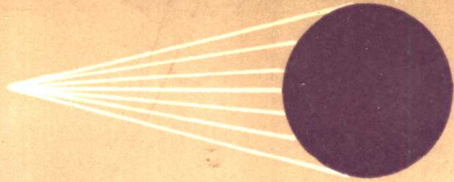

高中数学学习途径与解题方法

张程　编著

北京师范大学出版社

高中数学
学习途径与解题方法

张　程　编著

北京师范大学出版社

内 容 提 要

本书是为了配合高中数学课的学习，供中学生参考的一本理想读物。

全书共两部分。第一部分《学好数学的重要途径》，是引导读者如何针对数学这门课的特点来培养自己学习数学的思维能力，以期及早地找到学好数学的最佳途径。第二部分为《解答数学习题的一般方法》，共八章。这一部分系统地介绍了高中数学解题的十六种方法，并结合了200多道典型习题谈如何灵活地运用这些方法来分析问题和解答问题。

书中还配备近300道思考题和总练习题，并给出了全部解答，以便于读者检查自己的学习效果。

高中数学

学习途径与解题方法

张 程 编著

*

北京师范大学出版社出版发行

全 国 新 华 书 店 经 销

京 安 印 刷 厂 印 刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.125 字数：235千

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数：1——36 000

ISBN 7-303-01113-7/G·661

定价：4.00元

序

随着学习数学的理论知识，除应通过解答数学问题，获得一定的应用理论知识的技能外，还应获得通常所说的数学能力。而获得数学能力的高低，又将影响着继续学习数学理论知识和解答数学问题的效率。数学能力虽然是随着学习数学的理论知识和解答数学问题而获得的，但要使数学能力能充分的获得，还必须在学习数学理论知识的过程中，在解答数学问题的过程中，及时进行总结。通过对数学知识的发生与发展过程的认识，总结学好数学理论的经验；通过对解答数学问题的体会，总结运用数学知识和数学方法的经验，才有可能较充分地获得数学能力。

张程同志有鉴于此，在学习数学和任教数学课的过程中，及时地做了如上所述的总结。为了帮助高中阶段的学生学好数学，达到学习数学的目的，还把所做的有关总结进行了整理，撰写成书，定名为《高中数学学习途径与解题方法》，供学生们参考。

近十年来，各地也出版了不少有关高中数学学习辅助资料一类的书籍，但其中较大部分是为帮助高中学生准备应考大学而撰写的、数学例题和习题汇编式的书籍。《高中数学学习途径与解题方法》这本书与应考大学的数学习题汇编式的书不同，是注意系统性，注意符合数学教育科学性的、为配合高中数学课的学习，供高中学生参考的课外读物。书中

第一部分《学好数学的重要途径》主要就是怎样学好数学的经验总结。第二部分《解答数学习题的一般方法》主要就是怎样运用数学知识和数学方法的经验总结。

作为仅在课余和假日，为辅导高中水平的成人学员和高中学生学好数学而进行教学的大学生，张程同志能写出《高中数学学习途径与解题方法》这本书，应该说是难能可贵的。虽然，这本书可能在系统性和数学教育科学性方面，还不够完善甚至有不够恰当处，但相信随着张程同志的继续总结，本书将不断修改和补充，从而会更趋于完善的。

正当本书即将付印之际，略致数语如上，用作向本书的出版，表示祝贺之意。

钟善基

1990年10月于北京师大

前　言

高速发展着的数学科学日益成为一切自然科学和技术的强有力工具。正是数学的这一特点，决定着中学数学的重要地位。那么，怎样才能学好数学这个问题也就当然地成为大家所迫切关心的课题。要学好数学，首先必须了解数学的特点，本书的第一部分正是从这个角度并结合中学数学中典型而又常见的例子展开论述的，从而使读者轻松地明白要想学好数学应该注意侧重哪些方面能力和思维方式的培养与提高。

要达到这一目的，重要的途径之一，自然是进行解答数学习题的有效训练。而训练中心，则应以寻求思路为主，但这在一般的教材中是难以体现的。

为了弥补教材和教学中的这一不足，本书第二部分分八章较系统地总结并介绍了解答问题的数学思想和常见方法如综合法、分析法、解析法、反证法、同一法、换元法、放缩法、变项法、待定系数法、特殊值法、归纳法和图象法等等，还列举了大量典型的例子加以剖析，便于读者接受和掌握。在每节后面还留有思考题，让读者练习巩固这些方法的运用，希望读者不要跳过，因为仅浮于表面而不深入领会解题思想方法的实质，那么碰到稍有变化的问题又会手足无措了。

本书为了适应程度不同读者的需要，每一章节基本独立

(可不按书中顺序阅读)。另外，还专门为参加数学竞赛的同学安排一定章节，介绍了枚举法、一一对应法和抽屉原则等数学思想及解题方法。

本书的编写，自始至终都得到了北京师大数学系副主任陈方权，副教授郑萼老师的支持、关心和鼓励。初稿完成后，著名的数学教育专家、北京师大数学系钟善基教授对初稿提出了很多指导性的意见。在这里，谨向三位老师表示衷心的感谢。

在编写本书的过程中，也得到了杨志强、章大芸、谢长斌等同学的关心和帮助。在这里，也一并致谢。

由于作者的水平所限，书中一定存在着不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

张 程

1990年4月于北京师大

目　　录

I）第一部分
学好数学的重要途径

第一章　学好数学的重要途径

——谈解答数学习题的作用

要学好数学，必须要牢固掌握数学的基础知识和基本技能 这也正是中学数学教学大纲中所要求的。而这一目的的实现，解答数学问题是我们最有效的重要途径。

因为通过解答数学习题，不仅可以帮助我们复习和巩固基础知识，还能培养和提高我们抽象思维和创造思维的能力。当然，解答不同或者即使相同的数学习题，如果思考问题的方法不同，那么对培养我们方向思维所起的效果往往也是不尽相同的。比如，把这样一个问题即试问手表的指针时针与分针在 1 点到 2 点之间什么时刻是重合的，让学生作答。有的学生会毫不犹豫地拿出笔和纸，列出方程，解出结果；有的同学将取下手表，把手表的指针进行拨转，然后读出结果。这表明采用第一种思考方法的同学，在运算、推理能力方面得到了训练，采用第二种思考方法的同学，动手实践能力得到了加强。这一事实同时也告诉我们，在遇到问题时，不要只求用一种方法解答出来就完事了，还应该再从其它角度去思考。简而言之就是要注意一题多解。因为这样，对训练我们多方面能力将事半功倍。

解答数学习题，是我们学好数学的重要途径，这不仅是由于数学这门学科的特点所决定的，还因为：

一、 解答数学习题，可以巩固和加深对数学概念、定

义和性质等基本知识的理解。

我们知道，理解并牢固地掌握数学概念、定义和性质，是打牢数学基础、提高基本能力的根本。但实际上好多同学却忽略了这一点，以致解答习题无从下手甚至发生错误。在下面的例子分析中就充分地暴露这一事实。

比如例1，有的同学运用公式$(a^m)^n=a^{mn}$进行推证，最后得出“$1=-1$”的结论。理由如下：

$$\because\quad (a^m)^n=a^{mn}$$

$$\therefore\quad [(-1)^2]^{\frac{3}{2}}=(-1)^{2\times\frac{3}{2}}=(-1)^3$$

$$\text{而}\quad [(-1)^2]^{\frac{3}{2}}=1^{\frac{3}{2}}=1$$

$$(-1)^3=-1$$

$$\therefore\quad 1=-1.$$

这显然是一个错误的结论。但错在哪里呢？（通过解答习题，我们可以发现自己还没有理解和掌握的东西。无疑，这将又促使大家认真地思考，有利于对定义、公式的深入理解。）

原来式子$(a^m)^n=a^{mn}$成立是有条件的，即其中m和n都是自然数（注意，当$a>0$时，这条件可去掉）。

通过解答习题，同时也得到反馈信息告诫我们学习数学的方法。在看书时，不仅仅要记住重要的公式和结论，还要弄清楚其成立的条件，这是尤其重要的。

又如，选择符号“$\in$”、“$\ni$”、“$\subset$”、“$\supset$”填空，使下式成立：ϕ ________ $\{\phi\}$。

不少同学只知道填上符号“$\in$”是对的，而不知道为什

么选择符号“⊂”也是正确的。

这就暴露了他们对书中定义：“空集是任何非空集的真子集”没有真正掌握。

再如，把手表的分针从12点拨到12点1刻，问分针转过多少角度？

大多数同学回答分针转过90°，这是错误的。因为他们没有考虑数学中的角度是按逆时针和顺时针旋转方向定义正负的。

有些综合题，涉及的知识面较广，但解决问题的关键往往也还是在于对概念、定义和性质的掌握程度。

例如，长为定值l（$l>2p$）的线段，其两端点在抛物线$x^2=2py$（$p>0$）上移动。求线段的中点M离x轴最近时的纵坐标。

这是一道高考题，不少资料中都给出了“常规”的解法，即先求出点M的轨迹方程$f(x,y)=0$，再求y的最小值。但这样做，计算量较大，并且技巧性较强。如果从抛物线定义性质入手，解答则十分简捷。

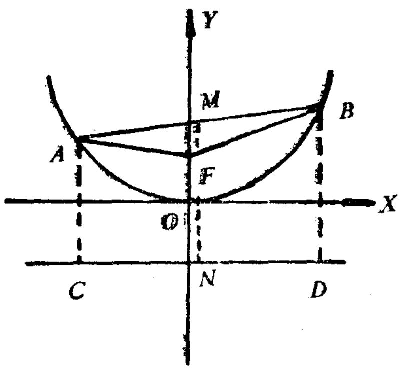

图 1

如图1，作抛物线的准线CD，根据抛物线的定义，有

$$y_M+\frac{1}{2}p$$

$$=\frac{|AC|+|BD|}{2}$$

$$=\frac{|AF|+|BF|}{2}$$

$$\geqslant\frac{|AB|}{2}=\frac{l}{2}$$

$\therefore\quad y_M\geqslant\frac{l}{2}-\frac{p}{2}.$

$\therefore\quad y_M$ 的最小值等于$\frac{l}{2}-\frac{p}{2}$.(因为$l\geqslant 2p$,而抛物线的通径长为$2p$，所以，AB一定可以过点F。)

再例如，已知函数$f(x)=x^2+px+q$，集合A和B分别定义：$A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f(x-1)=x+3\}$，当 $A=\{2\}$时，求集合B。

分析：首先应该弄清楚集合 $A=\{x|f(x)=x\}$ 的意义即集合A是由方程$f(x)-x=0$的根所组成的集合,而$f(x)=x^2+px+q$，所以方程 $f(x)-x=0$ 是一元二次方程．由于已知$A=\{2\}$，根据集合性质之元素的互异性即可判断方程$f(x)-x=0$ 即 $x^2+(p-1)x+q=0$ 有两个相等的实根 2，从而由韦达定理得，$2+2=-(p-1)$，$2\times 2=q$ 即 $p=-3$，$q=4$。这样 $f(x)=x^2-3x+4$

$$f(x-1)=(x-1)^2-3(x-1)+4=x^2-5x+8.$$

根据集合B的意义即集合B是由方程 $f(x-1)-(x+3)=0$ 即$x^2-6x+5=0$根为元素所组成的集合．到此，容易得到集合$B=\{1,5\}$。

可见，解答数学习题，可巩固和加深对概念、定义和性

质的理解。同时，牢固地掌握数学概念、定义和性质又能为解答数学习题提供方法。

二、通过解答数学习题，可以培养和提高分析问题的能力，有助于发掘出题目中的隐含条件。

解答数学习题的过程，关键的一步是从已知条件和未知中，找出解题的途径。寻找解题途径的方法是多种多样的，从已知到未知的综合法或从未知到已知的分析法，还有从已知未知两头凑的分析综合法；有时，直接难以回答，可以考虑反证法；有时，就问题本身难以解决，要用类比思想进行转化等等，这些都是本书第二部分要作具体介绍的解题方法。有同学自然会想，对于某个习题，我们如何去确定哪一种解法呢？的确，我们没有也不可能有解题方法公式去套。事实上，寻求并获得解题方法的途径就是我们所说的分析问题和解决问题的能力。而要想获得这种能力，我们必须要进行大量的训练，去了解数学思想方法的实质，并不断地归纳和总结解题规律，才能实现。

要不然，我们不仅对一般的习题无法作答，对那些题目不明显给出条件而具有隐含条件的就更困难了。

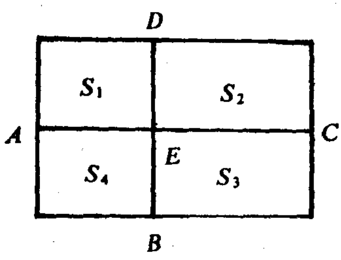

图 2

例如，设矩形的一边长等于1cm，两条互相垂直的直线将矩形分成四个小矩形，其中三个小矩形的面积不小于$1cm^2$，第四个小矩形的面积不小于$2cm^2$，求矩形的另一边长的最小值。

不少同学念完题目，都觉得很简单，认为有三个小矩形的面积不小于1cm²，而另一个小矩形的面积又不小于2cm²。当然，这个矩形的面积就不小于5cm²，又已知它的一边长为1cm，那么另一边长的最小值显然就是5cm了。

上面的解答看起来好象无懈可击，但事实上却是极其错误的。因为他们没有认真地分析发掘出题目中的隐含条件。

我们从图形上（图2），很容易看出关系式：

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

$$\begin{aligned}(S_1 \cdot S_3 &= AE \cdot DE \times BE \cdot CE \\ &= DE \cdot CE \times AE \cdot BE = S_2 \cdot S_4)\end{aligned}$$

这样，$S_1 + S_3 \geqslant 2\sqrt{S_1 S_3}$

$$\begin{aligned}&= 2\sqrt{S_2 S_4} \\ &= 2\sqrt{1 \times 2} = 2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^2)\end{aligned}$$

因此，$S_{矩形} = (S_1 + S_3) + S_2 + S_4$

$$\begin{aligned}&\geqslant 2\sqrt{2} + 1 + 2 \\ &= 3 + 2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^2)\end{aligned}$$

所以，矩形的另一边长的最小值应该等于$(3+2\sqrt{2}) \div 1 = (3+2\sqrt{2})$ cm。

通过解答这道习题，我们清楚地看到：有些题目中给出的明显条件还不能够完全地、直接地为解题服务，而那些关键的条件却还隐含在题设条件所涉及的概念、定义或图形之中，有待于我们做题时去认真地分析、发掘，以便解答的需要。

再如，选择题：参数方程 $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin t \end{cases}$ （t为参数）

表示的曲线是（　　）。