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=\sum F_x\\F_{Ry}&=\sum F_y\\F_{Rz}&=\sum F_z\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

主矢 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向余弦为

$$F_R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2}\tag{1.15}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{i})&=\frac{\sum F_x}{F_R}\\\cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{j})&=\frac{\sum F_y}{F_R}\\\cos(\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{k})&=\frac{\sum F_z}{F_R}\end{aligned}\right\}\tag{1.16}$$

根据式 (1.10)，则式 (1.13) 可写为

$$M_{Ox}\boldsymbol{i}+M_{Oy}\boldsymbol{j}+M_{Oz}\boldsymbol{k}=\sum_{i=1}^{n}[M_x(\boldsymbol{F}_i)\boldsymbol{i}+M_y(\boldsymbol{F}_i)\boldsymbol{j}+M_z(\boldsymbol{F}_i)\boldsymbol{k}]$$

比较系数可得

$$M_{Ox}=\sum_{i=1}^{n}M_x(\boldsymbol{F}_i),\quad M_{Oy}=\sum_{i=1}^{n}M_y(\boldsymbol{F}_i),\quad M_{Oz}=\sum_{i=1}^{n}M_z(\boldsymbol{F}_i)$$

或简写为

$$\left.\begin{aligned}M_{Ox}&=\sum M_x\\M_{Oy}&=\sum M_y\\M_{Oz}&=\sum M_z\end{aligned}\right\}\tag{1.17}$$

主矩 $\boldsymbol{M}_O$ 的大小和方向余弦为

$$M_O=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_y)^2+(\sum M_z)^2}\tag{1.18}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})&=\frac{\sum M_x}{M_O}\\\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})&=\frac{\sum M_y}{M_O}\\\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})&=\frac{\sum M_z}{M_O}\end{aligned}\right\}\tag{1.19}$$

必须指出，主矢只有大小和方向，是自由矢，描述力系使物体平行移动的作用效应，力系对不同简化中心简化时，**主矢大小和方向保持不变，是一个不变量。**主矩描述力系使物体绕简化中心转动的作用效应，主矩一般随简化中心的不同而变化。

若空间力系向点 O_1 简化为一个合力 $\boldsymbol{F}'_R$（图 1.8），将该合力平移至点 O，可得作用于点 O 的力 $\boldsymbol{F}_R$ 和附加力偶 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}'_R)$。显然，若将该空间力系直接向点 O 简化得到的主矩应等于该附加力偶的力偶矩矢，即 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}'_R)=\boldsymbol{M}_O$。由主矩的定义可知 $\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$，因而有